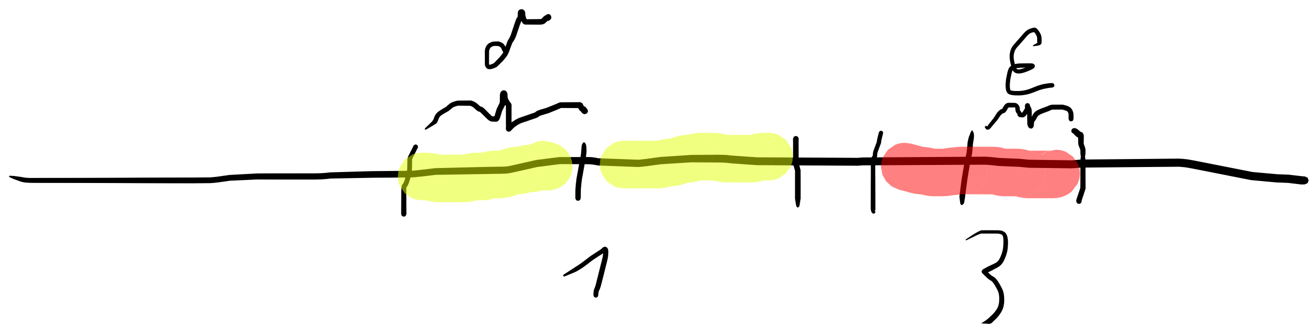
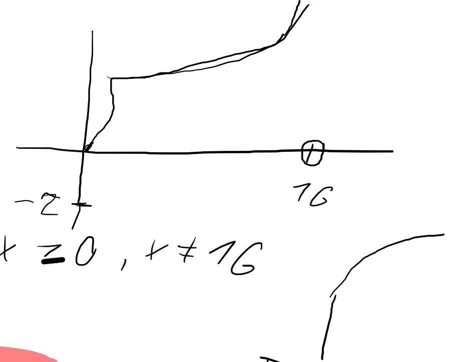
$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in\mathbb{R})$$
$$(0<|x-1|<\delta) \Rightarrow (|x-3|<\varepsilon)$$



Volme $\varepsilon = 1$, pak $\forall \delta>0$ volme $x = 1-\frac{\delta}{2}$. Pak $x<1<2 \Rightarrow |x-\varepsilon| =$
$= |x-1| > 1 = \varepsilon$

$$\exists\, \varepsilon>0\ \forall \delta>0\ \exists\, x\in\mathbb{R}$$
$$(0<|x-1|<\delta)\wedge(|x-1|>\varepsilon)$$

$f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}}$



$y = f(x)$

$y = \frac{2\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}}$, $x \geq 0$, $x \neq 16$

$y(4-\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}$

$4y = 2\sqrt{x} + y\sqrt{x}$ $/^2$ ← !

$16y^2 = 4x + 2\cdot 2 \cdot y\sqrt{x}\sqrt{x} + y^2 x$

$16y^2 = x(4+4y+y^2)$ ← $y = -2$?? nemusí

$x = \frac{16y^2}{4+4y+y^2} = \left(\frac{y}{2+y}\right)^2$

→ pokiaľ $x = \left(\frac{y}{2+y}\right)^2$, potom

$(4y)^2 = (2\sqrt{x} + y\sqrt{x})^2$

pokiaľ $2\sqrt{x} + y\sqrt{x} < 0 \Rightarrow y < -2$

$\Rightarrow 4y < -8$

$\Rightarrow$ $4y$ a $2\sqrt{x} + y\sqrt{x}$ majú rovnaké znamienko pre $y < -2$ alebo $y \geq 0$

$H_f = (-\infty, -2) \cup [0, \infty)$

ALT. ZPŮSOB

$4y = 2\sqrt{x} + y\sqrt{x}$

$4y = \sqrt{x}(2+y)$

$\sqrt{x} = \frac{4y}{2+y}$ $/^2$ → $y = f(x)$

$x = \left(\frac{4y}{2+y}\right)^2$ $\Leftrightarrow$ $\frac{4y}{2+y} \geq 0$

$\Updownarrow$

teda $\underbrace{y \in [0, \infty) \cup (-\infty, -2)}_{H_f}$

$\Rightarrow D_{f^{-1}} = H_f$

$f^{-1}(y) = \left(\frac{4y}{2+y}\right)^2$, $y \in [0, \infty) \cup (-\infty, -2)$

$(1+x)^n \geq (1+nx)\,, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x > -1$

<u>Důkaz</u>: (1.) $n = 1$: $\quad 1+x \geq 1+x \quad \forall x > -1$

✓

(2.) nechť tvrzení platí pro $n = k$

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k \geq (1+x)(1+kx) =$$

$$= 1 + x + kx + \underbrace{kx^2}_{\geq 0}$$

$$\geq 1 + x + kx = (1 + (k+1)x)$$

Tedy tvrzení platí pro $n = k+1$

2. Dokažte, že $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ je iracionální.

<u>Důkaz</u>. Použijeme: $p, q \in \mathbb{N}$ nesoudělná, potom p^2, q^2 jsou nesoudělná.

$(NSD(p,q)=1 \Rightarrow NSD(p^2,q^2)=1)$.

Sporem: nechť $\exists\, p, q \in \mathbb{N}$ nesoudělná, že

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} = \frac{p}{q} \quad /^2$$

$$\underset{\text{rac}}{2} + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + \underset{\text{rac.}}{3} = \frac{p^2}{q^2}\ \text{rac.} \Rightarrow \sqrt{2}\sqrt{3} \text{ je racionální}$$

Tedy $\exists\, r, s \in \mathbb{N}$ nesoudělná, že

$$\sqrt{2}\sqrt{3} = \frac{r}{s} \quad /^2$$

$$6 = \frac{r^2}{s^2} \Rightarrow r^2 \text{ a } s^2 \text{ nejsou nesoudělná}$$

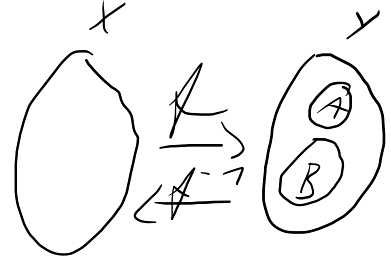
$\Rightarrow r$ a s nejsou nesoudělná

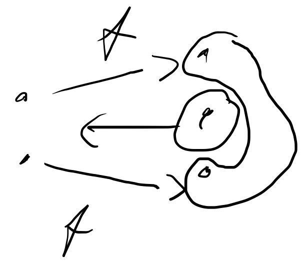
$\Rightarrow$ SPOR!

$\square$

3. nechť X, Y jsou množiny a $A, B \subset Y$ a $f: X \to Y$

je prostá (tj. $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$)





Dokažte $\underbrace{f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)}_{M} = \underbrace{f^{-1}(A \cup B)}_{N}$

Důkaz: ① $M \subset N$:

nechť $x \in M$, tj. $\overset{(*)}{\exists a \in A, \text{ že } f(x) = a} \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$

nebo $\exists b \in B$, že $f(x) = b \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B)$

Dejme souhrn, že $(*)$ platí, pokud

$\exists a \in A \cup B$, že $f(x) = a \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A \cup B) = N$

② $N \subset M$: nechť $x \in N$, tj. $\exists a \in A \cup B$, že $f(x) = a$

Pokud $a \in A$, pak $x \in f^{-1}(A)$

Pokud $a \in B$, pak $x \in f^{-1}(B)$

tedy $x \in M$.

$\vee \sim \cup$

$\wedge \sim \cap$

$\Rightarrow \sim \subset$

$\Leftrightarrow \sim =$

$\underbrace{f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)}_{M} = \underbrace{f^{-1}(A \cup B)}_{N}$

Důkaz:

$x \in M \Leftrightarrow \exists a \in A, f(x) = a \vee \exists b \in B, f(x) = b$

$\Leftrightarrow \exists c \in A \cup B, f(x) = c \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A \cup B) = N$