Domácí úkol č. 3 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2014–2015

Datum odevzdání 16.3.2015 18:00

(3.1) V $\mathbb{R}^3$ uvažujme rovinu

$$W = \left\langle (1,3,2)^T, (1,-1,1)^T \right\rangle .$$

Najděte všechny vektory $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, pro které platí $\langle \mathbf{w} \rangle = \left\langle (2,2,3)^T \right\rangle$, $\|\mathbf{v}\| = 5$ a $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = 3$, kde $\mathbf{w}$ je ortogonální projekce vektoru $\mathbf{v}$ na W.

(3.2) Nechť $A = (\mathbf{a}_1 | \dots | \mathbf{a}_n)$ je regulární reálná matice řádu n. Dokažte, že absolutní hodnota determinantu matice A je menší nebo rovná součinu norem vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ (normy bereme vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu). Interpretujte tuto nerovnost geometricky.

Nápověda: Použijte QR-rozklad. Ukažte, že ortogonální matice má determinant ± 1 a že prvky na diagonále matice R lze odhadnout velikostmi vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$.

Bonusový problém: Ukažte, že každé zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, které zachovává skalární součin, je lineární.