

1 První cvičení - opakování středoskolské matematiky

Příklady předvedené na cvičení

- Rozhodněte pro jaké $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq \sqrt{x^2 + 3x - 4}.$$

- Znegujte následující výroky a rozhodněte, jestli platí výrok, nebo jeho negace:

$$\begin{aligned} 1. & (\forall x, y \in \mathbb{R})(x^2 + y^2 > 0). \\ 2. & (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{N})[(y \leq x) \wedge (y + 1 > x)] \end{aligned}$$

- Dokažte matematickou indukcí

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2 \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}$$

Příklady na počítání

- Rozhodněte pro jaké $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} \sqrt{x - 2} - \sqrt{x - 5} &= 1 \\ ||x - 3| - 2| &= 1 \\ \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 2) &\geq 0 \end{aligned}$$

Výsledky: 2. $x = 6$ 3. $x \in \{0, 2, 4, 6\}$. 4. $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right) \cup \left(2, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$ a $x^2 - 3x + 2 \leq 1$

- Znegujte následující výroky a rozhodněte, jestli platí výrok, nebo jeho negace:

$$3. (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbf{R})[(0 < |x - 1| < \delta) \Rightarrow (|x - 3| < \varepsilon)]$$

- Dokažte matematickou indukcí

$$\begin{aligned} 2. \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \\ 3. 2^n &\geq n^2 \quad \text{pro všechna } n \geq 4 \\ 4. (1+x)^n &\geq (1+nx) \quad \text{pro všechna } n \in \mathbf{N} \text{ a } x > -1 \end{aligned} \tag{1}$$

Návody:

$$\begin{aligned} 2. \sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^n i^2 + (n+1)^2 \\ 3. 2^{n+1} &\geq 2n^2 \geq (n+1)^2 \\ 4. (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) \geq (1+(n+1)x) \end{aligned}$$

- Mějme zadanou funkci $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}}$. Nalezněte definiční obor D_f , inverzi f^{-1} a obor hodnot H_f .

$$\text{Výsledky: } D_f = [0, \infty) \setminus \{16\}, f^{-1}(y) = \left(\frac{4y}{y+2}\right)^2 \text{ pro } y \in H_f \text{ a } H_f = (-\infty, -2) \cup [0, \infty)$$

2 Druhé cvičení - metody důkazů

1. Dokažte: Pro všechna $x, y \in \mathbf{R}$ platí : a) $|x + y| \leq |x| + |y|$, b) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Návod: a) Bez újmy na obecnosti $x \geq 0$. Pokud $y \geq 0$, tak jistě $x + y \leq x + y$ Pokud $y \leq 0$, tak jistě platí $x + y \leq x - y$ i $-x - y \leq x - y$

2. Dokažte, že $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ je iracionální.

Operace s množinami

3. Necht f je zobrazení z X do Y a $A, B \subset Y$. Dokažte, že

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \text{ a } f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$$

4. Mějme 3 množiny A, B a X . Dokažte

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \text{ a } X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$

5. Necht f je zobrazení z X do Y a $A, B \subset X$. Rozhodněte, zda platí

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \text{ a } f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$$

Návod na 3.b) $x \in f^{-1}(A \setminus B) \Leftrightarrow f(x) \in A \setminus B \Leftrightarrow f(x) \in A \text{ a } f(x) \notin B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \text{ a } x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$

Návod na 4.a) $x \in X \setminus (A \cap B) \Rightarrow (x \in X) \wedge (x \notin A \cap B) \Rightarrow (x \in X) \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \Rightarrow (x \in X \wedge x \notin A) \vee (x \in X \wedge x \notin B) \Rightarrow x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

5. a) platí, b) a c) neplatí - stačí konstantní funkce.

6. Dokažte speciální případ Youngovy nerovnosti, tj. dokažte, že pro všechna $x, y \in [0, \infty)$ platí

$$xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

7. Dokažte binomickou větu, tj. dokažte, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ a pro každá $a, b \in \mathbf{R}$ platí

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Návod: Matematická indukce, využije se vztahu $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

9*. Dokažte tzv. AG nerovnost, tj. že pro všechna $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ platí

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

Návody: 1. Dokazujte matematickou indukci

1. krok: pro $n = 1$

2. krok: z tvrzení pro n plyne tvrzení pro $2n$

3. krok: z tvrzení pro n plyne tvrzení pro $n - 1$

Hint zkuste volit $x_n = \sqrt[n-1]{x_1 \dots x_{n-1}}$

3 Suprema a infima

Najděte suprema a infima následujících množin

$$M_1 = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N} \right\}, \quad M_2 = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad M_3 = \mathbb{Q} \cap [0, 1)$$

$$M_4 = \left\{ \frac{p}{p+q}, p, q \in \mathbf{N} \right\} \quad (*) M_5 = \left\{ \frac{2n+1}{n^2}, n \in \mathbf{N} \right\}$$

Výsledky a návody:

1. $\sup M_1 = 1$: 1. $\forall n \in \mathbf{N} \frac{1}{n} \leq 1$. 2. $\forall \varepsilon > 0$ je $\frac{1}{1} > 1 - \varepsilon$.

2. $\inf M_1 = 0$: 1. $\forall n \in \mathbf{N} \frac{1}{n} \geq 0$. 2. $\forall \varepsilon > 0$ je $\frac{1}{[\frac{1}{\varepsilon}] + 1} < 0 + \varepsilon$.

3. $\sup M_2 = 1$: 1. $\forall n \in \mathbf{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$. 2. $\forall \varepsilon > 0$ je $\frac{1}{\sqrt{1}} > 1 - \varepsilon$.

4. $\inf M_2 = 0$: 1. $\forall n \in \mathbb{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$. 2. $\forall \varepsilon > 0$ je $\frac{1}{[\frac{1}{\varepsilon}] + 1} < 0 + \varepsilon$, tedy k $\varepsilon > 0$ můžeme volit $n = ([\frac{1}{\varepsilon}] + 1)^2$
5. $\sup M_3 = 1$: 1. $\forall q \in M_3 \ q \leq 1$ 2. Je-li $\varepsilon > 0$ najdeme $q \in \mathbb{Q}$, $1 - \varepsilon < q < 1$ (hustota racionálních čísel).
6. $\inf M_3 = 0$: plyne z toho, že $0 \in M_3$ a $\forall q \in M_3 \ q \geq 0$.
7. $\sup M_4 = 1$: 1. $\forall p, q \in \mathbb{N} \frac{p}{p+q} < 1$. 2. Pro $\varepsilon > 0$ volme libovolné $p \in \mathbb{N}$ splňující $\frac{1}{1-\varepsilon} - 1 > \frac{1}{p}$. Potom $\frac{p}{p+1} > 1 - \varepsilon$, a tedy můžeme volit $q = 1$.
8. $\inf M_4 = 0$: 1. $\forall p, q \in \mathbb{N} \frac{p}{p+q} > 0$. 2. Pro $\varepsilon > 0$ volme $q = [\frac{1}{\varepsilon}]$. Pak $\frac{1}{1+q} = \frac{1}{[\frac{1}{\varepsilon}]} \geq \varepsilon$.
9. $\sup M_5 = 3$: $\frac{2+1}{1} = 3$, indukci lze dokázat, že pro $n \geq 3$ je $\frac{2n+1}{n} \leq 1$ a dosazením pro $n = 2$ dostaneme $\frac{2 \cdot 2 + 1}{2^2} = \frac{5}{4} \leq 3$.
10. $\inf M_4 = 0$: 1. $\forall n \in \mathbb{N} \frac{2n+1}{n^2} > 0$. 2. K $\varepsilon > 0$ najdeme $n \in \mathbb{N}$ splňující $3\frac{1}{n} < \varepsilon$, pak jistě $2\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < \varepsilon$, což je ekvivalentní $\frac{2n+1}{n^2} < \varepsilon$.

Teoretický příklad: Mějme $A, B \subset \mathbb{R}$, pro které existují jejich infima a suprema. Co se dá obecně říci o supremech a infimech množin $A \cup B$, $A \cap B$, $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$, $A \setminus B$.

Výsledek:

- $\sup A \cup B = \max\{\sup A, \sup B\}$, $\inf A \cup B = \min\{\inf A, \inf B\}$.
- Pokud $A \cap B \neq \emptyset$, pak $\sup A \cap B \leq \max\{\sup A, \sup B\}$ a $\inf A \cap B \geq \min\{\inf A, \inf B\}$.
- $\sup A + B = \sup A + \sup B$, $\inf A + B = \inf A + \inf B$.
- Pokud $A \setminus B \neq \emptyset$, pak $\sup A \setminus B \leq \sup A$, $\inf A \setminus B \geq \inf A$.

Další teoretický příklad: Necht M je neprázdná množina a $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $g: M \rightarrow \mathbb{R}$. Dokažte, že jsou-li f a g shora omezené, pak

$$\sup(f + g)(M) \leq \sup f(M) + \sup g(M).$$

Najděte M, f, g tak, aby nerovnost byla ostrá.

4 Ještě suprema a infima. Navíc mohutnosti množin

Teoretický příklad na supremum: Mějme $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, je bijekce, která je neklesající, tj. $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$. Ukažte, že pokud $M \subset \mathbb{R}$ je omezená, pak i $f(M)$ je omezená a platí $\sup f(M) \leq f(\sup M)$.

Řešení: Označme $s = \sup M$ a $s_f = \sup f(M)$. Pak jistě $\forall x \in M$ platí $x \leq s$ a tedy $f(x) \leq f(s)$, tedy $f(M)$ je shora omezená a $s_f \leq f(s)$.

Rozšíření pro kroužky: Ukažte, že dokonce f musí být rostoucí, tj. $x < y \implies f(x) < f(y)$. Dále ukažte, že ve skutečnosti $\sup f(M) = f(\sup M)$. Co se dá říct o infimu?

Porovnejte mohutnosti následujících dvojic množin:

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$,
- $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$,
- $2^{\mathbb{N}}, \mathfrak{C} = \{\text{množina všech nekonečných posloupností nul a jedniček}\}$
- $\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}} = \{A, A \subset \mathbb{N}\}$,

- $2^{\mathbb{N}}, \mathbb{R}$,
- $(*)\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{\text{množina všech funkcí } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}, 2^{\mathbb{R}}$,

a na základě těchto porovnání, s využitím transitivity uspořádejte uvedené množiny vzestupně.

Výsledky: $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q} \prec 2^{\mathbb{N}} \approx \mathfrak{C} \approx \mathbb{R} \prec 2^{\mathbb{R}} \approx \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Dokažte následující tvrzení

1. Podmnožina spočetné množiny je spočetná.
2. Je-li X spočetná, pak $X \times X \times \dots \times X$ je spočetná, tj. konečný součin spočetných množin je spočetný.
3. Obraz spočetné množiny v libovolném zobrazení je spočetná množina.
4. Spočetné sjednocení spočetných množin je spočetná množina.
5. $(*)$ Je-li X množina, pak X^{fin} značí množinu všech konečných podmnožin X . Ukažte, že X^{fin} má ostře větší mohutnost, než X právě tehdy, když X je konečná.

Pro zajímavost: Platí dokonce, že je-li X nekonečná množina, potom $\{A \subset X, A \text{ má mohutnost ostře menší než } X\}$ má stejnou mohutnost jako X .

Příklad pro koumáky: Sestrojte nespočetně mnoho podmnožin $\mathbb{N}$ z nichž každé dvě mají konečný průnik.

5 Limity posloupností - aritmetika limit

Spočtete následující limity podle definice:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}$, 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n}$.

Za užití Věty o aritmetice limit spočítejte

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{2n^2-7}$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5+3n-2}{n^5-3n^3+1}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+n-3}{n^3-1}$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right)$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+\dots+a^n}{1+b+\dots+b^n}$ pro $|a| < 1$ a $|b| < 1$
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)^{100} - (n+3)^{100}}{(n+2)^{100} - n^{100}}$

Výsledky a návody: 1. $\frac{1}{2}$; 2. 2; 3. 0 4. 0: $0 \leq \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$ pro $n \geq 4$ 5. $-\frac{1}{2}$; Použijeme $\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}n(n+1)$ 6. $\frac{1}{3}$; Použijeme $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ z prvního cvičení.

$$7. \frac{1+a+\dots+a^n}{1+b+\dots+b^n} = \frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \frac{1-b}{1-a}$$

$$8. \frac{(n+4)^{100} - (n+3)^{100}}{(n+2)^{100} - n^{100}} = \frac{n^{100} + \binom{100}{1} n^{99} 4 + \dots - \left(n^{100} + \binom{100}{1} n^{99} 3 + \dots \right)}{n^{100} + \binom{100}{1} n^{99} 2 + \dots - n^{100}} = \frac{100n^{99} + \dots}{200n^{99} + \dots} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

9. Necht a_n je zadaná posloupnost a $a \in \mathbf{R}$. Dokažte ekvivalenci následujících výroků:

A) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) : |a_n - a| < \varepsilon$

B) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) : |a_n - a| < 2\varepsilon$

6 Limity posloupností - 2 policajtí

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000^n}{n!}$, 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$, 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5}{n^6 + n!}$, 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n+1}$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 4^n}$, 6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}}$ pro $a > b > 0$.

Výsledky a návody:

1. 0; $\frac{1000^n}{n!} \leq \frac{1000^{1001}}{1000!} \frac{1}{n}$ pro $n \geq 1000$

2. 0; $0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n}$

3. 0, $0 \leq \frac{3^n + n^5}{n^6 + n!} \leq \frac{3^n + n^5}{n!} a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{n!} = 0$ opět podle 2 policajtí

$$0 \leq \frac{n^5}{n!} \leq \frac{n^5}{n(n-1) \dots (n-5)} \rightarrow 0; \quad 0 \leq \frac{3^n}{n!} = \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{n} \leq \frac{27}{2n} \rightarrow 0$$

4. 0; $-\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n} \leq \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n+1} \leq \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

5. 4; $\sqrt[n]{4^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 4^n} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 4^n}$

6. $\frac{1}{a}$; $\frac{a}{a^2 \sqrt[n]{2}} = \frac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{2a^{2n}}} \leq \frac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}} \leq \frac{\sqrt[n]{2a^n}}{\sqrt[n]{a^{2n}}} = a \frac{\sqrt[n]{2}}{a^2}$

7. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

A) Existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \Rightarrow$ existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$

B) Existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \Rightarrow$ existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Bonus pro koumáky: Dokažte, že neexistuje limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{\cos(n)}$.

7 Limity posloupností - rozdíly odmocnin

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu (BC) podmínku, platí-li výrok

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0, m \geq n_0) : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Na přednášce bude věta, která tvrdí, že posloupnost splňuje BC podmínku právě tehdy, když má vlastní limitu. My budeme potřebovat pouze jednu z implikací.

Tvrzení Pokud $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nesplňuje BC podmínku, pak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá vlastní limitu.

Spočtěte následující limity:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$, 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$, 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}$,

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, 5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt[2]{n^2 + 1}$, 6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$.

Výsledky a návody:

1. neexistuje; není splněna Bolzanova-Cauchyova podmínka: vol $\varepsilon = 1$, k n_0 vol

$$n = 8n_0 + 2, m = 8n_0 + 6, |a_n - a_m| = \left| \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right| = |1 - (-1)| = 2 > 1 = \varepsilon$$

$$2. \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$3. 3; \quad 3 \leq \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3 \cdot 3^n} = \sqrt[n]{3} \cdot 3 = \sqrt[n]{3} \cdot 3 \text{ a } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = 1 \text{ podle 2 policajtů.}$$

$$4. \text{ neexistuje ; doka\u017ete, \u017ee } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \frac{1}{2} \text{ a } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = -\frac{1}{2}, \text{ pou\u017eijte Tv\u0159en\u00ed.}$$

$$5. 0; \quad \sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt[3]{n^2 + 1} = \sqrt[6]{(n^3 + 1)^2} - \sqrt[6]{(n^2 + 1)^3} \text{ a pou\u017eijte vzorec } (a^6 - b^6) = (a - b)(a^5 + \dots).$$

$$6. 1; \quad \text{za pomoci binomick\u00e9 v\u011bt\u00fd doka\u017ete, \u017ee } 1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{10}{\sqrt[n]{n}} \text{ pro } n \text{ dostate\u010dn\u011b velk\u00e9.}$$

7. Nechť a_n a b_n jsou dvě posloupnosti takové, že existují $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbf{R}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

$$A) A \leq B \Rightarrow \exists n_0 \forall n \geq n_0 : a_n \leq b_n$$

$$B) a_n < b_n \Rightarrow A < B.$$

8. Pro každé $A \in [0, \infty]$ sestrojte posloupnosti $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ a $\{b_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ tak, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \text{ a } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = A$$

Teoretický příklad: Doka\u017ete Tv\u0159en\u00ed uveden\u00e9 na za\u010d\u00e1tku.

P\u0159\u00edklad pro koum\u00e1ky (první \u010d\u00e1st s\u00e9rie na pokračování): Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost spl\u011buj\u00edc\u00ed $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Zkonstruuje posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, aby platilo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty, \quad \text{a z\u00e1rove\u0148} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0.$$

8 Limity posloupností - t\u011b\u017e\u00ed p\u0159\u00edklady

Spo\u010dt\u011bte n\u00e1sleduj\u00edc\u00ed limity

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \sin^2 n} - \sqrt{n - \cos^2 n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} - \sqrt{3^n + 2^n}}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

\u0158e\u0161en\u00ed

$$1. \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{n + \sin^2 n} - \sqrt{n - \cos^2 n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n + \sin^2 n} + \sqrt{n - \cos^2 n}} \cdot \frac{n + \sin^2 n - n + \cos^2 n}{n + 1 - n + 1} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}})}{\sqrt{n}(\sqrt{1 + \frac{\sin^2}{n}} + \sqrt{1 + \frac{\cos^2}{n}})}$$

+ aritmetika limit

$$2. \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} - \sqrt{3^n + 2^n}} = \sqrt[n]{\frac{3^n + 2 \cdot 2^n - 3^n - 2^n}{\sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} + \sqrt{3^n + 2^n}}} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{\sqrt{3^n}}} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{1 + 2 \cdot (\frac{2}{3})^n} + \sqrt{1 + (\frac{2}{3})^n}}}$$

$$+ 2P \text{ na } \sqrt[n]{\sqrt{1 + 2} + \sqrt{1 + 1}} \leq \sqrt[n]{\sqrt{1 + 2 \cdot (\frac{2}{3})^n} + \sqrt{1 + (\frac{2}{3})^n}} \leq 1 \text{ a aritmetika limit.}$$

3. 1

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Teoretický příklad: Dokažte, že

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

a dále, že

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

5. Necht $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ a $A \in [0, \infty]$, dokažte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$. Zde definujeme $\sqrt{\infty} = \infty$.

Příklad pro koumáky (nicméně bez limit): Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost splňující následující tři podmínky

1. $a_1 = 0$
2. $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+2} - a_{n+1} \geq a_{n+1} - a_n$
3. $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} \geq a_n$.

První podmínka spolu s třetí podmínkou implikují, že všechny členy posloupnosti jsou nezáporné. Třetí podmínka znamená, že posloupnost je *neklesající*. Druhá podmínka se dá chápat jako "konvexita" posloupnosti. Říká, že pokud bych si posloupnost nakreslil a jednotlivé body spojil rovnými čarami, výsledek by vypadal jako graf konvexní funkce.

Dokažte, že pro každé $n, m \in \mathbb{N}$ platí $a_n + a_m \leq a_{n+m}$

Hint: Zkuste najít posloupnost α_i splňující $a_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Co tato posloupnost splňuje?

9 Limity posloupností - rekurzivně zadané posloupnosti

Spočtěte následující limity:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, kde $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$ a $a_1 = 10$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, kde $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)$ a $a_1 > 0$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} (\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2})$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{(i+1)^2} \right)$

Výsledky a návody: 1. 5; Ukažte, že a_n je klesající, a pomocí indukce dokažte, že $a_n \geq 5$. Tedy existuje limita. Zlimitíme vztah $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$ a dostaneme $A = 6 - \frac{5}{A}$, a tedy $A = 5$

2. 2; Ukažte, že a_n je rostoucí, a pomocí indukce dokažte, že $a_n \leq 2$. Tedy existuje limita. Zlimitíme vztah $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ a dostaneme $A = \sqrt{2 + A}$, a tedy $A = 2$.

3. 1; Rozlište, jestli $a_1 \geq 1$ nebo $a_1 \leq 1$.

4. 0; $0 \leq \sqrt[n]{n} (\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}) = \frac{\sqrt[n]{n(3-2)}}{\sqrt[n]{3^{n-1} + \sqrt[n]{3^{n-2}} \sqrt[n]{2} + \dots + \sqrt[n]{2^{n-1}}}} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

5. Rozepište $\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{n \cdot 1} \sqrt[n]{(n-1) \cdot 2} \sqrt[n]{(n-2) \cdot 3} \dots$ konec tohoto čísla závisí na paritě n , ale ať už je n sudé, či liché, výraz má alespoň $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ členů s nichž každý je větší než $\sqrt[n]{n}$. Dohromady $\sqrt[n]{n!} \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \sqrt[n]{n} \rightarrow \infty$.

6. Výraz je roven $\frac{1}{2} \frac{n+2}{n+1}$.

7. Necht jsou posloupnosti x_n a y_n divergentní. Je možné říci, že posloupnosti $x_n + y_n$ nebo $x_n y_n$ jsou také divergentní?

8. Necht $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = 0$. Je možné říci, že platí buď $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ nebo $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$?

9*. Necht $a_1 < a_2$ jsou zadané a $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}, n \geq 3$, je rekurentně zadaná. Ukažte, že existuje limita a spočítejte ji.

Výsledky a návody: $9 \cdot \frac{1}{3} (a_1 + 2a_2)$; Dokazte indukcí, že $a_{2k-1} < a_{2k+1} < a_{2k+2} < a_{2k}$ Tedy existuje limita sudých členů a existuje limita lichých členů.

10 Limity funkcí

Spočítejte následující limity:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$,
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}$,
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \lfloor \frac{x}{x} \rfloor$,
- $\lim_{x \rightarrow 0} \lfloor \frac{1}{x} \rfloor x$,
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{1-x}}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$

Výsledky:

- 2; $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)}$,
- $\frac{1}{2}$; $\frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}$, a AL,
- $\frac{4^{20}}{6^{10}}$; $\frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}} = \frac{((x-2)(x+1))^{20}}{((x-2)^2(x+4))^{10}} = \frac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}} \rightarrow \frac{4^{20}}{6^{10}}$,
- 1; $x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$,
- 1; $\frac{1}{x} - 1 \leq \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq \frac{1}{x}$,
- $\frac{2}{3}$;

$$\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{1-x}} = \frac{x+1 - (1-x)}{x+1 - (1-x)} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)(1-x)} + \sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}} \quad (2)$$

a AL.

7. $\frac{n(n+1)}{2}$;

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n-1}{x-1} = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

8. $\frac{49}{24}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{99}+x^{98}+\dots+x^2+x-1)}{(x-1)(x^{49}+x^{48}+\dots+x^2+x-1)} \quad (3)$$

Teoretický příklad: Dokažte, že

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A \ \& \ \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A.$$

Další teoretický příklad: Necht $f: P(0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, kde $\delta > 0$, je neklesající funkce. To znamená, že kdykoli $x, y \in P(0, \delta)$ a $x \leq y$, pak nutně $f(x) \leq f(y)$. Dokažte, že f lze dodefinovat v 0 tak, aby byla spojitá právě tehdy, když $\sup\{f(x), x \in (-\delta, 0)\} = \inf\{f(x), x \in (0, \delta)\}$.

11 Limity funkcí 2

Považujte za známé následující limity:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Spočtete následující limity:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{\log(x+1)}$,
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2-3x+2} \right)$,
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$ pro $m, n \in \mathbb{N}$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+2^x)}{x}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$.
7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n-1}{x^m-1}$, pro $m, n \in \mathbb{N}$

Výsledky a návody:

1. 1; $\frac{\sin x}{\log(x+1)} = \frac{\sin x}{x} \frac{x}{\log(x+1)}$,
2. ∞ ; $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{(x-1)(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)-(x(x-2))}{x(x-2)^2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2+3x-1}{x(x-2)^2(x-1)}$
3. $\frac{nm}{2}(n-m)$; Použijeme binomickou větu. Členy s x^k pro $k > 2$ jdou k nule.

$$\dots = \frac{\binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}mx + \binom{n}{2}(mx)^2 + \dots}{x^2} - \frac{\binom{m}{0}1^m + \binom{m}{1}nx + \binom{m}{2}(nx)^2 + \dots}{x^2}$$

4. $\log 2$; $\log 2 = \frac{\log 2^x}{x} \leq \frac{\log(1+2^x)}{x} \leq \frac{\log(2 \cdot 2^x)}{x} = \frac{\log 2 + x \log 2}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \log 2$

5. $\frac{4}{3}$; $\frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}} \frac{\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos x}} = \frac{\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos x}}{\frac{\sin x}{x} + \frac{1-\cos x}{x^2}} x \rightarrow 0^2 \frac{2}{1+\frac{1}{2}}$

6. $\frac{\alpha}{\beta}; \quad \frac{\sin(\alpha x)}{\sin \beta x} = \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} \frac{\beta x}{\sin(\beta x)} \frac{\beta}{\alpha}.$
7. $\frac{n}{m}; \quad \frac{x^n - 1}{x^m - 1} = \frac{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)}{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1)}.$

8. Dokažte, že Riemannova funkce

$$D(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q} \text{ pro } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ nesoudělná} \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

hint: Nejprve si uvědomte, že toto stačí dokázat pro iracionální čísla na $(0, 1)$. Dále si uvědomte, že na $(0, 1)$ D nabývá hodnoty $1/2$ právě jednou, hodnoty $1/3$ právě dvakrát, hodnoty $1/4$ právě dvakrát (≤ 3). Obecně hodnoty $\frac{1}{q}$ na $(0, 1)$ se nabývá nejvýše $(p-1)$ -krát.

12 Limity funkcí - známé limity

Považujte za známé následující limity:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

0. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{x}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin(x^3)}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\log(1 + \sqrt{x})}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}$

Výsledky a návody:

0. $\frac{1}{144}; \quad \dots = \frac{\sqrt[3]{x-6} - \sqrt[3]{-8}}{x^3+8} = \frac{x+2}{(x+2)(x^2-2x+4)} \frac{1}{(\sqrt[3]{x-6})^2 + \sqrt[3]{x-6}\sqrt[3]{-8} + (\sqrt[3]{-8})^2} \rightarrow \frac{1}{4+4+4} \frac{1}{4+4+4},$
z AL po zkrácení $(x+2)$.

1. $2; \quad = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$

2. $-1; \quad = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \frac{1 - \cos x}{x^2} + \frac{\sin x}{x}}{x \frac{1 - \cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}}$

3. $1; \quad \frac{\log(1 + \sin x)}{\sin x} \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$

4. $1; \quad \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}}}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$

5. $\frac{1}{2}; \quad = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{1}{\cos x} \frac{1}{\frac{\sin x}{x^3}}$

$$6. \quad 1; \quad \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\log(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{\frac{\sin(\arcsin \sqrt{x})}{\arcsin \sqrt{x}}} \cdot \frac{\frac{1}{\log(1+\sqrt{x})}}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1}$$

7.

$$-2; \quad \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3} = -2 \frac{\sin \frac{xe^x - xe^{-x}}{2}}{\frac{xe^x - xe^{-x}}{2}} \frac{\sin \frac{xe^x + xe^{-x}}{2}}{\frac{xe^x + xe^{-x}}{2}} \frac{xe^x - xe^{-x}}{2x^2} \frac{xe^x + xe^{-x}}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -2$$

$$\text{kde jsme použili standartní limity a } \frac{xe^x - xe^{-x}}{2x^2} = \frac{e^x - 1 - (e^{-x} - 1)}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} - \frac{-1}{2}.$$

(4)

Teoretický příklad: Necht $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce. Rozhodněte o platnosti následujících implikací.

1. f, g omezené $\Rightarrow f \cdot g$ omezená
2. f, g shora omezené $\Rightarrow f \cdot g$ shora omezená
3. f, g rostoucí $\Rightarrow f \cdot g$ rostoucí

Teoretický příklad - podstatná singularita v nule

Zkonstruuje funkci $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ takovou, že pro každé $\delta > 0$ jest $f(P(0, \delta)) = \mathbb{R}$ a zároveň f je spojitá v každém bodě $(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Příklad pro koumáky - podstatná singularita všude

Sestrojte funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která každý interval zobrazí na $\mathbb{R}$, tedy pro každé $a < b$ platí $f((a, b)) = \mathbb{R}$.

13 Limity funkcí - složené funkce a exponenciály

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x)^{\frac{1}{3x}},$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n,$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-1} \right)^{\sqrt{n^3+3n^2}},$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} (2e^x - 1)^{\frac{x^2+1}{x}},$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}},$
6. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x},$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(1 + 2^n) \log(1 + \frac{3}{n}).$

Výsledky a návody:

1. $e^{\frac{4}{3}}; \quad (1 + 4x)^{\frac{1}{3x}} = e^{\frac{4}{3} \frac{\log(1+4x)}{4x}}.$
2. $e;$ Dle Heineho... $= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \exp(\frac{1}{x} \log(x + 1)) = e$, dle známých limit a VOLSF(S) (exponenciála je spojitá).
3. $1;$ Podle Heineho $= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^3+3x^2} \log\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}$ a standardně $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x^3+3x^2} \log\left(1 + \frac{x^2}{x^2-1}\right)}{\frac{x^2}{x^2-1}} = 0 \cdot 1 = 0$

$$4. e^2; \quad (2e^x - 1)^{\frac{x^2+1}{x}} = e^{\frac{\log(1+(2e^x-2))}{(2e^x-2)} \cdot \frac{2e^x-2}{2x} (x^2+1)2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} e^{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2}$$

$$5. \frac{2}{3}; \quad \frac{1}{x^2} \log \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x} \right) = \frac{1}{x^2} \frac{\log \left(1 + \frac{1+x2^x}{1+x3^x} - 1 \right)}{\frac{1+x^x}{1+x^3} - 1} = \frac{2^x-3^x}{x} \cdot \frac{1}{1+x3^x}$$

6.

$6.e^{-1}$; Standardně převedeme na exponenciálu.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\log(\tan x)}{\tan x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan(2x)(\tan x - 1) &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\cos x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin x \cos x (\sin x - \cos x)}{(\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} - \frac{2 \sin x}{\cos x + \sin x} \end{aligned} \quad (5)$$

$$7. 3 \log 2; \quad \text{Heine a pak } \frac{\log(1+\frac{3}{x})}{\frac{3}{x}} \rightarrow 1 \text{ a } 2P \text{ na } x \log 2 = \log(2^x) \leq \log(2^x + 1) \leq \log(2 \cdot 2^x) = \log 2 + x \log 2, \text{ tedy } \frac{\log(1+2^x)}{x} \rightarrow \log 2.$$

Teoretický příklad (těžší):

Existuje neklesající funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nespojitá ve všech bodech $\mathbb{Q}$? Existuje neklesající funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nespojitá v nespočetně mnoha bodech?

14 Limity funkcí - další příklady

$$0. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt[3]{x^3 + 7x} - x \right)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\tan x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+\sin x)}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)}{\tan x}$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{2} - 1)$$

Výsledky a návody:

$$1. -\frac{1}{16}; \quad \text{Rozšíříme } \sqrt{x+13} - \sqrt{4(x+1)}$$

$$2. \frac{1}{n}; \quad \text{Rozšíříme podle vzorce } a^n - b^n$$

$$3. \frac{1}{4}; \quad \text{Rozšíříme a } \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$4. \frac{7}{3}; \quad \text{Rozšíř podle } a^3 - b^3.$$

$$5. 1; \quad = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\sin 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\arcsin x}}{\arcsin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1.$$

$$6. 2; \quad \dots = \frac{\log(1+\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} (\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1})$$

$$7. 1 - \sqrt{3}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2 \left(\sin \frac{\pi}{6} \cos x + \cos \frac{\pi}{6} \sin x \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - \sqrt{3} \sin x}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x - \sqrt{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$8. \log 2; \quad \text{použijeme Heineho větu: } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{2} - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} = \log 2.$$

15 Limity funkcí - těžší příklady

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^4 + 2n^3} - \sqrt{n^4 + 1}}\right)^n$
2. $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log(x^2 + e^x)}{\log(x^4 + e^{2x})}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\tan x},$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2\pi\sqrt{n^2 + 1})$
5. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin(\pi x))^{\cotan(\pi x)}$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{x+1}\right)$
1. e ; Heine, převod na exponenciálu a rozšíření $a^2 - b^2$
2. $\frac{1}{2}$; Standardně se zbavíme logaritmu pomocí VOLSF(P) a známých limit, zbyde

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2 + e^x - 1}{x^4 + e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(e^x + 1)(1 + \frac{x^2}{e^x - 1})}{(e^{2x} + 1)(1 + \frac{x^4}{e^{2x} - 1})}$$

Pravé závorky jdou k 1 a ze známých limit a AL, levé závorky standartně rozšíříme $\frac{x}{x}$ a použijeme známé limity.

3.

$$\begin{aligned} 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1 - (e^{\arcsin x} - 1)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\arcsin x} - 1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin 2x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\arcsin x} - 1}{x} \end{aligned} \quad (6)$$

4. 0; $\sin(2\pi\sqrt{n^2 + 1}) - 2\pi n$ a pak Heine.
5. e^{-1} ; standardní převedení na exponenciálu, známé limity a VOLSF(P).
6. $\frac{1}{2}$; Dle VOLSF(P) můžeme počítat limitu $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y}{y-1} \left(\frac{\pi}{4} - \arctan(y)\right)$ - tj "substituce" $y = \frac{x}{x+1}$. Znova dle VOLSF (P) převedeme na $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \tan(\frac{\pi}{4} + z)} (-z)$ - tj. "substituce" $y = \tan(\frac{\pi}{4} + z)$. Dále

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \tan(\frac{\pi}{4} + z)} (-z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{4} + z)}{\cos(\frac{\pi}{4} + z) - \sin(\frac{\pi}{4} + z)} (-z)$$

a použijeme součtové vzorce.

Teoretický příklad

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ a $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Rozhodněte (s důkazem resp. protipříkladem) o následujících implikacích

- (i) Je-li f omezená na M pak na M nabývá extrémů
- (ii) Nabývá-li f na M svých extrémů, pak je omezená
- (iii) Je-li M konečným sjednocením uzavřených intervalů a f je na M spojitá, pak f nabývá na M svých extrémů.
- (iv) Je-li M sjednocením uzavřených intervalů a f je na M spojitá, pak f nabývá na M svých extrémů.
- (v) Je-li M otevřený interval a f je na M spojitá a omezená, pak na M nabývá svých extrémů.

Příklad pro koumáky

Sestrojte $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která je spojitá, ale není monotónní na žádném intervalu.

16 Derivace

Budeme používat známé derivace, jejichž tabulku lze nalézt na stránkách kolegyně Kuncové - zde

Zájemci se mohou pokusit limity tam uvedené spočítat sami. My budeme tyto známé limity pouze aplikovat ve spojení s následujícími "vzorci"

$$\begin{aligned}(f + g)'(t) &= f'(t) + g'(t) \\ (f \cdot g)'(t) &= f'(t)g(t) + f(t)g'(t) \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(t) &= \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{g^2(t)} \\ (f \circ g)'(t) &= f'(g(t))g'(t)\end{aligned}$$

Pamatujte, že tyto vzorce platí pouze za netriviálních předpokladů na funkce f, g , viz. přednáška, T4.2 a T4.3.

Uveďte definiční obory uvedených funkcí a spočítejte jejich derivace všude, kde existují (tj. zejména uveďte definiční obor derivací).

- (1) $x^2 e^{-x^2}$,
- (2) $\log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$,
- (3) Funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná jako $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$ pro $x \neq 0$ a $f(0) = 0$.
- (4) $\log(\log \sin x)$,
- (5) $x^{\log x}$,
- (6) $\arccos(1 - x^2)$,
- (7) x^{x^x}

Důkazy identit pomocí derivací.

- (8) Dokažte, že $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x)$, pro $x \neq 0$
- (9) Dokažte, že $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Výsledky a návody.

- (1) $2xe^{-x^2} + x^2 e^{-x^2}(-2x), D_{f'} = \mathbb{R}$,
- (2) $\frac{4x}{x^4-1}, D_{f'} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$
- (3) $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$ pro $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{h}}\right)}{h} = 0$
- (4) $D_f = \emptyset = D_{f'}$
- (5) $(x^{\log x})' = (e^{\log^2 x})' = x^{\log x} 2 \log x \frac{1}{x}, D_{f'} = (0, \infty)$
- (6) $D_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], D_{f'} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}, f' = \frac{2 \operatorname{sgn} x}{\sqrt{2-x^2}}$ na $D_{f'}$ $f'_+(0) = \sqrt{2}, f'_-(0) = -\sqrt{2}, f'_-(\sqrt{2}) = 0$ a $f'_+(-\sqrt{2}) = -\infty$
- (7) $(x^{x^x})' = (e^{\log x e^{x \log x}})' = x^{x^x} \left(\frac{1}{x} x^x + x^x \log x (\log x + 1)\right), D_{f'} = (0, \infty)$

- (8) Necht $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$, pak $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-1}{x^2} = 0$ a tedy $f(x)$ je konstantní funkce. Z $f(1) = 2 \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$ dostaneme hodnotu konstanty.
- (9) Definujeme $f(x) = \arctan x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Spočítáme $f'(x) = 0, x \in \mathbb{R}$, tedy f je konstantní a nulová (dosazením $x=0$). Výpočet:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}(1 - \frac{x^2}{1+x^2})}{1+x^2} = 0$$

Teoretický příklad. Necht $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (s důkazem, či protipříkladem).

- (i) $\exists f'(0) \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ je v 0 spojitá
- (ii) $\exists f'(0) \in \mathbb{R}^* \Rightarrow f$ je v 0 spojitá
- (iii) f je v 0 spojitá $\Rightarrow \exists f'(0) \in \mathbb{R}$

Další teoretický příklad. Sestrojte funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takovou, že $f'(x)$ existuje pro všechna $x \in \mathbb{R}$, ale f' není spojitá v 0.

Příklad pro koumáky. Uvažujte funkci zadanou posloupností. Konkrétně mějme pro každé $x \in \mathbb{R}$ definovanou posloupnost $f_n(x)$ takovou, že existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Definujme funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Uvědomme si, že $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce. Najděte posloupnosti $f_n(x)$ aby platilo

- (i) funkce $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mají všude derivaci, ale funkce f není spojitá,
- (ii) funkce $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mají všude derivaci, ale funkce f není spojitá v žádném racionálním bodě.

17 Derivace v problematických bodech

Dnes budeme počítat derivace v bodech, kde se nedají dopočítat ze vzorců. To lze dělat buď tak, že se derivace spočítá z definice, a nebo pomocí následujícího tvrzení, jež si dokážete na přednášce v blízké budoucnosti.

Tvrzení: Necht je f spojitá zprava v a a necht existuje $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Potom $f'_+(a) = A$. Obdobně pro derivaci zleva.

Spočtěte derivace, včetně jednostranných, všude, kde existují.

- (1) $f(x) = \arccos(\frac{1-x^2}{1+x^2})$
- (2) $f(x) = x^2 \exp(-|x-1|)$
- (3) $f(x) = \frac{\sin x}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}$
- (4) $f(x) = \max\{\min\{\cos x, \frac{1}{2}\}, -\frac{1}{2}\}$
- (5) $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$
- (6) $f(x) = \arccos \frac{1}{1+x^2}$
- (7) $f(x) = x^2(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x})$ pro $x \neq 0$ a $f(0) = 0$.

Výsledky a návody (detailnější návody jsou k dispozici u doktora Bouchaly zde, cv. 22 u MA1):

- (1) $D_f = \mathbb{R}$, ale v 0 je problém. Pro $x \neq 0$ derivujeme dle známých vzorců a dostaneme

$$f'(x) = \frac{2|x|}{x^3+x},$$

v nule použijeme tvrzení a dostaneme

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2|x|}{x^3+x} = 2,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2|x|}{x^3+x} = -2$$

Tedy $f'(0)$ neexistuje.

- (2) $D_f = \mathbb{R}$. Pro $x > 1$ jest

$$f'(x) = -e^{1-x}x(x-2)$$

a pro $x < 1$ jest

$$f'(x) = e^{1-x}x(x+2).$$

Z tvrzení máme

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -e^{1-x}x(x-2) = 1$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{1-x}x(x+2) = 3,$$

Tedy $f'(1)$ neexistuje.

- (3) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Všude na D_f lze derivovat za použití známých vzorců, výjde

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{(\sin x + \cos x)^2}.$$

K úpravám je zapotřebí součtových vzorců.

- (4) $D_f = \mathbb{R}$, přičemž na $\{(\frac{1}{3}\pi + 2k\pi, \frac{2}{3}\pi + 2k\pi) \cup (\frac{-2}{3}\pi + 2k\pi, \frac{-1}{3}\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$ jest $f(x) = \cos(x)$ a tedy $f'(x) = -\sin(x)$. Na zbytku def. oboru je f konstantní buď $\frac{1}{2}$, nebo $-\frac{1}{2}$, každopádně $f'(x) = 0$. Je třeba vyhodnotit chování ve čtyřech typech problémových bodů. Dle tvrzení platí například

$$f'_+(\frac{1}{3}\pi + 2k\pi) = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{3}\pi + 2k\pi)^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{3}\pi + 2k\pi)^+} -\sin(x) = \sin(\frac{1}{3}\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

a

$$f'_-(\frac{1}{3}\pi + 2k\pi) = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{3}\pi + 2k\pi)^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{3}\pi + 2k\pi)^-} (\frac{1}{2})' = 0.$$

Zbytek zcela obdobně

$$f'_+(\frac{2}{3}\pi + 2k\pi) = 0$$

$$f'_-(\frac{2}{3}\pi + 2k\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'_+(\frac{-2}{3}\pi + 2k\pi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'_-(\frac{-2}{3}\pi + 2k\pi) = 0$$

$$f'_+(\frac{-1}{3}\pi + 2k\pi) = 0$$

$$f'_-(\frac{-1}{3}\pi + 2k\pi) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- (5) $D_f = \mathbb{R}$ ale 1 je problematická, neboť $\sqrt{\cdot}$ má v nule pouze jednostrannou derivaci nekonečno. Jest

$$f'(x) = \frac{e^{-x^2}x}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}.$$

Jednostranné limity v 1 dopočítáme z tvrzení

$$f'_+(0) = 1; \quad f'_-(0) = 0$$

(6) $D_f = \mathbb{R}$ a 0 je problémový bod, pro $x \neq 0$ platí

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)\sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{(x^2 + 1)^2}}}}$$

V jedničce po úpravě a aplikaci tvrzení (či dopočtením limity z definice) výjdou jednostranné limity $+\sqrt{2}$ a $-\sqrt{2}$.

(7) Mimo 0 dle vzorců

$$f'(x) = (2x + 1) \sin\left(\frac{1}{x}\right)(2x + 1) + \cos\left(\frac{1}{x}\right)(2x - 1),$$

a $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2(\sin(\frac{1}{h}) + \cos(\frac{1}{h}))}{h} = 0$. Zde NELZE použít tvrzení. Platí $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x)$ neexistuje. Pro limitu zleva taktéž. Tedy podmínky věty nejsou splněny. Derivace v 0 přesto existuje.

Teoretický příklad. Necht f je (ostře) rostoucí a spojitá na $(0, 1)$. Potom nutně

- (i) f má v 0 derivaci,
- (ii)* f má v 0 derivaci zleva,
- (iii) Všechny jednostranné derivace (které existují) na $(0, 1)$ musí být kladné,
- (iv) Všechny jednostranné derivace (které existují) na $(0, 1)$ musí být nezáporné.

Rozhodněte, která z uvedených tvrzení platí.

18 l'Hospitalovo pravidlo

Necht $a > 0$ a $b > 0$. Spočtěte následující limity:

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos x}{x^2}$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{an}}{n^b}$
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \log \frac{1}{n} \right|^a \frac{1}{n^b}$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(1+x) - \arctan(1-x)}{x}$
- (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

(6) Najděte $A \in \mathbb{R}$, aby pro všechna $x \in (0, \infty)$ platilo

$$\left(\log(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x}) + \arctan x + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) \right)' = A \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^4 x}}$$

(7) Spočtěte derivace zadané funkce f všude, kde existují, včetně jednostranných derivací

$$f(x) = \max\{x + \arctan(\sin x), x\}$$

(7) Spočtěte derivace zadané funkce f všude, kde existují, včetně jednostranných derivací

$$f(x) = \arctan \tan^2 x, \quad \text{pro } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \text{jinak.}$$

Výsledky a návody:

- (1) $\frac{-1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \frac{-\sin x}{2x} = \frac{-1}{2}$
- (2) ∞ ; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{a}{b}x}}{x} \right)^b = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{a}{b}x}}{1} \right)^b = \infty$
- (3) 0 ; $\lim_{x \rightarrow 0+} |\log x|^a x^b = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|\log x|^a}{\frac{1}{x^b}} = \left(\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|\log x|}{\frac{1}{x^{\frac{b}{a}}}} \right)^a = \left(\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-\frac{1}{x}}{\frac{-b}{x^{\frac{b}{a}+1}}} \right)^a = 0$
- (4) 1 ; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(1+x) - \arctan(1-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+(1+x)^2} - \frac{-1}{1+(1-x)^2} = 1$
- (5) $\frac{1}{3}$; l'Hospitalíme třikrát.
- (6) $A = -1$.
- (7) viz zde.
- (8) viz zde.

19 Průběh funkce

Budeme vyšetřovat průběh funkcí. Postup se skládá z následujících 8 kroků.

- (1) Určíme definiční obor a obor spjitosti funkce.
- (2) Zjistíme průsečíky se souřadnými osami.
- (3) Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicitu
- (4) Dopočítáme limity v krajních bodech definičního oboru (včetně případných nekonečn)
- (5) Spočteme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy (k tomu může být vhodné spočítat druhou derivaci)
- (6) Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde f je konvexní a konkávní. Určíme body, kde f mění konvexitu/konkavitu - tyto nazýváme inflexními body.
- (7) Vypočteme asymptoty funkce.
- (8) Načrtneme graf funkce a určíme obor hodnot.

Příklad: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

Dále budeme počítat příklady ze stránek doktorky Kuncové, zde. Jsou tam uvedeny i řešení (více či méně) - zejména jsou tam uvedeny obrázky zadaných funkcí, což je to nejdůležitější. Zde naleznete detailnější "návod" na vyšetřování průběhu a pár vhodných rad.

20 Průběh funkce 2

Pokračujeme v příkladech od doktorky Kuncové, zde.

21 Průběh funkce 3

Pokračujeme v příkladech od doktorky Kuncové, zde.

22 Taylorovy polynomy

Taylorovy řady (tj. polynomy libovolného stupně) elementárních funkcí můžete používat. Lze je nalézt například v poznámkách z přednášky, zde (sekce 4.5).

- (1) Spočítejte Taylorův polynom stupně 4 v bodě 0 funkce $f(x) = \tan x$.
- (2) Spočítejte Taylorův polynom stupně 3 v bodě 1 funkce $f(x) = x \log x$.
- (3) Spočítejte Taylorův polynom stupně 5 v bodě 0 funkce $f(x) = \cos(\sin x)$.
- (4) Spočítejte s přesností na 10^{-4} hodnotu $\cos(0.1)$.

Teoretický příklad

Nechť $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ má všude vlastní derivaci. Dokažte

- (i) Pokud f je sudá, pak f' je lichá.
- (ii) Pokud f je lichá, pak f' je sudá.

K počítání limit za pomoci Taylorových polynomů budeme používat značení *malé o*. Řekneme, že funkce f je malé o od g v bodě $a \in \mathbb{R}$, pokud

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Značíme $f = o(g)$. Dle Taylorovy věty (resp. věty o nejlepší aproximaci Taylorovým polynomem) platí následující tvrzení.

Tvrzení Nechť f je definována a má derivace až do k -tého řádu na okolí $a \in \mathbb{R}$. Potom $f(x) = T_k^{f,a}(x) + o((x-a)^k)$ v bodě a .

Dále budeme používat:

$$x^k o(x^l) = o(x^{k+l}), \quad o(x^k) o(x^l) = o(x^{k+l}), \quad o(x^k + o(x^l)) = o(x^k),$$

pro $k, l \in \mathbb{N}$, $k < l$.

- (5) Pomocí Taylorových polynomů spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}$$

- (6) Pomocí Taylorových polynomů spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{\sin(x) - x}$$

- (7) Pomocí Taylorových polynomů spočítejte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - e^{-\frac{1}{2n^2}} \right)$$

- (8) Pomocí Taylorových polynomů určete koeficienty $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby uvedená limita existovala vlastní. Limitu pro tyto koeficienty spočítejte.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax + x \arctan bx - b}{x^4}$$

Teoretický příklad

Nechť f má na okolí 0 všechny derivace. Dokažte že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí

- (a) Pokud f je lichá, pak polynom $T_k^{f,0}$ obsahuje pouze liché mocniny.
 (a) Pokud f je sudá, pak polynom $T_k^{f,0}$ obsahuje pouze sudé mocniny.

Výsledky a návody

- (1) $x + \frac{1}{3}x^3$
 (2) $x - 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3$
 (3) $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4$
 (4) $1 - \frac{(0.1)^2}{2}$; Lagrange: $|\cos(0.1) - T_n^{\cos,0}(0.1)| \leq \frac{1}{(n+1)!}(0.1)^{n+1}$, neboť $|\cos^{(n)}| \leq 1$. Aplikace pro $n = 3$ dává $\cos(0.1) - 1 + \frac{0.1^2}{2} \leq 10^{-4}$ a tedy výsledkem je například $1 - \frac{1}{200}$
 (5) $\frac{1}{4!}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}$
 (6) -6 ; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)} \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}}{\frac{1}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + o(1)}{-\frac{1}{3!} + o(1)}}{\frac{1}{x^3}}$
 (7) $\frac{-1}{12}$; Pomocí Heineho převedeme na $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) - \left(1 + \frac{-x^2}{2} + \frac{1}{3!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4)\right)}{x^4} = \frac{1}{4!} - \frac{1}{8}$$

 (8) $-\frac{1}{6}$; Z $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^4}{4!} + o(x^4) + x\left(bx - \frac{(bx)^3}{3} + o(x^3)\right) - b}{x^4} \in \mathbb{R}$ dostaneme $b = 1$ a $a = \pm\sqrt{2}$. Limita je potom $\frac{a^4}{4!} - \frac{b^3}{3}$.