8 Skalární součin

Cvičení 8.1. *Při standardním skalárním součinu v* $\mathbb{R}^4$ *spočítejte normu vektorů* $\mathbf{u}$ *a* $\mathbf{v}$ *a úhel mezi nimi.*

$$\mathbf{u} = (1,3,-2,4), \quad \mathbf{v} = (2,0,1,5)$$

Cvičení 8.2. *Skalární součin na* $\mathbb{R}^2$ *je dán předpisem*

$$\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v} \ .$$

Spočítejte úhel mezi vektory $(2,3)^T$ *a* $(1,4)^T$.

Cvičení 8.3. *Spočítejte normu polynomu* $2ix + (3i-4)$ *vzhledem ke skalárnímu součinu* $\langle f \,|\, g \rangle = \int_{-1}^{1} \overline{f} g$.

Cvičení 8.4. *Skalární součin na* $\mathbb{C}^2$ *je dán předpisem*

$$\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v} \ .$$

Najděte všechny vektory kolmé na vektor $\mathbf{u} = (1,i)^T$. *Najděte nějakou ortogonální bázi* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *a znormováním najděte ortonormální bázi.*

Cvičení 8.5. *Najděte souřadnice vektoru* $(\pi, 1, 37)$ *vzhledem k bázi*

$$(\frac{1}{3}(1,2,2), \frac{1}{3}(-2,-1,2), \frac{1}{3}(2,-2,1))$$

prostoru $\mathbb{R}^3$.

Cvičení 8.6. *V prostoru* $\mathbb{R}^2$ *se skalárním součinem* $\langle \, | \, \rangle$ *je* $B = ((1,1)^T, (2,-1)^T)$ *ortonormální báze. Určete* $\left\langle (1,-1)^T \,\middle|\, (2,0)^T \right\rangle$

Cvičení 8.7. *V prostoru* $\mathbb{C}^3$ *se standardním skalárním součinem určete ortogonální doplněk roviny* $\left\langle (1,2,i)^T, (1+i,-1,3)^T \right\rangle$.

Cvičení 8.8. *V prostoru* $\mathbb{R}^2$ *se skalárním součinem* $\langle \, | \, \rangle$ *je* $B = ((1,1)^T, (2,-1)^T)$ *ortonormální báze. Určete ortogonální doplněk přímky* $\left\langle (1,3)^T \right\rangle$.

Cvičení 8.9. *V prostoru* $\mathbb{R}^3$ *se standardním skalárním součinem určete ortogonální projekci vektoru* $(1,2,3)^T$ *na přímku* $\left\langle (4,5,6)^T \right\rangle$.

Cvičení 8.10. *V prostoru* $\mathbb{R}^3$ *se standardním skalárním součinem určete nejlepší aproximaci vektoru* $(2,-1,3)^T$ *v rovině* $\left\langle (1,1,0)^T, (0,1,2)^T \right\rangle$ *a chybu této aproximace.*

Cvičení 8.11. *Metodou nejmenších čtverců najděte nejlepší „řešení“ soustavy*

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \ .$$

Cvičení 8.12. *V prostoru* $\mathbb{R}^3$ *se standardním skalárním součinem ortogonalizujte bázi* $((2,1,-2)^T, (0,1,-1)^T, (3,5,-2)^T)$*. K nalezené ortogonální bázi určete příslušnou ortonormální.*

Cvičení 8.13. *Najděte QR-rozklad* $A = QR$ *reálné matice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} .$$

Určete Q^{-1}.

Cvičení 8.14. *V prostoru* $\mathbb{R}^4$ *se standardním skalárním součinem najděte ortonormální bázi podprostoru* $W = \left\langle (1,1,1,1)^T, (-1,-3,-1,-3)^T, (4,1,2,-1)^T \right\rangle$ *a určete ortogonální projekci a kolmici vektoru* $(1,2,3,4)^T$ *na* W.

9 Vlastní čísla a vektory

Cvičení 9.1. *Určete charakteristický polynom komplexní matice* A.

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 1 \\ -1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & -1 \\ 1-i & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.2. *Určete vlastní čísla (i s algebraickými násobnostmi) a vlastní vektory lineárního operátoru* f *na prostoru* $\mathbb{R}^3$.

$$f((x_1, x_2, x_3)^T) = (x_2 - x_3, -x_1 + 2x_2 + x_3, -2x_1 + x_2 + x_3)^T$$

Cvičení 9.3. *Matice lineárního operátoru na* $\mathbb{Z}_5^3$ *vhledem k bázi* B *je* A*. Určete vlastní čísla (i s algebraickými násobnostmi) a příslušné vlastní vektory operátoru* f.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

Cvičení 9.4. *Určete vlastní čísla (i s algebraickými násobnostmi) a vlastní vektory matice* A *nad* $\mathbb{Z}_3$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.5. *Určete koeficienty u* λ^4, λ^3 *a konstantní koeficient charakteristického polynomu reálné matice* A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.6. *Zjistěte, zda je reálná matice A diagonalizovatelná. Pokud ano, najděte regulární matici R a diagonální matici D tak, aby $D = R^{-1}AR$.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.7. *Zjistěte, zda je operátor f na prostoru $\mathbb{Z}_7^3$ diagonalizovatelný. Pokud ano, najděte bázi B takovou, že $[f]_B^B$ je diagonální, a určete $[f]_B^B$.*

$$f((x_1, x_2, x_3)^T = (5x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + 6x_3, 2x_2 + 6x_3)^T$$

Cvičení 9.8. *Matice lineárního operátoru f na prostoru $\mathbb{Z}_3^2$ vzhledem k bázi B je A. Zjistěte, zda f je diagonalizovatelný. Pokud ano, najděte bázi C takovou, že $[f]_C^C$ je diagonální, a určete $[f]_C^C$.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Cvičení 9.9. *Najděte vlastní čísla a jejich geometrické a algebraické násobnosti operátoru f_A na $\mathbb{Z}_3^4$.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.10. *Operátor f na $\mathbb{Z}_3^3$ splňuje*

$$f((1,1,2)^T) = (1,2,0)^T, \quad f((1,2,0)^T) = (1,1,1)^T, \quad f((0,1,2)^T) = (2,1,0)^T \ .$$

Určete jeho charakteristický polynom.

Cvičení 9.11. *Najděte vzorec pro a_n v následující posloupnosti reálných čísel.*

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 3, \quad a_n = 6a_{n-1} - 5a_{n-2} \ \text{ pro } n \geq 2.$$

Cvičení 9.12. *Najděte n-tou mocninu reálné matice A.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.13. *Vyřešte diferenční rovnici (diskrétní lineární dynamický systém) $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ s počátečním vektorem $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.14. *Vyřešte soustavu diferenciálních rovnic (neznámé jsou reálné funkce reálné proměnné).*

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1 + u_2 \\ u_2' &= -2u_1 + 4u_2 \end{aligned}$$

Cvičení 9.15. *Vypočítejte A^{10} pro reálnou matici*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.16. *Vyřešte diferenční rovnici $\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1})$ pro počáteční vektor $\mathbf{x}_0 = (2,1)^T$, kde operátor $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je dán vztahem*

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -2x + 5y \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.17. *Najděte regulární matici R a matici J v Jordanově kanonickém tvaru takovou, že $J = R^{-1}AR$, kde A je reálná matice*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Dále vypočtěte A^n.

Cvičení 9.18. *Lineární operátor f na $\mathbb{R}^3$ je dán předpisem níže. Najděte bázi B prostoru $\mathbb{R}^3$ a matici f vzhledem k B tak, že $[f]_B^B$ je v Jordanově kanonickém tvaru.*

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x - 2y + 7z \\ x + 2y + 2z \\ -3x + y - z \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.19. *Matice operátoru f na $\mathbb{R}^2$ vzhledem k bázi B je A. Najděte bázi C, aby $[f]_C^C$ byla v Jordanově kanonickém tvaru.*

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right), \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.20. *Najděte matici J v Jordanově kanonickém tvaru podobnou matici A nad $\mathbb{Z}_5$ a matici R takovou, že $R^{-1}AR = J$.*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.21. *Najděte bázi prostoru* $\mathbb{R}^3$ *složenou z Jordanových řetízků operátoru* f_A *a matici* f_A *vzhledem k této bázi.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.22. *Najděte bázi prostoru* $\mathbb{R}^4$ *složenou z Jordanových řetízků operátoru* f_A *a matici* f_A *vzhledem k této bázi.*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.23. *Najděte bázi* B *prostoru* $\mathbb{Z}_7^3$*, pro kterou je* $[f_A]_B^B$ *v Jordanově kanonickém tvaru.*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.24. *Najděte bázi* B *prostoru* $\mathbb{C}^2$*, pro kterou je* $[f]_B^B$ *v Jordanově kanonickém tvaru.*

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ix + y \\ 2ix + 2y \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.25. *Zjistěte, zda je matice* A *nad* $\mathbb{Z}_3$ *podobná matici v Jordanově kanonickém tvaru.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.26. *Spočítejte* n*-tou mocninu matice* A *nad* $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.27. *Řešte diferenční rovnici* $\mathbf{v}_k = A\mathbf{v}_0$ *s počáteční podmínkou* $\mathbf{v}_0 = (1,1,1)^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.28. *Najděte vzorec pro* n*-tý člen posloupnosti* a_n.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+3} = 5a_{n+2} - 8a_{n+1} + 4a_n$$

Cvičení 9.29. *O reálné matici A řádu 13 víme, že má charakteristický polynom $p(x) = (2-x)^9(3-x)^4$, $\dim(\mathrm{Ker}\,(A-3I_{13})) = 1$, $\dim(\mathrm{Ker}\,(A-2I_{13})) = 4$, $\dim(\mathrm{Ker}\,((A-2I_{13})^2)) = 7$, $\dim(\mathrm{Ker}\,((A-2I_{13})^3)) = 9$. Určete matici J v Jordanově kanonickém tvaru podobnou matici A.*

Cvičení 9.30. *Zjistěte, zda $M = \langle B \rangle$ je invariantním podprostorem operátoru f_A na prostoru $\mathbb{Z}_3^3$. Pokud ano, nalezněte matici restrikce f_A na M vzhledem k bázi B.*

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.31. *Pro operátor f na $\mathbb{R}^3$ najděte nějakou bázi B prostoru $\mathrm{Im}\, f$ a určete matici zúžení f na $\mathrm{Im}\, f$ vzhledem k B.*

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 3x-y+2z \\ 2x+2z \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.32. *Zjistěte, zda je komplexní matice A normální.*

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ 1-2i & 3-i \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.33. *Najděte ortonormální bázi B prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem, vzhledem ke které je matice operátoru f diagonální a najděte $[f]_B^B$.*

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x+2y+2z \\ 2x+13y+4z \\ 2x+4y+13z \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.34. *Najděte ortogonální matici Q a diagonální matici A takovou, že $A = QDQ^T$.*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.35. *Zjistěte, zda je reálná matice A pozitivně (semi)definitní.*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.36. *Najděte ortonormální báze B, C prostorů $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$ takové, že $[f_A]_C^B$ je obdélníková diagonální matice s nezápornými prvky na diagonále.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.37. *Najděte singulární rozklad a kompaktní singulární rozklad reálné matice A.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

10 Bilineární formy

Cvičení 10.1. *Najděte matici bilineární formy f na $\mathbb{Z}_5^2$ vzhledem k bázi B znáte-li její matici vzhledem k bázi C.*

$$B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad [f]_C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 10.2. *Rozložte danou bilineární formu na prostoru $\mathbb{Z}_7^3$ na součet symetrické a antisymetrické.*

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = 2x_1y_1+3x_1y_2+4x_1y_3+6x_2y_1+5x_2y_2+x_3y_1+5x_3y_2$$

Cvičení 10.3. *je dáno analytické vyjádření kvadratické formy f_2 na prostoru $\mathbb{R}^2$ vzhledem k bázi B. Určete matici příslušné symetrické bilineární formy vzhledem k bázi C.*

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad C = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad f_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2$$

Cvičení 10.4. *Najděte f-ortogonální bázi prostoru $\mathbb{Z}_3^4$ a určete matici f vzhledem k této bázi, kde*

$$f_2((x_1,x_2,x_3,x_4)^T) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

Cvičení 10.5. *Najděte f-ortogonální bázi $\mathbb{Z}_3^3$ a určete matici f vzhledem k této bázi, kde*

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Cvičení 10.6. *Rozložte matici A na součin LDL^T, kde L je dolní trojúhelníková s jedničkami na diagonále a D je diagonální.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Cvičení 10.7. *Určete signaturu bilineární formy f:*

$$[f]_{K_4} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cvičení 10.8. *Určete signaturu kvadratické formy f_2:*

$$f_2((x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T) = -x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_1x_4 + 5x_2^2 + 2x_2x_3$$

Cvičení 10.9. *Najděte bázi $\mathbb{R}^2$, která je f-ortogonální a zároveň ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.*

$$f_2((x_1, x_2)^T) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$$

Cvičení 10.10. *Analyzujte následující útvar v $\mathbb{R}^2$.*

$$U = \{(x_1, x_2)^T : x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2 + 14x_1 - 2x_2 - 27 = 0\}$$

11 Afinní prostory

Cvičení 11.1. *Zjistěte zda S je soustava souřadnic v afinním prostoru $\mathbb{Z}_5^3$.*

$$S = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Cvičení 11.2. *Zjistěte, zda S je soustava souřadnic v afinním prostoru $\mathbf{A}$ s prostorem vektorů $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbb{R}$.*

$$S = \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right), \quad A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + V, \quad V = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Cvičení 11.3. *Najděte vyjádření bodu b a vektoru $\mathbf{v}$ vzhledem k soustavě souřadnic S afinního prostoru $\mathbb{Z}_5^3$.*

$$S = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Cvičení 11.4. *Zjistěte, zda bod b leží v afinním prostoru $\mathbf{A}$ (s prostorem vektorů $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbb{R}$). Pokud ano, najděte jeho souřadnice vzhledem k soustavě souřadnic $S = (a, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$.*

$$A = a + V = a + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Cvičení 11.5. *Souřadnice bodu b vzhledem k soustavě souřadnic S afinního prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ jsou $(1, 3, 4)^T$. Najděte souřadnice b vzhledem k soustavě souřadnic R.*

$$S = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$R = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Cvičení 11.6. *Zjistěte, zda body* $a_1 = (1,2,3)^T, a_2 = (3,1,0)^T, a_3 = (4,1,2)^T, a_4 = (1,1,1)^T$ *v afinním prostoru* $\mathbb{Z}_5^3$ *tvoří barycentrickou soustavu souřadnic. Pokud ano, najděte barycentrické souřadnice bodu* $b = (2,2,3)^T$ *v této barycentrické soustavě.*

Cvičení 11.7. *Najděte parametrické vyjádření podprostoru* $B = \left\langle (1,2,3)^T, (3,6,1)^T, (2,3,1)^T \right\rangle$ *afinního prostoru* $\mathbb{Z}_7^3$ *a zjistěte dimenzi tohoto podprostoru.*

Cvičení 11.8. *Najděte rovnicové vyjádření podprostoru* $B = \left\langle (1,2,3)^T, (3,6,1)^T, (2,3,1)^T \right\rangle$ *afinního prostoru* $\mathbb{Z}_7^3$ *vzhledem ke kanonické soustavě souřadnic a zjistěte dimenzi tohoto podprostoru.*

Cvičení 11.9. *Najděte parametrické vyjádření podprostoru* B *afinního prostoru* $\mathbb{Z}_7^5$ *daného rovnicemi vzhledem ke kanonické soustavě souřadnic a zjistěte dimenzi tohoto podprostoru.*

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_5 &= 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + 5x_5 &= 2 \end{aligned}$$

Cvičení 11.10. *Najděte vyjádření podprostoru* B *afinního prostoru* $\mathbb{Z}_7^5$ *jako afinní kombinaci bodů. Podprostor* B *je dán rovnicemi vzhledem ke kanonické soustavě souřadnic. Zjistěte také dimenzi tohoto podprostoru.*

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_5 &= 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + 5x_5 &= 2 \end{aligned}$$

Cvičení 11.11. *Najděte vyjádření podprostoru* B *afinního prostoru* $\mathbb{R}^5$ *jako afinní kombinaci bodů a zjistěte dimenzi* B*. Podprostor* B *je dán parametricky.*

$$B = (1,2,3,-1,2)^T + \left\langle (1,3,-1,2,3)^T, (2,1,4,2,0)^T, (-1,2,-5,0,3)^T \right\rangle$$

Cvičení 11.12. *Najděte rovnicové vyjádření podprostoru* B *afinního prostoru* $\mathbb{R}^5$ *vzhledem ke kanonické soustavě souřadnic a jeho dimenzi. Podprostor* B *je dán parametricky.*

$$B = (1,2,3,-1,2)^T + \left\langle (1,3,-1,2,3)^T, (2,1,4,2,0)^T, (-1,2,-5,0,3)^T \right\rangle$$

Cvičení 11.13. *Najděte všechny normálové vektory podprostoru* B *afinního eukleidovského prostoru* $\mathbb{R}^5$ *se standardním skalárním součinem.*

$$B = (1,2,3,-1,2)^T + \left\langle (1,3,-1,2,3)^T, (2,1,4,2,0)^T, (-1,2,-5,0,3)^T \right\rangle$$

Cvičení 11.14. *Určete obraz bodu* $(1,2,3)^T \in \mathbb{R}^3$ *při afinním zobrazení* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *splňujícím*

$$F\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a obraz vektoru $(1,2,3)^T$ *při příslušném lineárním zobrazení* f*.*

Cvičení 11.15. *Určete obraz bodu* $(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ *při afinním zobrazení* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *splňujícím*

$$F\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 11.16. *Lineární zobrazení* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *vytvořené afinním zobrazením* F *má vzhledem k bázi* B *matici* A. *Navíc* $F((1,2)^T) = (1,-1)^T$. *Určete* $F((3,4)^T)$.

$$B = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right), A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$