$$M_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\sup M_2 = 1$ . . . .

$\inf M_2 = 0$: 1. $\forall n \in \mathbb{N}: 0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ ✓

2. nechť $\varepsilon > 0$, chci $n \in \mathbb{N}$, aby $\frac{1}{\sqrt{n}} < 0 + \varepsilon = \varepsilon$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon} \iff \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} \quad /^2$$

$$\iff n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$$

Zvolme $n = \left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2\right] + 1$

Potom $n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$ a

tedy $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$.

najdište supremum $M_4 = \left\{ \frac{r}{r+q},\ r, q \in \mathbb{N} \right\}$

$\sup M_4 = 1$: 1. $\forall r, q \in \mathbb{N}$: $r \le r + q$

$$\frac{r}{r+q} \le 1 \quad \checkmark$$

2. nechť $\varepsilon > 0$, chceme

$r, q \in \mathbb{N}$, aby $\frac{r}{r+q} > 1 - \varepsilon \iff$

$\iff \frac{1}{1-\varepsilon} > \frac{r+q}{r} = 1 + \frac{q}{r} \iff$

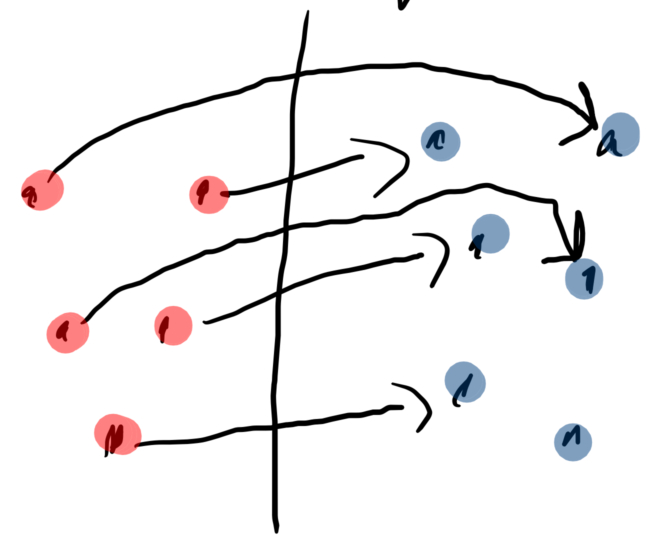
$\frac{1}{1-\varepsilon} - 1 > \frac{q}{r}$, dejme tomu $q = 1$

chceme $\frac{1}{1-\varepsilon} - 1 > \frac{1}{r}$

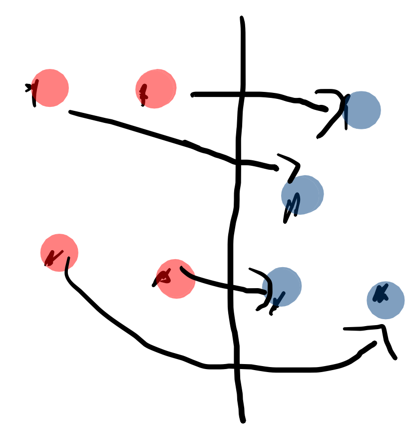
$\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ $\qquad r > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$

Volme $r = \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right] + 1$

Definice: nechť X, Y jsou množiny, řekneme, že $X \preccurlyeq Y$, pokud $\exists f: X \to Y$, která je prostá



Řekneme, že $X \approx Y$, pokud $\exists f: X \to Y$, která je bijekce.



Věta: $X \approx Y \iff (X \preccurlyeq Y \wedge Y \preccurlyeq X)$

Porovnejte mohutnosti množin

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

n	1	2	3	4	5	6	7	$\dots$
$f(n)$	0	1	-1	2	-2	3	-3	

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ je bijekce

$a \in \mathbb{Z}$, $a = 0$, $f(1) = a$

$a < 0$, $f(-2a+1) = a$ $\Rightarrow \mathbb{N} \simeq \mathbb{Z}$

$a > 0$, $f(2a) = a$

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, ukážeme, že $\mathbb{N} \simeq \mathbb{Q}$

$\frac{1}{1}$ [1]	$\frac{1}{2}$ [2]	$\frac{1}{3}$ [4]	$\frac{1}{4}$ [7]
$\frac{2}{1}$ [3]	$\frac{2}{2}$ [5]	$\frac{2}{3}$ [8]	$\frac{2}{4}$
$\frac{3}{1}$ [6]	$\frac{3}{2}$ [9]	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{4}{1}$ [10]	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$

$\simeq$ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je na a prostá

Ekvivalentně: $g: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ prostá

$\Rightarrow \mathbb{Q} \precsim \mathbb{N}$, zároveň $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{N} \precsim \mathbb{Q}$

Věta $\Rightarrow \mathbb{Q} \simeq \mathbb{N}$

• $\mathbb{N}, \mathbb{R}$, jistě $\mathbb{N} \leq \mathbb{R}$

na druhou stranu, $\mathbb{R} \not\leq \mathbb{N}$ $(\mathbb{N} < \mathbb{R})$

<u>Důkaz</u>: TZV. DIAGONÁLNÍ ARGUMENT:

Sporem, nechť $\exists f : (0,1) \to \mathbb{N}$ bijekce

<u>SEZNAM</u>: $1 \longleftrightarrow 0,78345 \ldots\ldots$

$2 \longleftrightarrow 0,38512 \ldots\ldots$

$3 \longleftrightarrow 0,17125 \ldots\ldots$

$4 \longleftrightarrow 0,86231 \ldots\ldots$

$\vdots$

$m = 0,2924$, pak m není na seznamu

$\mathbb{N}, \mathcal{C} \approx 2^{\mathbb{N}}$

- <u>Vícen</u>: $X < \mathcal{P}(X) = 2^X \approx \{f, f : X \to \{0,1\}\}$ $\quad X^Y$

$2^{\mathbb{N}} \sim \mathcal{C} = \{$ posloupnosti 0 a 1 $\}$

$\mathcal{C} = \{ f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$

$x \in \mathcal{C} \iff x = (f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f_n = 0$ nebo $f_n = 1$

$0, 1, 0, 1, 0, 1, 0 \ldots \;\ldots$

$0, 0, 0, 0, 0 \ldots$

$\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

<u>Formální</u>: posloupnost je zobrazení

$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, kde značíme

$a(n) = a_n$

$a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{C} \iff \forall n \in \mathbb{N} \;\; a_n \in \{0,1\}$.

$\mathbb{N} + \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$, $(\mathbb{N} + \mathbb{N}) + \mathbb{N} \approx \mathbb{N} + \mathbb{N} + \mathbb{N}$

(1,1)	(1,2)	(1,3)
(2,1)	(2,2)	(2,3)
(3,1)	(3,2)	(3,3)

$2^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{C} = \{ f : \mathbb{N} \to \{0,1\} \}$,

třeba $f(n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$

$f(1)=0,\ f(2)=0,\ f(3)=0,\ \dots$

$\{f(n)\}_{n=1}^{\infty} = \{0,0,0,\dots\}$

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ sudé} \\ 0, & n \text{ liché} \end{cases}$$

$\{f(n)\}_{n=1}^{\infty} = \{0,1,0,1,0\dots\}$

chci $F : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{C}$ bijekce

nechť $A \subset \mathbb{N}$, chci definovat

$F(A) = \{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $f(n) \in \{0,1\}$

$\mathbb{N} = \{$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\dots\}$
$A \sim$	•		•	•		•		•			

pro $A = \{0,2,3,5,7\}$