Kapitola 12

Několik aplikací

Diskrétní a rychlá Fourierova transformace

Diskrétní Fourierova transformace spočívá ve změně reprezentace polynomu s koeficienty v nějakém tělese $\mathbf{T}$. Obvyklá reprezentace polynomu stupně $n-1$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$$

sestává ze zadání koeficientů $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{T}$. Stejně tak ale můžeme zadat polynom f pomocí jeho hodnot v n různých bodech $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbf{T}$. Předepíšeme-li hodnoty $f(x_i) = b_i \in \mathbf{T}$ pro $i = 0, \ldots, n-1$, pak podle Tvrzení 4.14 existuje právě jeden polynom f stupně $n-1$ s koeficienty v tělese $\mathbf{T}$, který má v bodech $x_0, \ldots, x_{n-1}$ předepsané hodnoty. Jeho koeficienty $a_0, \ldots, a_{n-1}$ najdeme jako řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_{n-1}x_0^{n-1} &= b_0 \\
a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_1^{n-1} &= b_1 \\
&\vdots \\
a_0 + a_1x_{n-1} + \cdots + a_{n-1}x_{n-1}^{n-1} &= b_{n-1}.
\end{aligned}$$

Matice této soustavy je Vandermondova matice

$$V_{x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Jednoznačnost polynomu f vyplývá z regularity Vandermondovy matice v případě, že body $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ jsou navzájem různé, kterou jsme dokázali v Úloze 10.3.

Předpokládejme nyní, že máme vynásobit dva polynomy $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ a $g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}$ stupně nejvýše $n-1$. Jejich součin fg je polynom stupně nejvýše $2n-2$. Budeme jej znát, pokud budeme znát $2n-1$ koeficientů součinu fg nebo hodnoty součinu fg ve $2n-1$ různých bodech $x_0, x_1, \ldots, x_{2n-2}$. Známe-li hodnoty obou polynomů $f(x_i) = b_i$ a $g(x_i) = c_i$ v těchto $2n-2$ bodech, můžeme snadno spočítat hodnoty součinu $fg(x_i) = b_ic_i$ v těchto bodech. Potřebujeme k tomu pouze $2n-1$ násobení, zatímco při výpočtu koeficientů d_j při klasické reprezentaci součinu

$$(fg)(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_{2n-2}x^{2n-2}$$

pomocí vztahů

$$d_k = \sum_{i=0}^{k} a_ic_{k-i}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2n-2,$$

potřebujeme celkem

$$2(1 + 2 + \cdots + n) = n(n+1)$$

násobení a řádově stejný počet sčítání. Násobení polynomů je tak mnohem rychlejší, pokud máme polynomy zadány pomocí jejich hodnot v dostatečně mnoha bodech.

Problém samozřejmě spočívá v ceně přechodu od zadání polynomu pomocí koeficientů k jeho zadání pomocí hodnot v předepsaných bodech a obráceně. Hodnotu polynomu $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ v bodě x_i můžeme spočítat pomocí vyjádření

$$\begin{aligned} f(x_i) &= a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \cdots + a_{n-1}x_i^{n-1} = \\ &= a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(\cdots + x(a_{n-1})\cdots))). \end{aligned}$$

Tomuto vyjádření se říká *Hornerovo schéma*. Vyžaduje $n-1$ násobení a stejný počet sčítání. Potřebujeme-li spočítat hodnotu polynomu f v n různých bodech, musíme tak použít celkem $n(n-1)$ násobení a $n(n-1)$ sčítání. To je řádově stejný počet násobení jako při přímém výpočtu koeficientů součinu a úplně stejný počet sčítání. Protože násobení je mnohem náročnější na čas než sčítání, můžeme říct, že výpočet hodnoty polynomu stupně $n-1$

v n bodech je přibližně stejně časově náročný jako spočítat součin dvou polynomů stupně $n-1$ pomocí přímého výpočtu koeficientů.

Všimněme si, že hodnoty polynomu $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ v bodech $x_0, \ldots, x_{n-1}$ můžeme spočítat jako souřadnice součinu matic

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix},$$

což můžeme rovněž zapsat ve tvaru

$$(f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_{n-1}))^T = V_{x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}}(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})^T.$$

Výpočtu hodnot polynomu f v bodech $x_0, \ldots, x_{n-1}$ budeme říkat *evaluační transformace* a budeme ji označovat $T_{x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}}(f)$.

Pokud naopak chceme z hodnot polynomu f stupně $n-1$ v n bodech najít koeficienty polynomu, musíme vyřešit soustavu n lineárních rovnic o n neznámých s regulární maticí, což při výpočtu pomocí Gaussovy eliminace vyžaduje dokonce řádově n^3 násobení a řádově stejný počet sčítání. K tomu je ještě třeba přidat cenu výpočtu prvků Vandermondovy matice, která je maticí soustavy.

Abychom mohli využít “rychlejšího” násobení polynomů při jejich zadání pomocí hodnot v dostatečně mnoha bodech, potřebujeme mnohem ryhlejší algoritmy pro výpočet hodnoty polynomu v bodě než je výpočet pomocí Hornerova schématu. Stejně tak potřebujeme mnohem rychlejší algoritmus pro výpočet koeficientů polynomu, známe-li jeho hodnoty v dostatečně mnoha bodech, než je algoritmu založený na Gaussově eliminaci použité na Vandermondovu matici. Tyto algoritmy si nyní ukážeme.

Podstata urychlení Hornerova schématu spočívá ve vhodném výběru bodů $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbf{T}$, ve kterých hodnoty polynomu f počítáme. Pokud předpkládáme, že $n = 2k$ je sudé číslo, pak můžeme polynom $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ napsat ve tvaru

$$f(x) = g(x^2) + xh(x^2),$$

kde

$$g(y) = a_0 + a_2y + a_4y^2 + \cdots + a_{n-2}y^{k-1}$$

a

$$h(y) = a_1 + a_3y + a_5y^2 + \cdots + a_{n-1}y^{k-1}.$$

Oba polynomy g, h mají poloviční stupeň oproti polynomu f, počítáme ale jejich hodnoty stále v n bodech $x_0^2, \ldots, x_{n-1}^2$ a protože polynomy jsou dva, žádné snížení počtu násobení zatím není vidět. Pokud ale navíc předpokládáme, že body $x_0, \ldots, x_{n-1}$ jsou zvolené *symetricky*, tj. že platí

$$x_{k+i} = -x_i$$

pro $i = 0, 1, \ldots, k-1$, tak vidíme, že jsme nejenom snížili stupeň obou polynomů na polovinu, ale rovněž jsme snížili na polovinu počet bodů, ve kterých musíme počítat hodnoty obou polynomů. To už vede k podstatnému snížení počtu potřebných algebraických operací, jak ukazuje následující tvrzení.

Tvrzení 12.1 *Předpokládáme, že* $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$ *je polynom stupně* $n-1$ *s koeficienty v tělese* $\mathbf{T}$*, číslo* $n = 2k$ *je sudé, a prvky* $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbf{T}$ *splňují podmínku* $x_{k+i} = -x_i$ *pro* $i = 0, 1, \ldots, k-1$*. Označíme-li* $C(n)$ *počet operací, které jsou třeba k výpočtu hodnot nějakého polynomu v* n *bodech* $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$*, pak*

$$C(1) = 0, \quad \text{a} \quad C(n) = 2 \cdot C(\frac{n}{2}) + 4 \cdot \frac{n}{2}.$$

Důkaz. Protože platí $x_{k+i}^2 = x_i^2$ pro $i = 0, \ldots, k-1$, potřebujeme spočítat hodnoty polynomů g, h pouze v $k = n/2$ bodech. To vyžaduje celkem $2 \cdot C(n/2)$ operací. Kromě toho potřebujeme $n/2$ násobení pro výpočet čtverců x_i^2 pro $i = 0, 1, \ldots, n/2 - 1$. Dále $n/2$ násobení, $n/2$ sčítání a $n/2$ odčítání, abychom zkombinovali hodnoty $g(x_i^2)$ a $h(x_i^2)$ do hodnot $f(x_i)$ pro $i = 0, 1, \ldots, n-1$. □

Vhodná volba evaluačních bodů je popsána v následující definici.

Definice 12.2 *Prvek* ω *tělesa* $\mathbf{T}$ *se nazývá* primitivní *n-tá odmocnina z* 1*, pokud* $\omega^n = 1 (= \omega^0)$ *a mocniny*

$$\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$$

jsou navzájem různé. Množina prvků $\{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\}$ *se nazývá* Fourierovy body*. Evaluační transformace* $T_{1,\omega,\ldots,\omega^{n-1}}$ *ve Fourierových bodech* $1 = \omega^0, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ *se nazývá* diskrétní Fourierova transformace (DFT).

Příklad 12.3 *1.Prvek*

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + \imath \sin 2\pi n$$

je primitivní n-tá odmocnina z 1 *v tělese komplexních čísel* $\mathbf{C}$*, jak vyplývá z Moivreovy věty. Fourierovy body*

$$\omega^k = \cos\frac{k\cdot 2\pi}{n} + \imath \sin k\cdot 2\pi n, \quad k = 0,1,\ldots,n-1$$

tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníka vepsaného do jednotkové kružnice tak, aby bod $(1,0)$ *byl jedním z vrcholů tohoto n-úhelníka.*

2. V konečném tělese $\mathbf{Z}_{17}$ *je prvek $\omega = 4$ primitivní čtvrtou odmocninou z* 1*, neboť v tomto tělese platí* $4^4 = 256 = 1 \bmod 17$ *a mocniny*

$$4^1 = 4, \quad 4^2 = 16, \quad 4^3 = 13$$

jsou navzájem různé. Vandermondova matice

$$V_{1,4,16,13} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 & 13 \\ 1 & 16 & 1 & 16 \\ 1 & 13 & 16 & 4 \end{pmatrix}$$

popisuje diskrétní Fourierovu transformaci $T_{1,4,16,13}$.

3. V tělese $\mathbf{Z}_{41}$ *je číslo* 14 *primitivní osmou odmocninou z* 1*, odpovídající Fourierovy body jsou* $1, 14, -9, -3, -1, -14, 9, 3$.

Je-li $\omega \in \mathbf{T}$ primitivní n-tá odmocnina z 1 pro sudé $n = 2k$, pak n Fourierových bodů $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ splňuje podmínku

$$(\omega^{k+i})^2 = \omega^{2k+2i} = \omega^{n+2i} = \omega^n \omega^{2i} = 1\cdot(\omega^i)^2 = (\omega^i)^2.$$

pro $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Navíc je očividně ω^2 primitivní $(n/2)$-tá odmocnina z 1 a v případě, že $n = 4l$ splňuje $k = n/2$ sudých mocnin $1, \omega^2, \omega^4, \cdots, \omega^{2k-1}$, také stejnou podmínku symetrie

$$((\omega^2)^{l+i}))^2 = \omega^{4l+4i} = \omega^{4i} = ((\omega^2)^i)^2.$$

K výpočtu hodnot polynomů g, h v $n/2$ bodech ω_i^2, $i = 0, 1, \ldots, k = n/2$ můžeme použít stejný trik s výpočtem hodnot 4 polynomů ve $l = n/4$ bodech. A tak dále.

Pokud je tedy $n = 2^m$ a $\omega \in \mathbf{T}$ primitivní n-tá odmocnina z 1, můžeme rekurzivně spočítat hodnotu diskrétní Fourierovy transformace $T_{1,\omega,\ldots,\omega^{n-1}}$. Tomuto výpočtu se říká *rychlá Fourierova transformace (FFT)*. Následující výpočet ukazuje, jak moc FFT zrychluje výpočet hodnoty polynomu v $n = 2^m$ bodech.

Tvrzení 12.4 *Je-li $n = 2^m$ a $\omega \in \mathbf{T}$ primitivní n-tá odmocnina z 1, pak FFT vyžaduje*

$$C(n) = 2 \cdot n \cdot \log_2 n$$

aritmetických operací.

Důkaz. Opakovaným použitím Tvrzení 12.1 dostaneme

$$\begin{aligned}
C(n) = C(2^m) &= 2 \cdot C(2^{m-1}) + 4 \cdot 2^{m-1} = \\
&= 2(2 \cdot C(2^{m-2}) + 4 \cdot 2^{m-2}) + 4 \cdot 2^{m-1} = \\
&= 2^2 \cdot C(2^{m-2}) + 2 \cdot 4 \cdot 2^{m-1} = \\
&= 2^3 \cdot C(2^{m-3}) + 3 \cdot 4 \cdot 2^{m-1} = \\
&\vdots \\
&= 2^m \cdot C(1) + m \cdot 4 \cdot 2^{m-1} = \\
&= \log_2 n \cdot 4 \cdot \frac{n}{2} = \\
&= 2 \cdot n \cdot \log_2 n.
\end{aligned}$$

□

Diskrétní Fourierova transformace a její spojitá verze nazývaná prostě Fourierova transformace jsou hojně používány v elektrotechnice, jedno využití spočívá v odstraňování šumu v signálech. V počítačové algebře je rychlá Fourierova transformace používána v systémech pro symbolickou manipulaci k násobení polynomů velkého stupně.

K tomu potřebujeme znát inverzní diskrétní Fourierovu transformaci, pomocí které ze znalosti hodnoty polynomu v $n = 2^m$ bodech spočítáme jeho koeficienty. Tato inverzní diskrétní Fourierova transformace

$$T^{-1}_{1,\omega,\cdots,\omega^{n-1}}$$

odpovídá výpočtu inverzní matice $V^{-1}_{1,\omega,\cdots,\omega^{n-1}}$ k matici $V_{1,\omega,\cdots,\omega^{n-1}}$. Lze ukázat, že

$$V^{-1}_{1,\omega,\cdots,\omega^{n-1}} = n^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \cdots & \omega^{-(n-1)} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \cdots & \omega^{-2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{-(n-1)} & \omega^{-2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Protože $\omega^{-1} \in \mathbf{T}$ je rovněž primitivní n-tá odmocnina z 1, můžeme pro výpočet inverzní diskrétní Fourierovy transformace rovněž použít rychlou Fourierovu transformaci.

Rychlou Fourierovu transformaci poprvé uveřejnili pánové J.W. Cooley a J.W. Tuckey v roce 1965 a od té doby se stala jedním z nejpoužívanějších algoritmů.

Vyhledávač Google

Popularita vyhledávač Google spočívá také v tom, že uspořádá vyhledané stránky k danému dotazu podle "důležitosti". Ukážeme si, jak je tato "důležitost" jednotlivých webových stránek definována a jak ji lze vypočítat.

Řekneme, že *důležitost nějaké webové stránky je přímu úměrná součtu důležitostí stránek, které na ni odkazují.* To na první pohled vypadá na definici kruhem. Zkusíme ji ale vyjádřit matematicky. Označíme x_i důležitost i-té webové stránky pro $i = 1, 2, \ldots, N$, kde N je celkový počet webových stránek, které bereme v úvahu. Dále ještě potřebujeme nějak zachytit strukturu vzájemných odkazů mezi jednotlivými stránkami. Pokud j-tá stránka odkazuje na i-tou stránku, tak napíšeme, že

$$a_{ij} = 1.$$

V opačném případě, tj. pokud j-tá stránka odkazuje na i-tou stránku, položíme

$$a_{ij} = 0.$$

Struktura vzájemných odkazů mezi jednotlivými webovými stránkami je tak popsána pomocí čtvercové matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ řádu N. Tuto matice můžeme nazvat *matice incidence webu.*

Je-li K konstanta přímé úměrnosti použitá v neformální definici důležitosti i-té stránky, pak můžeme tuto definici formalizovat následovně:

$$x_i = K \cdot \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Přepsáním dostaneme

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j = \frac{1}{K} \cdot x_i \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Označíme $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T$ vektor důležitostí jednotlivých stránek, pak poslední rovnost zapíšeme ve tvaru

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \frac{1}{K}\mathbf{x}.$$

Vidíme tedy, že koeficient přímé úměrnosti K je převrácenou hodnotou nějakého vlastního čísla matice $\mathbf{A}$ (matice incidence webu) a vektor důležitostí $\mathbf{x}$ je vlastním vektorem příslušným tomuto vlastnímu číslu.

Matice incidence webu $\mathbf{A}$ má N (komplexních) vlastních čísel a ke každému vlastnímu číslu existuje nekonečně mnoho nenulových odpovídajících vlastních vektorů. Potřebujeme proto nějak vybrat vhodné vlastní číslo matice $\mathbf{A}$, nejlépe tak, aby bylo kladné reálné, a k němu najít vhodný vlastní vektor, opět by bylo nejlepší, aby to byl vektor s kladnými reálnými souřadnicemi, nebo aspoň s nezápornými.

V tomto místě nastupuje *Perronova-Frobeniova teorie nezáporných matic.* Jako první si uvedeme definici spektrálního poloměru matice.

Definice 12.5 *Je-li* $\mathbf{B}$ *čtvercová komplexní matice, pak číslo*

$$\rho(\mathbf{A}) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\mathbf{B})\}$$

nazýváme spektrální poloměr *matice* $\mathbf{B}$. *Kružnici se středem v počátku a poloměrem* $\rho(\mathbf{B})$ *nazýváme* spektrální kružnice *matice* $\mathbf{B}$.

Spektrální poloměr každé čtvercové komplexní matice je tedy nezáporné reálné číslo. Takovým maticím říkáme *kladná (pozitivní) matice.* Pokud jsou všechny prvky matice nezáporná reálná čísla, pak mluvíme o *nezáporné matici.* Matice, jejichž prvky jsou kladná reálná čísla, mají následující důležitou vlastnost.

Věta 12.6 *Pro pozitivní čtvercovou matici* $\mathbf{B}$ *řádu* n *platí*

1. $\rho(\mathbf{B}) \in \sigma(\mathbf{B})$,
2. *pokud je* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *vlastní vektor matice* $\mathbf{B}$ *příslušný vlastnímu číslu* $\rho(\mathbf{B})$, *pak jsou buď všechny souřadnice vektoru* $\mathbf{x}$ *kladné a nebo jsou všechny souřadnice vektoru* $\mathbf{x}$ *záporné,*
3. *algebraická násobnost vlastního čísla* $\rho(\mathbf{B})$ *je* 1,
4. *dimenze prostoru* $\mathcal{N}(\mathbf{B}-\rho(\mathbf{B})\mathbf{I}_n)$ *se rovná* 1, *tj. každý nenulový vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu* $\rho(\mathbf{B})$ *je reálným násobkem libovolného jiného nenulového vlastního vektoru příslušného k témuž vlastnímu číslu.*

Z těchto vlastností vyplývá existence jednoznačně určeného *kladného* vlastního vektoru $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^T$ odpovídajícího spektrálnímu poloměru $\rho(\mathbf{B})$, pro který platí $p_i > 0$ pro každé $i = 1, \dots, n$ a dále

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

Tento jednoznačně určený kladný vlastní vektor nazýváme *Perronův vektor* kladné matice $\mathbf{B}$ a vlastní číslo $\rho(\mathbf{B})$ nazýváme *Perronův kořen* matice $\mathbf{B}$.

Perronův kořen a vektor nemůžeme přímo využít k výpočtu vektoru důležitosti webových stránek, protože matice incidence webu není kladná, je pouze nezáporná. Proto musíme použít následující zesílení předchozí věty, kterému se říká *Perronova-Frobeniova věta.*

Věta 12.7 *Je-li* $\mathbf{B}$ *nezáporná čtvercová matice řádu* n*, pro kterou platí, že* $\mathbf{B}^M$ *je kladná matice pro dostatečně velký exponent* M*, pak platí*

1. $\rho(\mathbf{B}) \in \sigma(\mathbf{B})$,
2. *pokud je* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *vlastní vektor matice* $\mathbf{B}$ *příslušný vlastnímu číslu* $\rho(\mathbf{B})$*, pak jsou buď všechny souřadnice vektoru* $\mathbf{x}$ *kladné a nebo jsou všechny souřadnice vektoru* $\mathbf{x}$ *záporné,*
3. *algebraická násobnost vlastního čísla* $\rho(\mathbf{B})$ *je* 1*,*
4. *dimenze prostoru* $\mathcal{N}(\mathbf{B}-\rho(\mathbf{B})\mathbf{I}_n)$ *se rovná* 1*, tj. každý nenulový vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu* $\rho(\mathbf{B})$ *je reálným násobkem libovolného jiného nenulového vlastního vektoru příslušného k témuž vlastnímu číslu.*

Také v případě nezáporných matic take existuje jednoznačně určený vlastní (Perronův) vektor $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^T$ odpovídajícího spektrálnímu poloměru $\rho(\mathbf{B})$, pro který platí $p_i > 0$ pro každé $i = 1, \dots, n$ a dále

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

Matice incidence webu $\mathbf{A}$ je sice nezáporná, s velkou pravděpodobností ale nesplňuje druhý z předpokladů Perronovy-Frobeniovy věty, totiž že $\mathbf{A}^M$ je kladná matice pro dostatečně velký exponent M. Toto už je ale drobný problém.

Tato idea porovnávání významu lidí nebo věcí na základě vlivu, který na sebe vzájemně mají, má mnoho nejrůznějších aplikací ve statistice i v dalších oborech. Anglicky se jí říká *Kendall-Wei theory of ranking* a pochází z padesátých let minulého století.

Soustavy obyčejných lineárních diferenciálních rovnic

Soustavou obzčejných lineárních diferenciálních rovnic s konstatními koeficienty rozumíme soustavu rovnic následujícího tvaru.

$$u_1' = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \cdots + a_{1n}u_n,$$

$$\begin{aligned} u_2' &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{2n}u_n, \\ &\vdots \\ u_n' &= a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \cdots + a_{nn}u_n, \end{aligned}$$

spolu s *počátečními podmínkami*

$$\begin{aligned} u_1(0) &= c_1, \\ u_2(0) &= c_2, \\ &\vdots \\ u_n(0) &= c_n. \end{aligned}$$

Předpokládáme, že matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je reálná matice, funkce $u_i = u_i(t)$ jsou reálné funkce reálné proměnné a c_i jsou reálná čísla pro $i = 1, \ldots, n$. Označíme-li $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T$ a $\mathbf{u} = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$, můžeme soustavu zapsat v maticovém tvaru

$$\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}, \quad \text{a} \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{c}.$$

V úvodu předchozí kapitoly jsme si řekli, že jedna obyčejná diferenciální rovnice $u'(t) = \alpha u(t)$ s počáteční podmínkou $u(0) = c$ má jednoznačně určené řešení $u(t) = c \cdot e^{\alpha t}$. Můžeme se proto pokusit najít analogický vzorec pro řešení soustavy o n neznámých funkcích.

Pokud je matice $\mathbf{A}$ diagonalizovatelná a

$$\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{E}_1 + \cdots + \lambda_k\mathbf{E}_k$$

je její spektrální rozklad podle Věty 11.15, můžeme se pokusit definovat matici funkcí reálné proměnné t jako

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\lambda_1 t}\mathbf{E}_1 + \cdots + e^{\lambda_k t}\mathbf{E}_k.$$

Matici funkcí reálné proměnné můžeme derivovat tak, že derivujeme každou funkci zvlášť. Takto definovaná matice reálných funkcí má následující vlastnosti.

Tvrzení 12.8 *Je-li* $\mathbf{A}$ *diagonalizovatelná matice řádu* n *a*

$$\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{E}_1 + \cdots + \lambda_k\mathbf{E}_k$$

její spektrální rozklad, pak matice funkcí

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\lambda_1 t}\mathbf{E}_1 + \cdots + e^{\lambda_k t}\mathbf{E}_k.$$

má následující vlastnosti

$$\begin{aligned} \frac{d\,e^{\mathbf{A}t}}{d\,t} &= \mathbf{A}\cdot e^{\mathbf{A}t}, \\ \mathbf{A}\cdot e^{\mathbf{A}t} &= e^{\mathbf{A}t}\cdot\mathbf{A}, \\ e^{-\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}t} &= e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t} = \mathbf{I}_n, \\ \mathbf{I}_n &= e^{\mathbf{0}}. \end{aligned}$$

Dále vektor funkcí $\mathbf{u} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}$ *je* jediným *řešením soustavy obyčejných lineárních rovnic* $\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}$ *s počátečními podmínkami* $u_i(0) = c_i$ *pro* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Důkaz. Abychom dokázali první rovnost, dosadíme za $e^{\mathbf{A}t}$ podle definice. Dostaneme

$$\frac{d\,e^{\mathbf{A}t}}{d\,t} = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i e^{\lambda_i t}\mathbf{E}_i = (\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mathbf{E}_i)(\sum_{i=1}^{k}e^{\lambda_i t}\mathbf{E}_i) = \mathbf{A}\cdot e^{\mathbf{A}t}.$$

V důkazu druhé rovnosti postupujeme podobně.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\cdot e^{\mathbf{A}t} &= (\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mathbf{E}_i)(\sum_{j=1}^{k}e^{\lambda_j t}\mathbf{E}_j) = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i e^{\lambda_i t}\mathbf{E}_i\mathbf{E}_i = \\ &= (\sum_{j=1}^{k}e^{\lambda_j t}\mathbf{E}_j)(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mathbf{E}_i) = e^{\mathbf{A}t}\cdot\mathbf{A}. \end{aligned}$$

Také třetí rovnost dokážeme analogicky.

$$\begin{aligned} e^{-\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}t} &= (\sum_{i=1}^{k}\lambda_i e^{-\lambda_i t}\mathbf{E}_i)(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j e^{\lambda_j t}\mathbf{E}_j) = \sum_{i=1}^{k}e^{-\lambda_i t}e^{\lambda_i t}\mathbf{E}_i^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{k}\mathbf{E}_i = \mathbf{I}_n = (\sum_{j=1}^{k}\lambda_j e^{\lambda_j t}\mathbf{E}_j)(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i e^{-\lambda_i t}\mathbf{E}_i) = e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t}. \end{aligned}$$

Poslední, čtvrtá rovnost vyplývá ihned přímo z definice $e^{\mathbf{A}t}$ a vlastností spektrálních projektorů $\mathbf{E}_i$.

$$e^{\mathbf{0}} = \sum_{i=1}^{k}e^{0}\mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^{k}\mathbf{E}_i = \mathbf{I}_n.$$

Z první rovnosti ihned dostaneme, že vektor funkcí

$$\mathbf{u} = \mathbf{c} \cdot e^{\mathbf{A}t}$$

je řešením soustavy $\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}$, $\mathbf{u}(0) = \mathbf{c}$.

Je-li nějaký další vektor funkcí $\mathbf{v}(t)$ řešením téže soustavy, tj. platí-li $\mathbf{v}' = \mathbf{A}\mathbf{v}$ a $\mathbf{v}(0) = \mathbf{c}$, spočítáme napřed

$$e^{-\mathbf{A}\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{k} e^{-\lambda_i t}\mathbf{E}_i\mathbf{v}.$$

Odtud dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{d\,(e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{v})}{d\,t} &= -\sum_{i=1}^{k}\lambda_i e^{-\lambda_i t}\mathbf{E}_i\mathbf{v} + \sum_{i=1}^{k} e^{-\lambda_i t}\mathbf{E}_i\mathbf{v}' = -\mathbf{A}\cdot e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{v} + e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{v}' = \\ &= -e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A}\mathbf{v} + e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{v}' = e^{-\mathbf{A}t}(-\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{v}') = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Odtud plyne, že všechny funkce v $e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{v}$ jsou konstantní. V bodě $t = 0$ mají hodnoty

$$e^{\mathbf{0}}\mathbf{v}(0) = \mathbf{I}_n\mathbf{c} = \mathbf{c},$$

a tedy $e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{v} = \mathbf{c}$. Vynásobíme poslední rovnost zleva maticí $e^{\mathbf{A}t}$ a dostaneme

$$\mathbf{v} = e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{v} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c} = \mathbf{u}.$$

Tím je dokázána jednoznačnost řešení $\mathbf{u} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}$. $\square$

Mnoho fyzikálních nebo biologických procesů lze modelovat pomocí soustavy diferenciálních rovnic $\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}$, $\mathbf{u}(0) = \mathbf{c}$. Ukážeme si jeden příklad.

Úloha 12.1 *V čase $t = 0$ vstříkneme do buňky číslo 1 jednotkové množství nějaké látky (léku). Látka se šíří z buňky číslo 1 do buňky číslo 2 buněčnou membránou. Předpokládáme, že rychlost šíření látky z buňky 1 do buňky 2 je přímo úměrná její koncentraci v buňce 1. Koeficient přímé úměrnosti označíme α. Stejně tak předpokládáme, že rychlost šíření látky z buňky 2 do buňky 1 je přímo úmerná koncentraci této látky v buňce 2, koeficient přímé úměrnosti označíme β. Z fyzikálního významu koeficientů α, β vyplývá předpoklad $\alpha, \beta > 0$. Určete koncentrace látky v obou buňkách v libovolném čase $t > 0$.*

Řešení. Označíme koncentraci látky v první buňce v čase t jako $u_1(t)$. Podobně $u_2(t)$ označuje koncentraci látky v druhé buňce. Z uvedených předpokladů vyplývají následující rovnice pro funkce $u_1(t)$ a $u_2(t)$

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= \beta u_2(t) - \alpha u_1(t), \\ u_2'(t) &= \alpha u_1(t) - \beta u_2(t), \end{aligned}$$

a počáteční podmínky $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = 0$.

V maticovém tvaru soustavu zapíšeme jako $\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}$ a $\mathbf{u}(0) = \mathbf{c}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \text{a} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podle předchozího Tvrzení 12.8 můžeme zapsat řešení ve tvaru $\mathbf{u} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}$.

Matice $\mathbf{A}$ má charakteristickou rovnici tvaru

$$(-\alpha - \lambda)(-\beta - \lambda) - \alpha\beta = \lambda^2 + (\alpha + \beta)\lambda = 0.$$

Vlastní hodnoty matice $\mathbf{A}$ jsou proto $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = -(\alpha + \beta)$. Protože jsou vlastní hodnoty různé, je matice $\mathbf{A}$ diagonalizovatelná podle Tvrzení 11.13.

Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu λ_1 dostaneme jako řešení homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí

$$\mathbf{A} - 0\mathbf{I}_2 = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix},$$

která má řešení ve tvaru násobků vektoru $(\beta, \alpha)^T$.

Podobně najdeme vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $\lambda_2 = -(\alpha+\beta)$ jako řešení homogenní soustavy lineárních rovnic s maticcí

$$\mathbf{A} + (\alpha + \beta)\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix},$$

která má řešení ve tvaru násobků vektoru $(1, -1)^T$.

Podle důkazu Spektrální věty pro diagonalizovatelné matice 11.15 můžeme k výpočtu spektrálních projektorů $\mathbf{E}_1$ a $\mathbf{E}_2$ použít regulární matici

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}.$$

Spočítáme inverzní matici

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha+\beta} & \frac{1}{\alpha+\beta} \\ \frac{\alpha}{\alpha+\beta} & -\frac{\beta}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}$$

a matice

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\beta}{\alpha+\beta} \\ \frac{\alpha}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}.$$

Podobně

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{P}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Proto

$$e^{\mathbf{A}t} = \frac{1}{\alpha+\beta}\left[e^{0t}\begin{pmatrix} \beta & \beta \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} + e^{-(\alpha+\beta)t}\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\alpha & \beta \end{pmatrix}\right]$$

a tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{\alpha+\beta}\left[\begin{pmatrix} \beta & \beta \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} + e^{-(\alpha+\beta)t}\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\alpha & \beta \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)t} \\ \frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Limita pro $t \to \infty$ se pak rovná

$$\lim_{t\to\infty} u_1(t) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}, \quad \lim_{t\to\infty} u_2(t) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

□

Filtry odstraňující šum

V závěru předchozí kapitoly jsme si ukázali rozklad matice $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T$, kde $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ jsou ortogonální matice, a

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{r\times r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

pro regulární matici $\mathbf{D}_{r\times r}$ řádu r. Tento rozklad je užitečný při odstraňování šumu v nějakých datech. Předpokládáme, že naše data jsou v podobě matice $\mathbf{A}$ tvaru $m \times n$. Napíšeme si její rozklad

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{r\times r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{V}^T = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T,$$

kde $\mathbf{u}_i$ je i-tý sloupec ortogonální matice $\mathbf{U}$ řádu m a $\mathbf{v}_j$ je j-tý sloupec orotogonální matice $\mathbf{V}$ řádu n a $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ jsou singulární hodnoty matice $\mathbf{A}$.

Označíme si $\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^T = \mathbf{Z}_i$ pro $i = 1, \ldots, r$. Podle Příkladu 9.8 předpis

$$< \mathbf{B}|\mathbf{C} >= tr(\mathbf{B}^T\mathbf{C})$$

definuje skalární součin na prostoru $\mathcal{R}^{m\times n}$ reálných matic tvaru $m \times n$.

Spočítáme, že

$$< \mathbf{Z}_i | \mathbf{Z}_i >= 1$$

pro $i = 1, 2, \ldots, r$ a

$$< \mathbf{Z}_i | \mathbf{Z}_j >= 0,$$

pokud $i \neq j$. To znamená, že posloupnost matic $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \ldots, \mathbf{Z}_r$ je ortonormální a vyjádření

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \mathbf{Z}_i$$

je Fourierův rozklad matice $\mathbf{A}$ podle Definice 9.15.

Čím větší je singulární hodnota σ_i, tím větší část našich dat je ve "směru" matice $\mathbf{Z}_i$. Pokud předpokládáme, že šum je v datech obsažen "náhodně", nezávisle na směru, můžeme předpokládat, že v každém směru je přibližně stejné množství šumu. Zvolíme nějaké k. Potom ve výrazu

$$\sigma_{k+1}\mathbf{Z}_{k+1} + \cdots + \sigma_r \mathbf{Z}_r$$

je obsažena poměrně malá část dat a větší část šumu, zatímco ve výrazu

$$\sigma_1 \mathbf{Z}_1 + \cdots \sigma_k \mathbf{Z}_k$$

je obsažena mnohem větší část dat než šumu. To vysvětluje, že pokud místo matice

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \mathbf{Z}_i$$

pracujeme dále s maticí

$$\mathbf{A}' = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{Z}_i$$

bude mít nová matice $\mathbf{A}'$ větší poměr data/šum než původní matice $\mathbf{A}$.

Volba vhodného k závisí na konkrétní aplikaci. Dobrým počátečním krokem je zvolit takové k, aby rozdíl $\sigma_k - \sigma_{k+1}$ byl co největší.

Tato myšlenka odfiltrování šumu z dat se používá například v některých vyhledávačích, ve filtrech odstraňujících spamy, atd.