O Pythagorově větě
a kráse matematiky výpočtů na počítačích

Zdeněk Strakoš

MFF UK v Praze

http://www.karlin.mff.cuni.cz/˜strakos

ŠKOMAM 2015, VŠB-TUO Ostrava, leden 2015.

Obsah

1. Matematika a filosofie

1 Filosofie je láska k moudrosti.

Nápis na dveřích Platónovy Akademie:

Kdo není znalý geometrie, nesmí vstoupit.

Pohled na vědění měl od počátku mravní rozměr.

Platón, 427-347 př. Kr.:

Výklad o tom, že idea dobra je tou největší vědomostí,
jsi přece už vyslechl často,
a stejně tak i to, že se jí uskutečňuje vše spravedlivé,
a že i vše ostatní, co se na ní podílí,
se stává užitečným a prospěšným.

1 Filosofie je láska k moudrosti.

Sirachovec, asi 180 př. Kr.:

Ale znalost zla není moudrostí
a rada hříšníků není rozvahou.
Je dovednost, která je ohavností;
je pošetilý ten, komu se nedostává moudrosti.
Lepší je být chudý na rozum a mít bázeň,
než oplývat rozvahou a porušovat zákon.
Obratná dovednost leckdy slouží k nespravedlnosti,
a leckdo se uchyluje k podvodu, aby nastolil své právo.

1 Matematika a krása

Henri Poincaré (1909)

- *The scientist does not study nature because it is useful; he studies it because he delights in it, and he delights in it because it is beautiful. If nature were not beautiful, it would not be worth knowing, and if nature were not worth knowing, life would not be worth living.*
- *Science has had marvelous applications, but a science that would only have applications in mind would not be science anymore, it would be only cookery.*

Jak může být krásná matematika výpočtů na počítačích?

2. Pythagorova věta a počítání

2 Matematika, počty a počítače

1. Počítač je omezenec a demagog. Lže, jako když tiskne, a ani o tom neví. Z výpočetních operací umí jen sčítat a na konci výpočtu se tváří, že to, co nám podsouvá jako výsledek, ví (náhodou) úplně přesně. Počítač sčítá čísla ze zásady nepřesně, ale zato to umí hodně rychle.

2. Na matematikovi je, aby ty nepřesnosti na konci výpočtu nevadily. To neznamená kontrolování či opravování mezivýsledků. Jednak to nejde a jednak to ani často není potřeba.

3. Východiskem našeho poznání při výpočtech na počítači je tedy v duchu slavné Cimrmanovy teorie poznání počítačem vygenerovaný omyl, a to zcela přesný!

4. Matematikovi nezbývá, než pokusit se o Cimrmanův jedinečný krok stranou charakterizovaný jeho slavnou filosofickou větou „Víme vše: Nevíme nic.”

2 Rovnice, matice, vektory

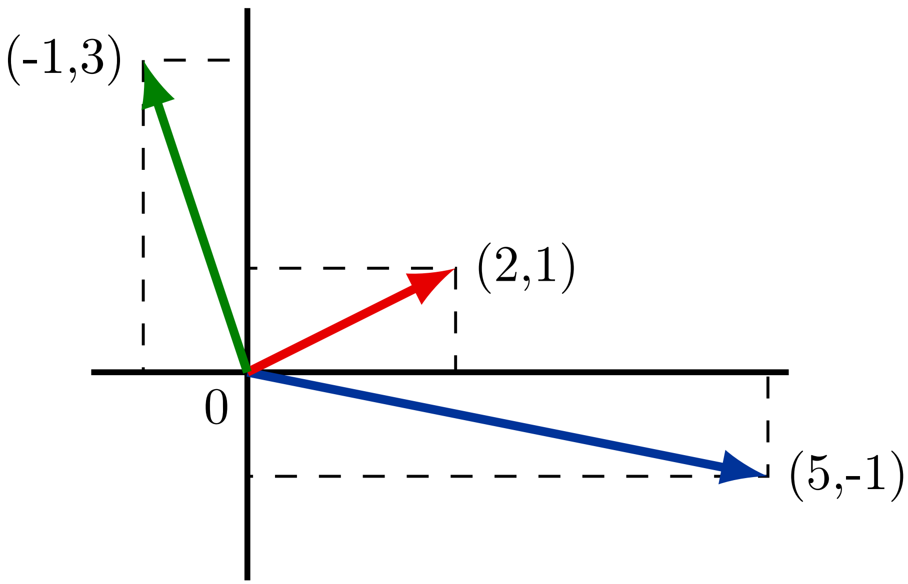
Lineární rovnice o 1 neznámé

$$ax = b, \quad a \neq 0 \quad \longrightarrow \quad x = b/a$$

Co když je rovnic více?

$$\begin{aligned} 2x - 1y &= 5 \\ 1x + 3y &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$



2 Rovnice, matice, vektory

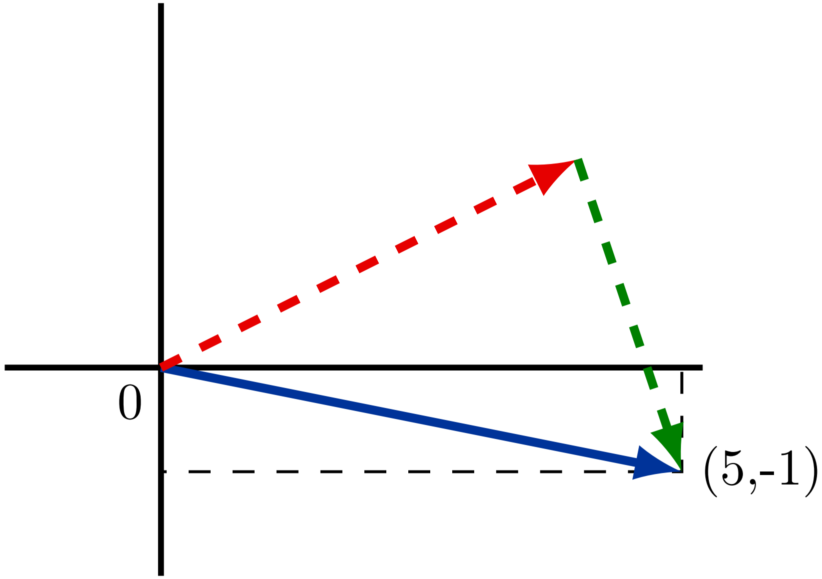
Lineární rovnice o 1 neznámé

$$ax = b, \quad a \neq 0 \quad \longrightarrow \quad x = b/a$$

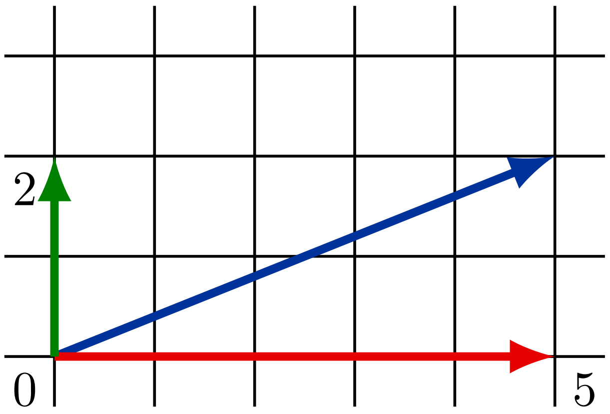
Co když je rovnic více?

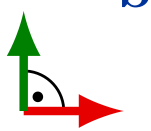
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x = 2, \; y = -1$$



2 Tvoří-li sloupce matice kolmou mřížku





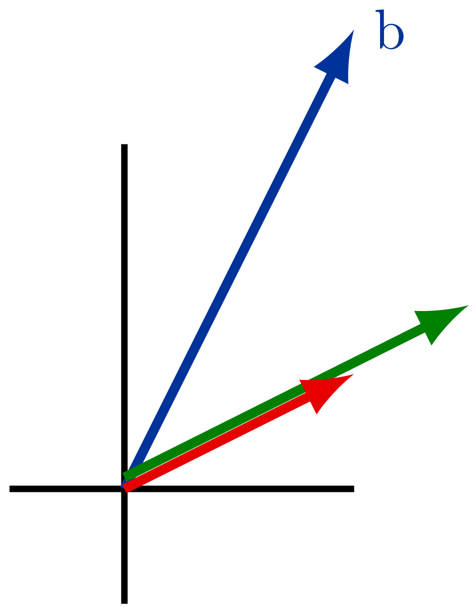
$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 5 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

pak řešení snadno dostaneme kolmými projekcemi.

2 Jsou-li sloupce matice (téměř) rovnoběžné

Co však dělat v tomto případě?

Co to znamená, že $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení?



2 Veliké úlohy a metoda konjugovaných gradientů

Konstruujeme posloupnost aproximací $x_1, x_2, \cdots$ k řešení x tak, že rozdíl mezi vypočtenou aproximací a řešením je vždy nejmenší možný ve smyslu energie mezi všemi aproximacemi z určitých prostorů o dimenzi $1, 2, \cdots$

Pokud bychom počítali přesně, musíme se trefit do řešení x.

Ale náš počítač nepočítá přesně!

2 Předpodmíněná metoda konjugovaných gradientů

$\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0,$ solve $\mathbf{M}\mathbf{z}_0 = \mathbf{r}_0,\ \mathbf{p}_0 = \mathbf{z}_0$

For $n = 1, \ldots, n_{\max}$

$$\alpha_{n-1} = \frac{\mathbf{z}_{n-1}^* \mathbf{r}_{n-1}}{\mathbf{p}_{n-1}^* \mathbf{A} \mathbf{p}_{n-1}}$$

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n-1} + \alpha_{n-1} \mathbf{p}_{n-1}\,,$$ stop when the stopping criterion is satisfied

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_{n-1} - \alpha_{n-1} \mathbf{A} \mathbf{p}_{n-1}$$

$$M\mathbf{z}_n = \mathbf{r}_n\,,$$ solve for $\mathbf{z}_n$

$$\beta_n = \frac{\mathbf{z}_n^* \mathbf{r}_n}{\mathbf{z}_{n-1}^* \mathbf{r}_{n-1}}$$

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{z}_n + \beta_n \mathbf{p}_{n-1}$$

End

2 Cimrmanův krok stranou v metodě CG

1. Výpočtem na počítači se šíří zdánlivě nekontrolovatelně chyby, způsobené zaokrouhlováním. To, co dělá počítač špatně, nemá smysl krok za krokem opravovat.

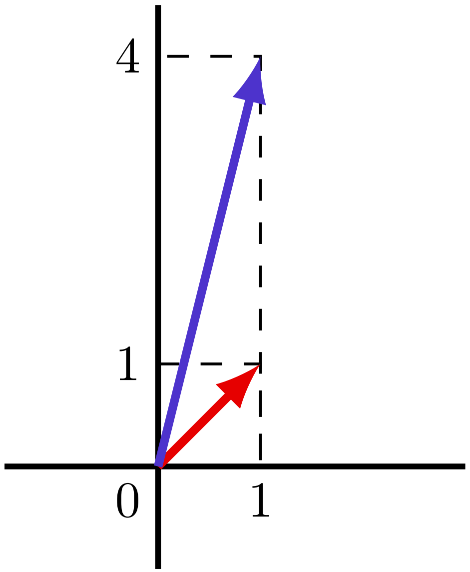
2. Výsledku výpočtu porozumíme tak, že sestavíme jinou matematickou úlohu, které rozumíme, a jejíž přesný výsledek je totožný s tím, co nám podsouvá počítač.

3. Srovnáním původní a nově vytvořené matematické úlohy (počítač už do toho dále nepleteme) jsme schopni porozumět tomu, co se to v počítači vlastně dělo.

4. Nová matematická úloha slouží k porozumění výpočtu, ne k výpočtu samotnému.

2 Matice, zobrazení a operátor (ne mobilní sítě)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

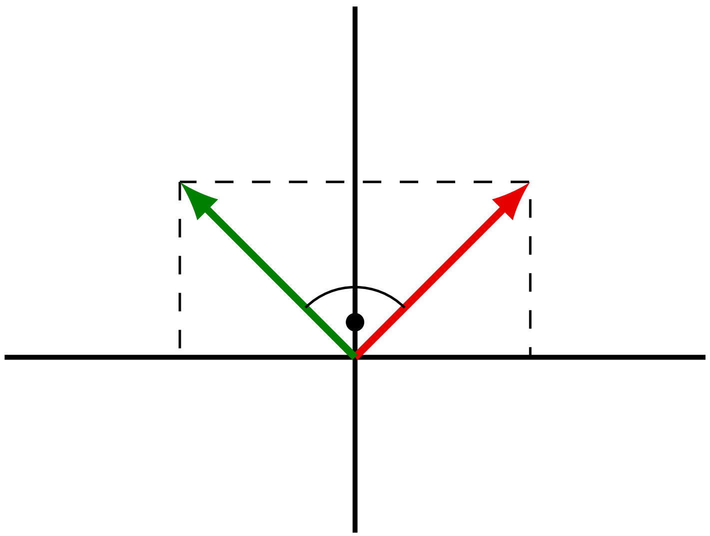


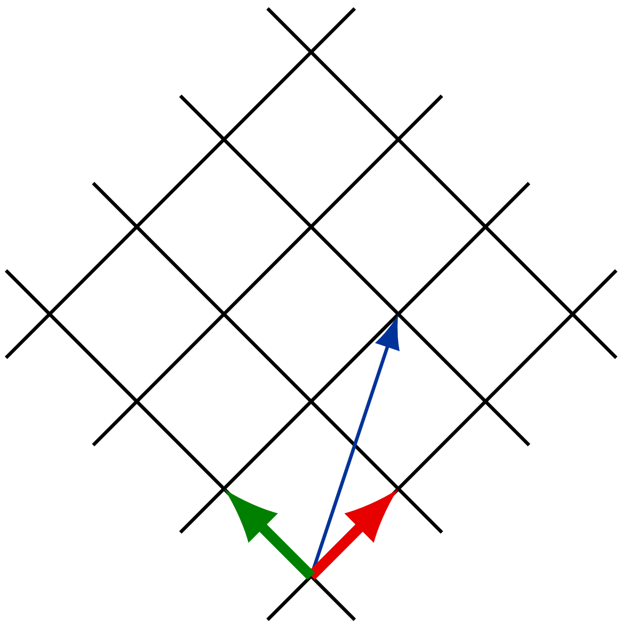
$$\mathbf{A} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Matice $\mathbf{A}$ zobrazuje vektory na jiné vektory: $\mathbf{A} : \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{b}$, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

2 Vlastní vektory a souřadnice v kolmé mřížce

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



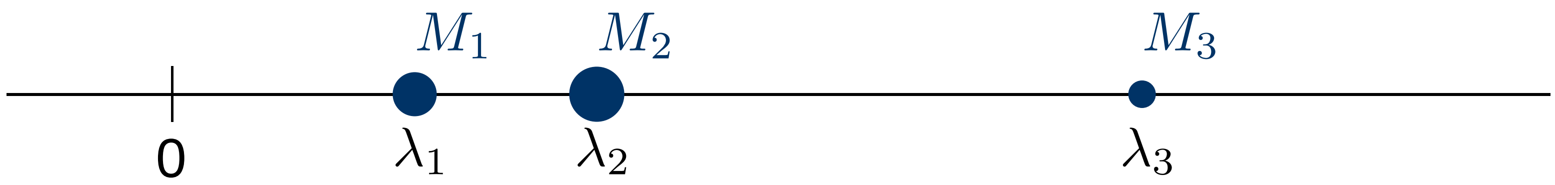


2 Pythagorova věta

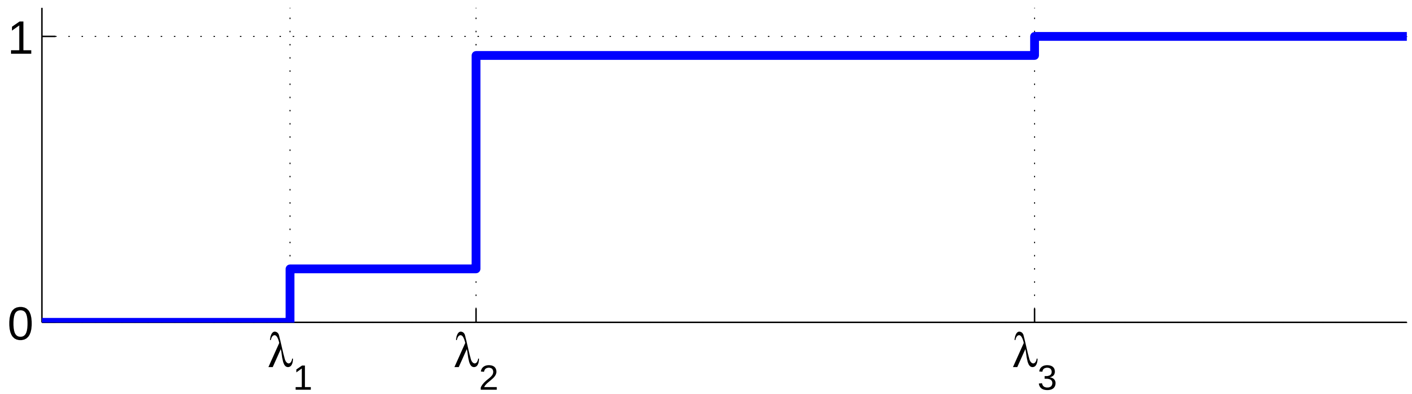
Velikost libovolného vektoru určíme odmocninou kvadrátů jeho souřadnic v kolmé mřížce (zde dané vlastními vektory matice zobrazení).

Vliv kolmosti mřížky na přesnost určení souřadnic!

2 Jak rozložím 1 kg hmoty na přímce?



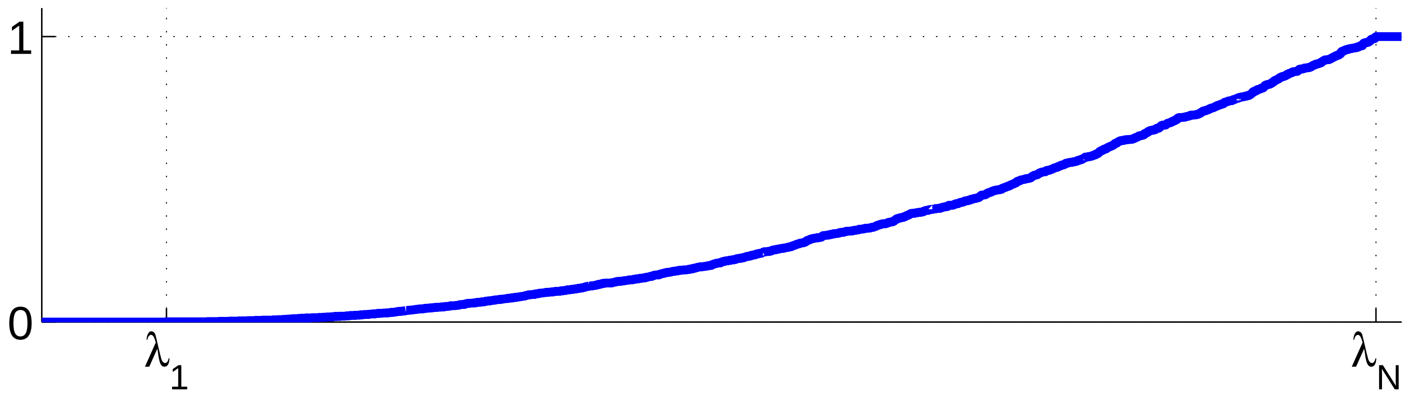
Distribuční funkce



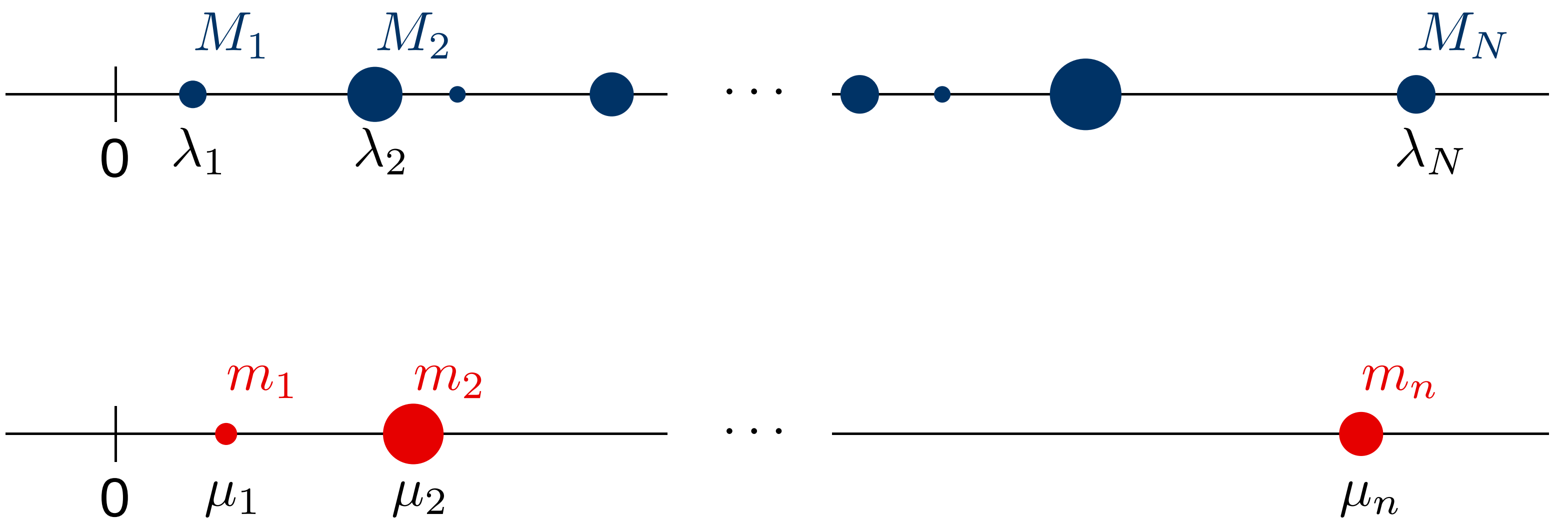
2 Jak rozložím 1 kg hmoty na přímce?

Pokud je matice velká, jednotlivé body nám vizuálně téměř splynou

Distribuční funkce



Úloha: Pro pevné n najít distribuční funkci s pouze n kuličkami tak, aby co nejlépe vystihovala vlastnosti distribuční funkce určené maticí $\mathbf{A}$ a pravou stranou $\mathbf{b}$.



2 Přitom co nejlépe?

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
M_1 & + & M_2 & + \cdots + & M_N & = & m_1 & + & m_2 & + \cdots + & m_n \\
\lambda_1 M_1 & + & \lambda_2 M_2 & + \cdots + & \lambda_N M_N & = & \mu_1 m_1 & + & \mu_2 m_2 & + \cdots + & \mu_n m_n
\end{array}
$$

$$(\lambda_1)^2 M_1 + (\lambda_2)^2 M_2 + \cdots + (\lambda_N)^2 M_N = (\mu_1)^2 m_1 + (\mu_2)^2 m_2 + \cdots + (\mu_n)^2 m_n$$

$$\vdots$$

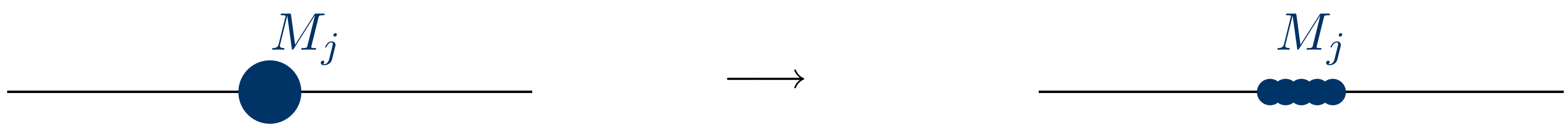
$$(\lambda_1)^{2n-1} M_1 + \cdots + (\lambda_N)^{2n-1} M_N = (\mu_1)^{2n-1} m_1 + \cdots + (\mu_n)^{2n-1} m_n$$

$2n$ momentů se rovná.

Carl Friedrich Gauss (1814)

Thomas Jan Stieltjes (1894)

Christopher Conway Paige (1971–80), Anne Greenbaum (1989)



1 vlastní číslo $\longrightarrow$ k vlastních čísel

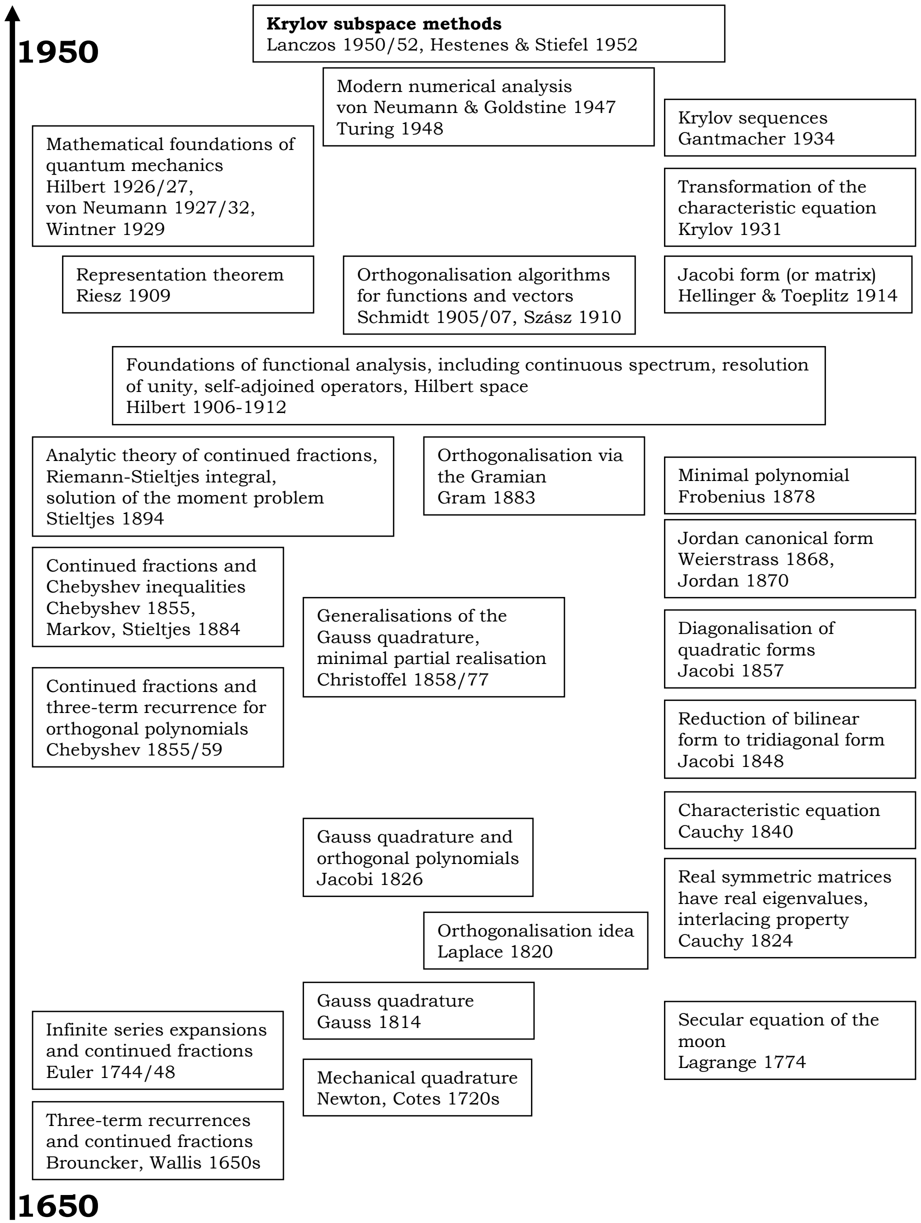
λ_j $\longrightarrow$ $\widehat{\lambda}_{j_1}, \widehat{\lambda}_{j_2}, \ldots, \widehat{\lambda}_{j_k}$

2 Obtížnost cesty ke krásnému výsledku

2 Matematika = filosofie + kreslení

- Je možné získat velmi přesné výsledky z mezivýsledků, jejichž přesnost byla při výpočtu na počítači zcela ztracena.
- I když počítač zcela zabloudí, nebloudí náhodně, ale v důsledku toho, že dochází k zesílení zaokrouhlovacích chyb.
- Když víme, jak k tomu zesílení dochází, jsme schopni dostat se blízko k hledanému řešení, i když ho neznáme.
- Můžeme být dokonce schopni zaručit, že spočítáme to, co jsme chtěli, s přesností, jakou jsme chtěli.

2 Vidění souvislostí I



2 Vidění souvislostí II

Numerical analysis

Convergence analysis — Rounding error analysis — Cost of computations — Floating point computations

Iterative methods — Polynomial preconditioning — Stopping criteria — Data uncertainty

Least squares solutions

Optimisation

Convex geometry

Minimising functionals

Approximation theory

Orthogonal polynomials

Chebyshev, Jacobi and Legendre polynomials

Green's function

Gibbs oscillation

Rayleigh quotients

Fourier series

Cornelius Lanczos
An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators, 1950

Solution of systems of linear equations by minimized iterations, 1952

Chebyshev polynomials in the solution of large-scale linear systems, 1952

Magnus R. Hestenes & Eduard Stiefel
Methods of conjugate gradients for solving linear systems, 1952

Structure and sparsity

Gaussian elimination

Vandermonde determinant

Matrix theory

Linear algebra

General inner products

Cauchy-Schwarz inequality

Orthogonalisation

Projections

Functional analysis

Differential and integral operators

Liouville-Neumann expansion

Trigonometric interpolation — Continued fractions — Sturm sequences — Fredholm problem

Gauss-Christoffel quadrature — Riemann-Stieltjes integral — Dirichlet and Fejér kernel

Real analysis

3. Matematika jako věda a jako profese

3 Úspěch, předstírání, pokora, originalita a let orla

Otázka **proč** musí být vždy nadřazena otázce **jak.**

Clive Staples Lewis, Jednotlivec a kolektiv, Oxford (1945)

Žádný člověk, který si nade vše cení originality, nebude nikdy originální. Pokuste se však vyjádřit pravdu tak, jak ji vidíte, pokuste se vykonat jakkoli velký nebo malý kousek práce tak dobře, jak to jen lze, kvůli té práci samé, a co lidi nazývají originalitou, se dostaví.

3 Vědomí vlastní omezenosti I

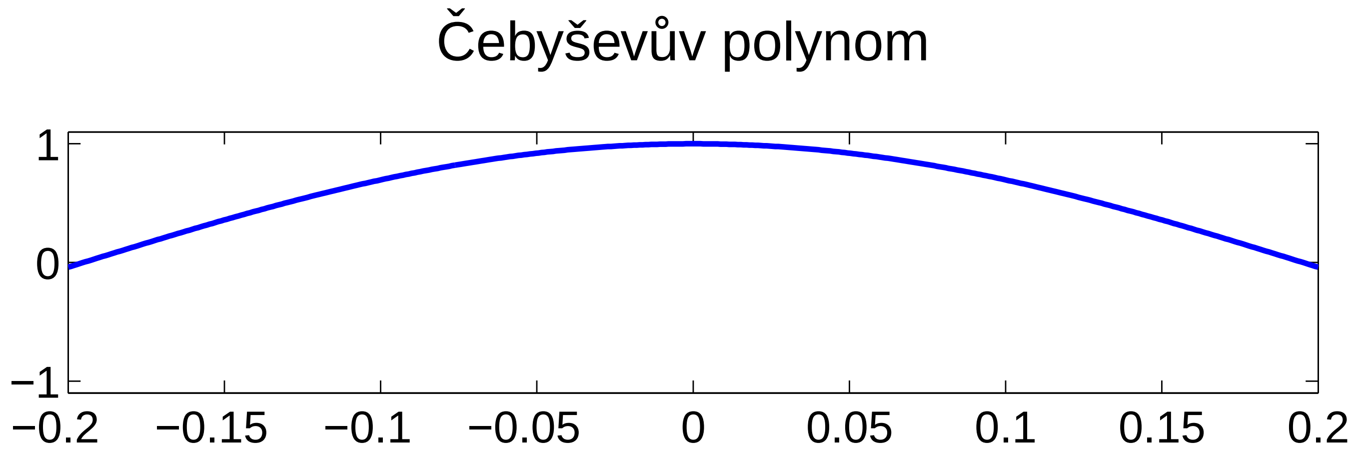
Řetězový zlomek: Euklidés (300 BC),

Hipassus z Metapontu (před 400 BC), ...

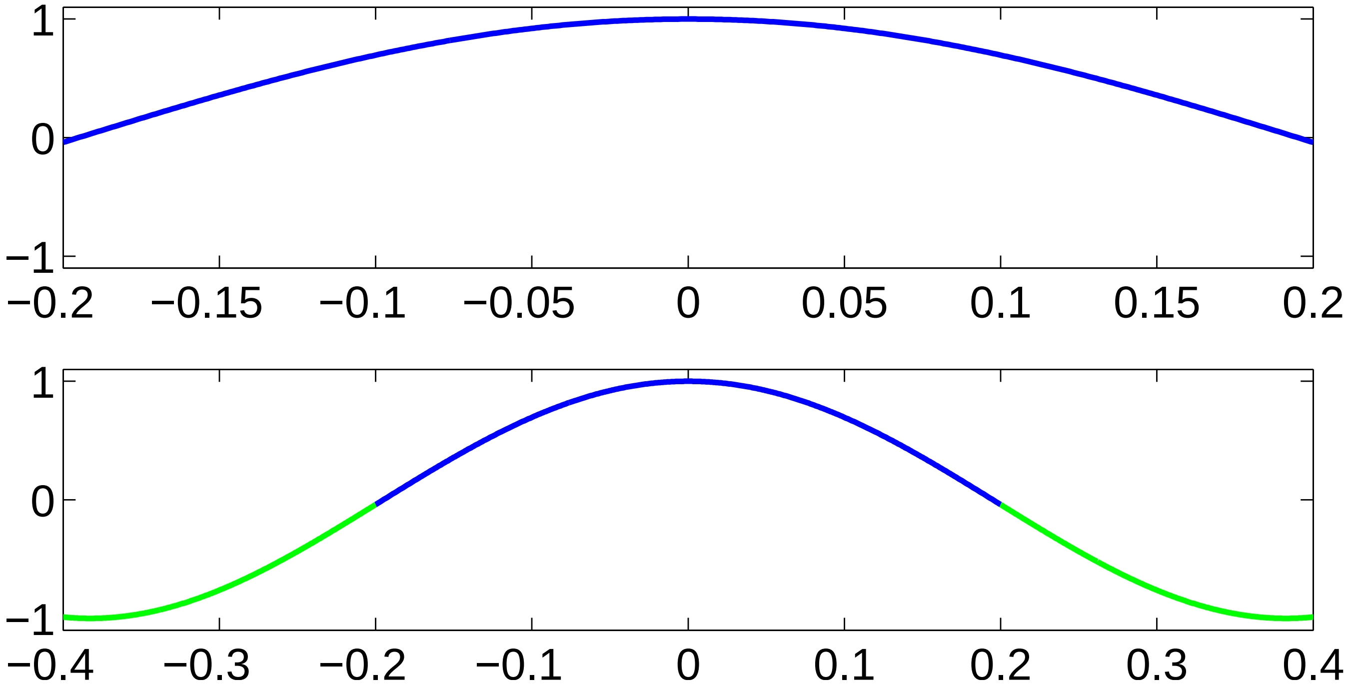
$$1 + \frac{1}{\boxed{2}} \qquad 1 + \frac{1}{\boxed{2 + \frac{1}{2}}} \qquad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} \qquad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ddots}}}}$$

$$= 1.5 \qquad = 1.4 \qquad = 1.4166\bar{6} \qquad \longrightarrow \sqrt{2}$$

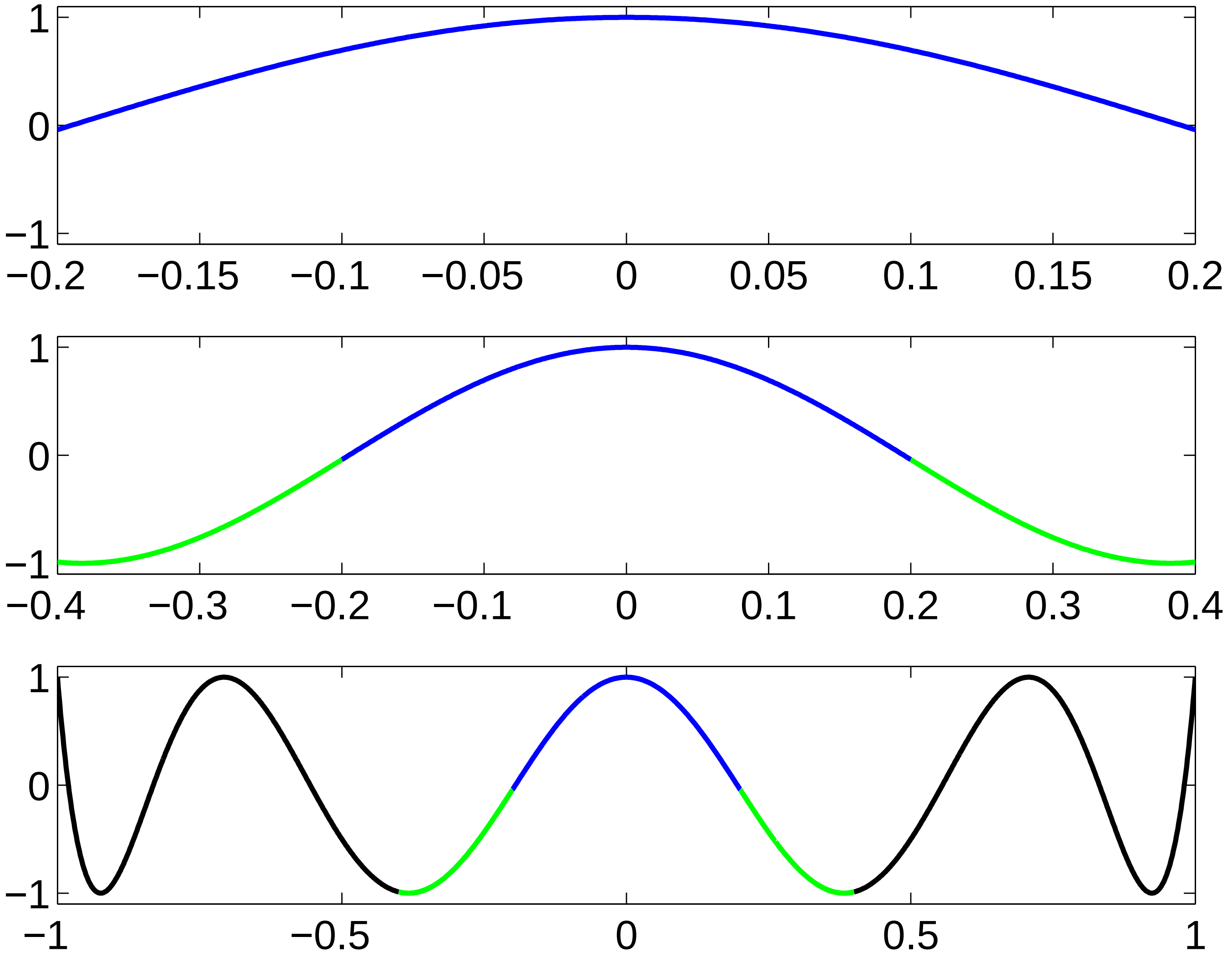
3 Vědomí vlastní omezenosti II



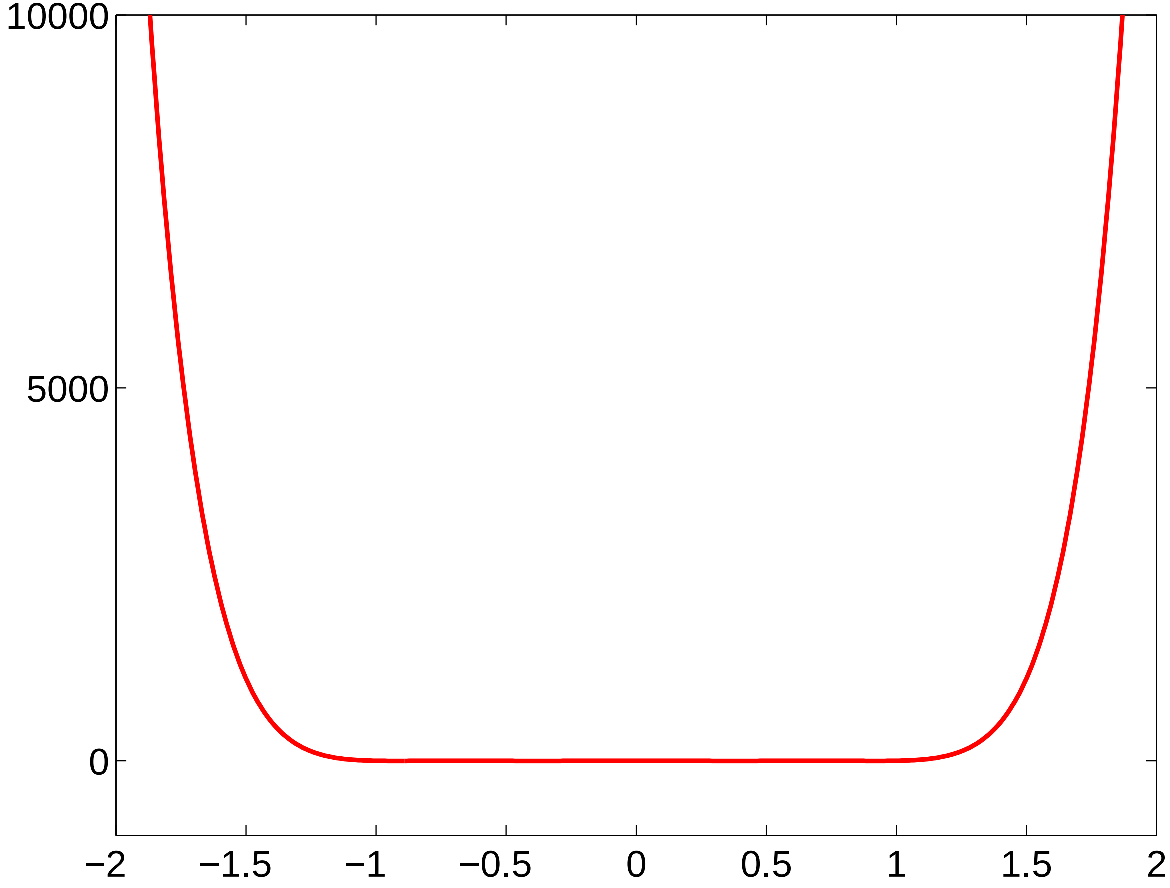
3 Vědomí vlastní omezenosti II



3 Vědomí vlastní omezenosti II



3 Vědomí vlastní omezenosti II



3 Opět filosofie

Cornelius Lanczos, Why mathematics?, Dublin (1966)

But the mechanism becomes so heavy that the technical details smother the eagle flight of the imagination.

Tatiana Drexler (2014)

Matematika je hledání cest. Učí houževnatosti, nepoddávání se těžkostem a naději.

Cesty tam a zase zpátky.

4. Matematika a poezie

4 Babylónská věž

Gen 11, 4: *Vystavějme si město a věž, jejíž vrchol pronikne nebesa.*

Jonathan Sachs (2005): *Pokud se lidé pokoušejí stát něčím více, než jen lidmi, rychle se stanou něčím méně, než lidmi ....*
Babylónský příběh byl první ale bohužel ne poslední civilizační pokus, který začal utopií a skončil noční můrou.

Jan Werich: *Z ničeho se nemá dělat věda. Ani z vědy ne.*

Gilbert Keith Chesterton: *Básník má občas hlavu v nebesích, zatímco logik si chce veškerá nebesa nacpat do hlavy. Není divu, že mu občas praskne.*

4 Troška poezie nikoho nezabije

Francois Villon,

Balada napsaná Léta Páně 1458 na námět,
jejž u svého dvora v Blois určil vévoda Orleánský

Děkuji Vám za laskavou trpělivost!