MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Daniel Till

# Veta o 27 priamkach

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Šťovíček, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ........ dne ............ Podpis autora

Rád by som týmto poďakoval doc. RNDr. Janovi Šťovíčkovi, Ph.D. za vedenie bakalárskej práce a cenné rady.

Taktiež by som sa rád poďakoval svojim rodičom za podporu.

Název práce: Veta o 27 priamkach

Autor: Daniel Till

Katedra: Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Šťovíček, Ph.D., Katedra algebry

Abstrakt: V tejto práci dokážeme, že na každej nesingulárnej kubickej ploche nad algebraicky uzavretým telesom charakteristiky rôznej od dvoch existuje práve 27 rôznych priamok. Najprv sa budeme venovať afinným algebraickým varietám a ich ideálom. Dokážeme si Hilbertovu vetu o nulácha a zavedieme morfizmy medzi afinnými algebraickými varietami. Potom sa presunieme k projektívnym algebraickým varietám a ich ideálom. Zavedieme morfizmy medzi projektívnymi varietami a názvoslovia pre vybrané typy projektívnych variet. Dokážeme pomocné tvrdenia o prieniku dvoch rôznych priamok na projektívnej rovine, respektíve priamky a roviny v $\mathbb{P}^3_K$. Taktiež definujeme pojmy ako dotyčnicový priestor k variete v danom bode, singularita nadplochy a ireducibilná varieta. Následne sa presunieme do $\mathbb{P}^3_K$, kde dokážeme existenciu 27 rôznych priamok na ľubovoľnej nesingulárnej kubickej ploche. Tento dôkaz urobíme tak, že najprv dokážeme, že na takejto ploche existuje priamka a potom skonštruujeme všetkých 27 priamok vzájomnými vzťahmi.

Klíčová slova: projektívna varieta, nesingulárna nadplocha, priamka, rovina

Title: The theorem about 27 lines

Author: Daniel Till

Department: Department of Algebra

Supervisor: doc. RNDr. Jan Šťovíček, Ph.D., Department of Algebra

Abstract: In this work we will prove there are exactly 27 different lines on each nonsingular cubic surface over an agebraically closed field not of characteristic two. Firstly, we will focus on affine algebraic varieties and their ideals. We will prove Hilbert's Nullstellensatz and introduce morphisms between affine algebraic varieties. Then we move on to projective algebraic varieties and their ideals. We introduce morphisms between projective varieties and nomenclature for selected types of projective varieties. We will prove auxiliary statements about intersection of two distinct lines in a projective plane, respectively a line and a plane in $\mathbb{P}^3_K$. We also define concepts such as a tangent space to variety at a given point, singularity of a hypersurface and irreducible variety. Then we move to $\mathbb{P}^3_K$, where we will prove the existence of 27 different lines on any nonsingular cubic surface. We will firstly prove that there is a line on such a surface and then we construct all 27 lines by mutual relations.

Keywords: projective algebraic variety, nonsingular hypersurface, line, plane

# Obsah

# Úvodné poznámky

V celej práci budeme uvažovať, že $K$ je teleso. Zo začiatku na teleso $K$ nemáme žiadne požiadavky. Neskôr budeme od neho požadovať, aby bolo algebraicky uzavreté a charakteristiky rôznej od 2.

# 1. Afinné algebraické variety

V tejto kapitole zavedieme afinnú algebraickú varietu a jej ideál. Hlavnou snahou v prvej kapitole bude dokázať Hilbertovu vetu o nulách. Na to ale budeme potrebovať vysloviť a dokázať zopár ďalších tvrdení.

**Definícia 1.1.** *Nech $C$ je množina polynómov v $K[x_1, \ldots, x_n]$ a označme*

$$\mathcal{V}(C) = \{p \in K^n : \forall f \in C, f(p) = 0\}.$$

*Potom množinu $X \subseteq K^n$ nazveme* afinnou algebraickou varietou*, ak $X = \mathcal{V}(C)$ pre nejakú množinu $C \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$.*

*Poznámka.* Niekedy je na afinnú varietu ešte kladená požiadavka ireducibility (tento pojem viď definícia 2.11). V takom prípade je nami zadefinovaná afinná varieta nazývaná afinná algebraická množina.

Priamo z definície vidno, že afinné algebraické variety sú uzavreté na ľubovoľné prieniky. Taktiež hneď z definície vidíme, že $K^n = \mathcal{V}(\emptyset)$ a $\emptyset = \mathcal{V}(1)$, kde 1 označuje konštantný polynóm, ktorý má hodnotu 1. Afinné algebraické variety sú taktiež uzavreté na konečné zjednotenia, čo pre nezjavnosť dokážeme.

*Dôkaz.* Nech $I, J$ sú množiny polynómov v $K[x_1, \ldots, x_n]$. Potom

$$\mathcal{V}(I), \mathcal{V}(J) \subseteq \mathcal{V}(IJ),$$

kde $IJ = \{fg | f \in I, g \in J\}$, teda $\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) \subseteq \mathcal{V}(IJ)$.

Sporom dokážeme, že $\mathcal{V}(IJ) \subseteq \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J)$. Nech $x \in \mathcal{V}(IJ)$ a $x \notin \mathcal{V}(I), x \notin \mathcal{V}(J)$. Potom existujú $f \in I$ a $g \in J$ také, že $f(x) \neq 0$ a $g(x) \neq 0$. Z toho plynie, že pre tieto $f$ a $g$ je $f(x)g(x) \neq 0$, teda $x \notin \mathcal{V}(IJ)$, čo je spor.

Týmto sme ukázali, že zjednotenie dvoch afinných variet je opäť varieta. Induktívne by sme ukázali uzavretosť na konečné zjednotenia.

□

Z toho plynie, že na $K^n$ sa dá zaviesť topológia.

**Definícia 1.2.** Zariskeho topológiou *na $K^n$ rozumieme topológiu, ktorej uzavreté množiny sú afinné algebraické variety v $K^n$. Pod touto topológiou značíme $K^n$ ako $\mathbb{A}^n_K$ (prípadne $\mathbb{A}^n$).*

V definícii 1.1 sme zaviedli afinné variety, kde sme priradzovali množine polynómov množinu všetkých ich spoločných koreňou, teda množinu bodov so špecifickou vlastnosťou. Teraz si zadefinujeme ideál afinnej variety, kde zas urobíme pravý opak, teda množine bodov priradíme všetky polynómy, ktoré majú dané body za korene.

**Definícia 1.3.** *Nech $V \subseteq \mathbb{A}^n$ je afinná algebraická varieta. Potom* ideálom afinnej variety *$V$ rozumieme množinu*

$$\mathcal{I}(V) = \{f \in K[x_1, \ldots, x_n] : \forall p \in V, f(p) = 0\}.$$

*Poznámka.* Priamo z definície ideálu afinnej variety plynie, že sa skutočne jedná o ideál $K[x_1, \ldots, x_n]$, pretože súčet polynómov majúcich spoločný koreň má opäť daný prvok za koreň a súčin polynómu s koreňom z $V$ s ľubovoľným iným polynómom má opäť koreň vo $V$.

Pred definíciou ideálu sme povedali, že si definujeme niečo ako inverznú korešpondenciu k afinným varietám. Preto sa teraz pozrieme na to, nakoľko toto naše tvrdenie platí, teda zistíme, či platia rovnosti $\mathcal{V}(\mathcal{I}(V)) = V$ pre afinnú algebraickú varietu $V$ nad telesom $K$ a $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = I$ pre ideál $I$ okruhu $K[x_1, \dots, x_n]$.

Najprv dokážeme, že $\mathcal{V}(\mathcal{I}(V)) = V$ pre ľubovoľnú afinnú algebraickú varietu $V$ nad telesom $K$.

*Dôkaz.* „$\supseteq$“ Táto inklúzia zjavne platí, pretože ak $f \in \mathcal{I}(V)$, tak $f(p) = 0$ pre ľubovoľné $p \in V$, teda $p \in \mathcal{V}(\mathcal{I}(V))$.

„$\subseteq$“ Nech $p \in \mathcal{V}(\mathcal{I}(V))$. Potom z definície ideálu platí, že $f(p) = 0$ pre každé $f \in \mathcal{I}(V)$. Nech $V = \mathcal{V}(\{f_j\}_{j\in J})$, kde $J$ je indexová množina. Potom ale $\forall j \in J : f_j(p) = 0$, keďže každé $f_j$ má za koreň každý prvok vo $V$. Teda takéto $f_j \in \mathcal{I}(V)$, z čoho dostávame, že $p \in \mathcal{V}(\{f_j\}_{j\in J}) = V$.

□

Druhá rovnosť, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = I$, obecne neplatí. Ako protipríklad si stačí vziať $K = \mathbb{R}$ a $I = (x^2 + 1)$. Potom $\mathcal{V}(I) = \emptyset$, teda $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \mathbb{R}[x]$, čo nie je rovné $(x^2 + 1)$.

Na preukázanie neplatnosti druhej rovnosti sme využili to, že $\mathbb{R}$ nie je algebraicky uzavreté takže sme vzali polynóm s reálnymi koeficientmi, ktorý ale nemá reálny koreň.

Ukázali sme, že zatiaľ čo $\mathcal{V}(\mathcal{I}(V)) = V$ platí vždy, tak $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = I$ neplatí, a na protipríklad sme využili teleso, ktoré nie je uzavreté. Teda by nás zaujímalo, za akých podmienok platí druhá rovnosť, alebo aspoň istý vzťah medzi jednotlivými stranami rovnosti. Hneď sa nám ponúka možnosť, že bude platiť v algebraicky uzavretých telesách. Táto domnienka je správna, ale iba uzavretosť telesa nestačí. Potrebujeme ešte radikál ideálu.

**Definícia 1.4.** Radikálom ideálu $I$ *v okruhu* $R$ *budeme rozumieť množinu*

$$\sqrt{I} = \{x \in R : x^n \in I \text{ pre nejaké } n \in \mathbb{N}\}.$$

*Ideál* $I$ *nazveme* radikálový, *ak* $I = \sqrt{I}$.

*Poznámka.* Všimnime si, že podľa definície radikálu je $\mathcal{I}(V) = \sqrt{\mathcal{I}(V)}$ pre ľubovoľnú afinnú algebraickú varietu $V$.

*Dôkaz.* Zjavne $\mathcal{I}(V) \subseteq \sqrt{\mathcal{I}(V)}$ pre ľubovoľnú afinnú algebraickú varietu $V$, teda stačí dokázať opačnú inklúziu. Nech $f \in \sqrt{\mathcal{I}(V)}$. Potom z definície radikálu $f^n \in \mathcal{I}(V)$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$. Teda $f^n(p) = 0$ pre $\forall p \in V$, z čoho dostávame, že $f(p) = 0$, čiže $f \in \mathcal{I}(V)$.

□

V poznámke vyššie sme dokázali, že ideály afinných variet majú vlastnosť, že sa zhodujú so svojimi radikálmi. To pre obecný ideál neplatí, stačí si vziať ideál $(x^2)$. Potom $\sqrt{(x^2)} = (x) \neq (x^2)$.

Momentálne už máme všetky nástroje na vyslovenie kýženého vzťahu, o ktorom pojednáva Hilbertova veta o nulách, ale na jej dôkaz budeme potrebovať tvrdenia, ktoré si teraz sformulujeme.

**Lemma 1.5** (Kala, str. 42)**.** *Nech $K \subseteq L$ sú telesá a $K$ je algebraicky uzavreté. Ak je $L$ konečne generovaný okruh nad $K$, tak $L = K$.*

Nasledujúcu vetu aj s dôkazom viď Kala, str. 42 - 43.

**Veta 1.6** (Slabá Hilbertova veta o nulách)**.**

1. *Ideál $I = (x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)$ je maximálny v $K[x_1, \dots, x_n]$ pre každé $p_1, \dots, p_n \in K$. Naviac $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ leží v tomto ideále práve vtedy, keď $f(p_1, \dots, p_n) = 0$.*

2. *Ak je $K$ algebraicky uzavreté, tak všetky maximálne ideály v $K[x_1, \dots, x_n]$ sú tvaru $(x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)$ pre nejaké $p_1, \dots, p_n \in K$.*

*Dôkaz.*

1. Najprv dokážeme druhú časť prvého tvrdenia. Nech $f \in K[x_1, \dots, x_n]$. Potom $f$ vieme zapísať v tvare

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - p_i) + b_0,$$

kde $a_1, \dots, a_n \in K[x_1, \dots, x_n]$ a $b_0 \in K$. Z toho plynie, že

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - p_i) \in I = (x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n),$$

teda

$$f \in I \;\Leftrightarrow\; f - \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - p_i) \in I \;\Leftrightarrow\; b_0 \in I \;\Leftrightarrow\; b_0 = f(p_1, \dots, p_n) = 0.$$

V tretej ekvivalencii sme v implikáci zľava doprava použili to, že jediné $b_0 \in K$ také, že zároveň leží v $I$ je $b_0 = 0$. V tom prípade $f = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - p_i)$, teda $f(p_1, \dots, p_n) = 0$. V implikácii sprava doľava zas používame to, že ak $0 = f(p_1, \dots, p_n)$, tak $0 = \sum_{i=1}^{n} a_i(p_i - p_i) + b_0 = b_0$. A keďže $0 \in I$, tak $b_0 \in I$.

„Maximalita“: Nech $f \notin I$, tj. $b_0 \neq 0$. Potom ideál $I + (f)$ obsahuje $b_0$ a teda $1 = b_0 b_0^{-1} \in I + (f)$, z čoho dostávame, že $I + (f) = K[x_1, \dots, x_n]$, teda $I$ je maximálny ideál.

2. Nech $M$ je maximálny ideál v $K[x_1, \dots, x_n]$. Potom $L = {}^{K[x_1, \dots, x_n]}/_{M}$ je teleso a $K$ môžeme brať ako podteleso $L$, pretože máme projekciu

$$\pi : K[x_1, \dots, x_n] \twoheadrightarrow {}^{K[x_1, \dots, x_n]}/_{M},$$

ktorej zúženie $\pi \restriction K$ je prosté, pretože $\mathrm{Ker}(\pi \restriction K) < K$.

Ďalej $L$ je nad $K$ generované prvkami $x_1 + M, \dots, x_n + M$ ako okruh. Keďže týchto prvkov je konečný počet, tak z lemma 1.5 je $L = K$. Teda

$$\begin{array}{rcl} \pi \restriction K : K & \to & {}^{K[x_1, \dots, x_n]}/_{M} = L \\ a & \mapsto & a + M \end{array}$$

je izomorfizmus, čiže je to surjektívne zobrazenie. Teda

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}\ \exists p_i \in K : x_i + M = p_i + M.$$

Takže dostávame, že pre každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí, že $x_i - p_i \in M$, z čoho dostávame, že $(x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n) \subset M$. Z predchádzajúceho bodu dôkazu vieme, že ideál $(x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)$ je maximálny, teda je rovný ideálu $M$.

□

Teraz už máme všetky nástroje na dokázanie Hilbertovej vety o nulách.

Vetu aj s dôkazom viď Fulton (2008), str. 10 - 11.

**Veta 1.7** (Hilbertova veta o nulách)**.** *Nech $K$ je algebraicky uzavreté. Potom pre každý ideál $I$ v $K[x_1, \dots, x_n]$ platí, že $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$. Teda ak $I$ je radikálový ideál, tak platí $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = I$.*

*Dôkaz.* Postupne dokážeme, že $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) \supset \sqrt{I}$ a $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) \subset \sqrt{I}$.

„$\supset$“ Nech $g \in \sqrt{I}$. Potom pre nejaké $k \in \mathbb{N}$ platí, že $g^k \in I$, čo znamená, že $g^k(p) = 0$ pre všetky $p \in \mathcal{V}(I)$. Teda $g(p) = 0$ pre ľubovoľné $p \in \mathcal{V}(I)$, z čoho dostávame, že $g \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$.

„$\subset$“ Nech $g \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$. Ukážeme, že $g \in \sqrt{I}$. Každý ideál v noetherovskom okruhu $K[x_1, \dots, x_n]$ je konečne generovaný, to znamená, že pre každý ideál $I$ v okruhu $K[x_1, \dots, x_n]$ platí $I = (f_1, \dots, f_r)$ pre nejaké polynómy $f_1, \dots, f_r \in K[x_1, \dots, x_n]$.

Uvažujme ideál

$$J := (f_1, \dots, f_r, x_{n+1}g - 1) < K[x_1, \dots, x_{n+1}].$$

Potom $\mathcal{V}(J) = \emptyset$ : ak $f_1(\alpha) = \dots = f_r(\alpha) = 0$ pre nejaké $\alpha \in K^n$, tak aj $g(\alpha) = 0$, pretože $g \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$. Teda $\forall (\alpha, \alpha_{n+1}) \in \mathcal{V}(J)$ :

$$\alpha_{n+1} g(\alpha, \alpha_{n+1}) - 1 = \alpha_{n+1} g(\alpha) - 1 = -1 \neq 0,$$

z čoho dostávame, že $\forall (\alpha, \alpha_{n+1}) \in \mathcal{V}(J) : (\alpha, \alpha_{n+1}) \notin \mathcal{V}(J)$. Takže $\mathcal{V}(J) = \emptyset$.

Teda podľa vety 1.6 $J$ nie je vlastný ideál: Z vety 1.6 časť 2 vieme, že každý maximálny ideál $J_1$ v $K[x_1, \dots, x_{n+1}]$ je tvaru $J_1 = (x_1 - p_1, \dots, x_{n+1} - p_{n+1})$, kde $p_1, \dots, p_{n+1} \in K$, teda pre daný bod $(p_1, \dots, p_{n+1})$ platí, že $(p_1, \dots, p_{n+1}) \in \mathcal{V}(J_1)$, takže $\mathcal{V}(J_1) \neq \emptyset$. Z vlastností variet a ideálov vieme, že ak $J_2 \subseteq J_1$, tak $\mathcal{V}(J_2) \supseteq \mathcal{V}(J_1)$. Keďže $\mathcal{V}(J) = \emptyset$, tak neexistuje maximálny ideál $J_1$ taký, že $\mathcal{V}(J) \supseteq \mathcal{V}(J_1)$. Takže $J$ nie je maximálny ideál a ani nie je podmnožinou nejakého maximálneho ideálu, teda $J$ je nevlastným ideálom.

Z toho dostávame, že $J = K[x_1, \dots, x_{n+1}]$, teda $1 \in J$, takže existujú $a_i, b \in K[x_1, \dots, x_{n+1}]$, pre $i = 1, \dots, r$ také, že

$$1 = \sum_{i=1}^{r} a_i f_i + b(x_{n+1}g - 1). \tag{1.1}$$

Označme $y = \frac{1}{x_{n+1}}$. Potom po dosadení $y$ do (1.1) dostaneme výraz s nejakými kladnými mocninami $y$ v menovateľoch, takže túto novú rovnicu vyjadrenia jednotky vynásobíme prvkom $y^N$, kde $N \in \mathbb{N}$ je volené tak, aby sme sa týchto menovateľov zbavili. Teda dostaneme

$$y^N = \sum_{i=1}^{r} c_i f_i + d(g - y),$$

kde $c_i, d \in K[x_1, \dots, x_n, y]$. Následnou substitúciou $y = g$ dostávame

$$g^N = \sum_{i=1}^{r} c_i f_i + d(g - g) = \sum_{i=1}^{r} c_i f_i \in I,$$

pretože $\forall i \in \{1, \dots, r\} : f_i \in I$ a $I$ je ideál. Teda $g \in \sqrt{I}$.

□

Vetou 1.7 a predošlými zisteniami sme teda dostali bijektívnu korešpondenciu medzi množinou radikálnych ideálov v $K[x_1, \dots, x_n]$ a množinou afinných algebraických variet v $\mathbb{A}^n$. Teraz budeme chcieť popísať morfizmy medzi afinnými varietami.

Teraz popíšeme morfizmy medzi afinnými varietami. Tie budeme využívať na afinné zmeny súradníc pre jednoduchšie dokazovanie neskorších tvrdení.

**Definícia 1.8.** *Nech $V \subseteq \mathbb{A}^m$, $W \subseteq \mathbb{A}^n$ sú afinné algebraické variety. Potom* morfizmom afinných algebraických variet *rozumieme funkciu $F : V \to W$, ktorá je reštrikciou na $V$ nejakého polynomiálneho zobrazenia $G : \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^n$, kde polynomiálnym zobrazením $G$ rozumieme $(g_1, \dots, g_n)$, také, že $\forall i \in \{1, \dots, n\} : g_i \in K[x_1, \dots, x_m]$. Morfizmus $F$ nazveme* izomorfizmus, *ak k nemu existuje inverzná funkcia $F^{-1} : W \to V$ taká, že je taktiež morfizmom algebraických variet.*

*Poznámka.* Ako sme napísali pred definíciou morfizmu afinnných variet, tak morfizmy budeme v tejto práci používať na afinnú zmenu súradníc. Afinnou zmenou súradníc rozumieme morfizmus

$$\begin{aligned} F : \mathbb{A}^n &\to \mathbb{A}^n, \\ x &\mapsto Ax + b, \end{aligned}$$

kde $A \in \mathbf{GL}_n(K)$ a $b$,$x$ sú stĺpcové vektory s dĺžkou $n$ a prvkami z $K$. Keďže $A \in \mathbf{GL}_n(K)$, tak $F$ má inverz, konkrétne

$$\begin{aligned} F^{-1} : \mathbb{A}^n &\to \mathbb{A}^n, \\ y &\mapsto A^{-1}y - A^{-1}b, \end{aligned}$$

teda zmena súradníc je dokonca automorfizmus, čiže po zmene súradníc sa môžeme vždy vrátiť k pôvodným súradniciam.

# 2. Projektívne algebraické variety

Zavedieme projektívny priestor a ďalšie analogické projektívne pojmy k už zavedeným afinným pojmom. Hlavným dôvodom, prečo pracujeme v projektívnych priestoroch je, že na rozdiel od afinných priestorov sa projektívne variety vždy pretnú v „správnom počte“ bodov za predpokladu, že teleso je algebraicky uzavreté.

**Definícia 2.1.** Projektívnym $n$-priestorom $\mathbb{P}^n_K$ *nad* $K$ *(respekíve* $\mathbb{P}^n$*) rozumieme množinu* $\mathbb{A}^{n+1}_K \backslash \{(0,\dots,0)\}$ *modulo ekvivalencia: Ak* $x \in \mathbb{A}^{n+1}_K \backslash \{(0,\dots,0)\}$ *je skalárnym násobkom* $y \in \mathbb{A}^{n+1}_K$*, tak body* $x$ *a* $y$ *sú ekvivalentné. Body* $\mathbb{P}^n$ *píšeme v tvare* $(x_0 : \dots : x_n)$*, ktorý značí celú triedu ekvivalencie bodu* $(x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{A}^{n+1} \backslash \{(0,\dots,0)\}$*. Zápis* $(x_0 : \dots : x_n)$ *nazývame* homogénnymi súradnicami *bodu.*

Z definície projektívneho priestoru vidíme, že projektívnu varietu nemôžeme zaviesť rovnako ako afinnú. To je preto, že ak je nejaký bod koreňom polynómu, tak potrebujeme, aby celá jeho trieda ekvivalencie bola koreňom. To ale obecne neplatí. Na druhú stranu, ak sa obmedzíme akurát na homogénne polynómy, tak tento problém nám odpadne.

**Definícia 2.2.** *Polynóm* $f \in K[x_0,\dots,x_n]$, $f = \sum \lambda_{r_0,\dots,r_n} x_0^{r_0} \dots x_n^{r_n}$ *nazveme* homogénny*, ak* $\exists d \in \mathbb{N}_0 : r_0 + \dots + r_n = d$ *kedykoľvek* $\lambda_{r_0,\dots,r_n} \neq 0$*. Ak je* $f \neq 0$*, tak je* $d$ *určené jednoznačne a platí* $d = \mathrm{st}(f)$*.* [1]

Problém, ktorý sme spomenuli pred definíciou homogénneho polynómu odpadne z dôvodu, že ak je $f$ homogénny polynóm stupňa $d$, tak pre ľubovoľné $(x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}_K$ a $c \in K$ platí, že $f(cx_0,\dots,cx_n) = c^d f(x_0,\dots,x_n)$. Teda, ak je $c \neq 0$, tak $(cx_0,\dots,cx_n)$ je koreňom $f$ práve vtedy, keď je $(x_0,\dots,x_n)$ koreňom $f$, čiže v prípade homogénnych polynómov platí, že ak je bod $p \in \mathbb{A}^{n+1} \backslash \{0,\dots,0\}$ koreňom polynómu, tak je jeho koreňom celá trieda ekvivalencie príslušná bodu $p$. Taktiež z tejto vlastnosti vidno, že hodnota polynómu v bode $p \in \mathbb{P}^n$ nie je dobre definovaná, pretože pre iné body ako korene je hodnota polynómu závislá od voľby reprezentácie triedy ekvivalencie.

**Definícia 2.3.** *Nech* $C$ *je množina homogénnych polynómov v* $K[x_0,\dots,x_n]$*. Potom množinu*

$$\mathcal{V}(C) = \{p \in \mathbb{P}^n : \forall f \in C, f(p) = 0\}$$

*nazveme* projektívnou algebraickou varietou *príslušnou množine* $C$*.*

*Poznámka.* Rovnako ako v afinnom prípade, aj pri projektívnych varietách platí, že sú uzavreté na konečné zjednotenia a ľubovoľné prieniky. Taktiež analogicky ako pri afinných varietách, aj v tomto prípade dostávame, že $\mathbb{P}^n = \mathcal{V}(\emptyset)$ a $\emptyset = \mathcal{V}(1)$, kde 1 značí konštantný polynóm o hodnote 1. Z toho plynie, že aj v projektívnom prípade môžeme zaviesť Zariskeho topológiu, kde uzavretými množinami rozumieme projektívne variety v $\mathbb{P}^n$.

[1] Ak $f = 0$, tak sa $\mathrm{st}(f)$ necháva nedefinovaný, prípadne sa definuje ako záporné číslo, štandardne ako $-1$ alebo $-\infty$. V tejto práci ale nebudeme potrebovať definovať stupeň nulového polynómu.

Vzhľadom k tomu, že sme sa pred zavedením pojmu projektívnej variety obmedzili na homogénne polynómy a ukázali nezávislosť koreňov homogénnych polynómov na ich reprezentácii triedy ekvivalencie, tak pri zavedení pojmu ideál analogicky k afinnému prípadu nenastáva žiadna komplikácia.

**Definícia 2.4.** *Nech $V \subseteq \mathbb{P}^n$ je projektívna algebraická varieta. Potom* ideálom *$V$ rozumieme množinu*

$$\mathcal{I}(V) = \{f \in K[x_0, \ldots, x_n] : \forall p \in V, f(p) = 0\}.$$

*Ideál $\mathcal{I}(V) \subseteq K[x_0, \ldots, x_n]$ nazveme* homogénnym, *ak pre každé $f = \sum_{i=0}^{m} f_i \in \mathcal{I}(V)$, kde $f_i$ je homogénny polynóm stupňa $i$, platí, že $f_i \in \mathcal{I}(V)$ $\forall i \in \{0, \ldots, m\}$.*

*Poznámka.* Nech $K$ je nekonečné. Potom ideál $\mathcal{I}(V) \subseteq K[x_0, \ldots, x_n]$, kde $V \subseteq \mathbb{P}^n$ je projektívna varieta, je homogénny.

*Dôkaz.* Nech $f = \sum_{i=0}^{m} f_i \in \mathcal{I}(V)$, kde $f_i$ sú ako v definícii 2.4 a $(p_0 : \cdots : p_n) \in V$. Potom $\forall \lambda \in K$ :

$$0 = f(\lambda p_0, \ldots, \lambda p_n) = \sum_{i=0}^{m} f_i(\lambda p_0, \ldots, \lambda p_n) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i f_i(p_0, \ldots, p_n).$$

Teda dostávame, že polynóm $g(y) := \sum_{i=0}^{m} f_i(p_0, \ldots, p_n) y^i \in K[y]$ je nulový pre ľubovoľný prvok z $K$. Nenulový polynóm jednej premennej má konečne veľa koreňov, ale $K$ je nekonečné. Z toho dostávame, že $g$ je nulový polynóm, teda $\forall i \in \{0, \ldots, m\} : f_i(p_0, \ldots, p_n) = 0$, čiže $f_i \in I$ $\forall i \in \{0, \ldots, m\}$.

□

*Poznámka.* Ideál $I \subseteq K[x_0, \ldots, x_n]$ je homogénny práve vtedy, keď je generovaný konečne veľa homogénnymi polynómami.

*Dôkaz.* „$\Rightarrow$“ Nech $I = (f^{(1)}, \ldots, f^{(m)})$ je homogénny ideál a $f^{(j)} = \sum_{i=0}^{d_j} f_i^{(j)}$ $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$, kde $d_j = \mathrm{st}(f^{(j)})$. Potom $I = (f_1^{(1)}, \ldots, f_{d_1}^{(1)}, f_1^{(2)}, \ldots, f_{d_2}^{(2)}, \ldots, f_{d_m}^{(m)})$.
„$\Leftarrow$“ Nech $I = (g^{(j)} : j \in J)$, kde $J$ je indexová množina a $d_j$ je stupeň homogénneho polynómu $g^{(j)}$. Nech $f = \sum_{j \in J'} h^{(j)} g^{(j)} \in I$, kde $J' \subseteq J$ je konečná a $h^j = \sum_{b \in B_j} h_b^{(j)}$ pre $B_j \subsetneq \mathbb{N}$. Potom $f_i = \sum_{j \in J'} h_{i-d_j}^{(j)} g^{(j)} \in I$.

□

Rovnako ako v afinnom prípade, aj v projektívnom priestore nás bude zaujímať vzájomná korešpondencia medzi varietami a ideálmi. Obdobne ako v afinnom prípade, aj tu by sme ukázali, že $\mathcal{V}(\mathcal{I}(V)) = V$. Pred tým, ako vyslovíme tvrdenie ohľadom platnosti rovnosti $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = I$, pre homogénny ideál $I$, dokážeme ešte lemma o vzťahu homogénneho ideálu a jeho radikálu.

**Lemma 2.5.** *Nech $V$ je ľubovoľná projektívna varieta. Potom $\mathcal{I}(V) = \sqrt{\mathcal{I}(V)}$.*

*Dôkaz.* Toto lemma dokážeme analogicky ako v afinnom prípade. Zjavne $\mathcal{I}(V) \subseteq \sqrt{\mathcal{I}(V)}$ pre ľubovoľnú projektívnu algebraickú varietu $V$, teda stačí ukázať opačnú inklúziu. Nech $f \in \sqrt{\mathcal{I}(V)}$. Potom z definície radikálu $f^n \in \mathcal{I}(V)$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$. Teda $f^n(p) = 0$ pre $\forall p \in V$, z čoho dostávame, že $f(p) = 0$, čiže $f \in \mathcal{I}(V)$.

□

Nasledujúcu vetu aj s dôkazom viď Fulton (2008), str. 46.

**Veta 2.6** (Homogénna o nulách)**.** *Nech $K$ je algebraicky uzavreté. Ak $I$ je radikálny ideál v $K[x_0,\dots,x_n]$ a $I \neq (x_0,\dots,x_n)$, tak $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = I$.*

*Poznámka.* Oproti afinnej verzii sme požadovali naviac, aby $I \neq (x_0,\dots,x_n)$. To je z dôvodu, že v afinnom prípade $\mathcal{V}(x_0,\dots,x_n) = \{(0,\dots,0)\} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}_K$, čomu v projektívnom prípade zodpovedá $\emptyset$, pretože $(0:\dots:0) \notin \mathbb{P}^n_K$.

Rovnako ako v predošlej kapitole, aj na projektívnych varietách zavedieme pojem morfizmus. Ten budeme neskôr využívať v dôkazoch na zmenu súradníc.

**Definícia 2.7.** *Nech $V \subseteq \mathbb{P}^m$, $W \subseteq \mathbb{P}^n$ sú projektívne algebraické variety. Potom* morfizmom projektívnych variet *rozumieme funkciu $F : V \to W$ takú, že pre každé $p \in V$ existuje $d \geq 0$ a polynómy $f_0, \dots f_n \in K[x_0,\dots,x_m]$ všetky stupňa $d$ a existuje Zariskeho otvorené okolie $U \subseteq V$ bodu $p$ také, že $\forall x \in U$ platí:*

1. $\exists j \in \{0,\dots,n\} : f_j(x) \neq 0$,
2. $F(x) = (f_0(x) : \dots : f_n(x))$.

*Poznámka.* Polynómy $f_0,\dots,f_n$ požadujeme rovnakého stupňa (pre dané p $\in V$), pretože pre $f$ stupňa $d$ a $c \in K\backslash\{0\}$ platí $f(cx) = c^d f(x)$, teda ak vynásobíme homogénne súradnice konštantou, tak obraz ostane v tej istej triede ekvivalencie.

Ako si môžeme všimnúť, tak zatiaľ čo morfizmus afinných variet sme definovali ako polynomiálne zobrazenie na celých varietách, tak v prípade projektívnych variet požadujeme, aby morfizmus bol akurát lokálne polynomiálny. Na ilustráciu, prečo morfizmus medzi projektívnymi varietami nemôžeme definovať rovnako ako v prípade afinných variet uvedieme príklad. Pred ním ešte sformulujeme a dokážeme jedno lemma, ktoré v príklade využijeme.

**Lemma 2.8** (Fulton (2008), str. 24)**.** *Nech $K$ je algebraicky uzavreté, $f \in K[x_0,x_1]$ homogénny polynóm stupňa $d \geq 1$. Potom $f \| x_1^k \prod_{i=1}^{d-k}(x_0 - \lambda_i x_1)$ pre nejaké $k, \lambda_1, \dots, \lambda_{d-k}$.*

*Dôkaz.* Nech $f = x_1^k g(x_0,x_1)$, kde $x_1 \nmid g(x_0,x_1)$. Potom $g(x_0,1) = \prod_{i=1}^{d-k}(x_0 - \lambda_i)$, pretože $K$ je algebraicky uzavreté. Z toho plynie, že $g(x_0,x_1) = \prod_{i=1}^{d-k}(x_0 - \lambda_i x_1)$. □

*Príklad.* Nech $V = \mathcal{V}(x_1^2 - x_0x_2) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, $W = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ a uvažujme zobrazenia

$$\begin{aligned} G : W &\to V, \\ (a:b) &\mapsto (a^2 : ab : b^2) \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} F : V &\to W, \\ (u:v:w) &\mapsto \begin{cases} (u:v), u \neq 0, \\ (v:w), w \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Potom $(u:v) = (v:w)$ pre $u,w \neq 0$ (teda aj $v \neq 0$, pretože pracujeme na variete $V$) práve vtedy, keď

$$\begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix} \text{má hodnosť } 1 \quad \Leftrightarrow \quad \det \begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v^2 - uw = 0,$$

teda zobrazenie $F$ je dobre definované.

Zjavne sú zobrazenia $F$ a $G$ vzájomne inverzné. Zaujímalo by nás, či existuje iné inverzné zobrazenie voči $G$ také, že by bolo globálne zadané 1 predpisom. Teda nás zaujíma, či existujú homogénne polynómy $f,g \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ rovnakého stupňa $d \geq 1$ také, že $F$ je dané na celom $V$ predpisom

$$(u : v : w) \quad \mapsto \quad (f(u,v,w) : g(u,v,w)).$$

Keby také $f$ a $g$ existovali, tak by $\forall (a : b) \in W$ :

$$(a : b) = (f(a^2, ab, b^2) : g(a^2, ab, b^2)).$$

Z toho plynie, že $f(a^2, ab, b^2) = 0$ jedine v prípade, že $a = 0$. Z lemmatu 2.8, je potom $f(a^2, ab, b^2) = ca^{2d}$, kde $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, pretože $f(a^2,ab,b^2)$ je v $\mathbb{C}[a,b]$ homogénny polynóm stupňa $2d$. Z rovnosti

$$ag(a^2, ab, b^2) = bf(a^2, ab, b^2) = ca^{2d}b$$

dostávame

$$g(a^2, ab, b^2) = ca^{2d-1}b,$$

teda po dosadení $(a,b) = (0,1)$ dostaneme, že $g(a^2, ab, b^2) = 0$. Takže pri voľbe $(a,b) = (0,1)$ dostávame, že má platiť

$$(0 : 1) = (0 : 0),$$

čo je spor.

To znamená, že požadované polynómy $f$ a $g$ neexistujú, čiže morfizmus medzi projektívnymi varietami nemôže byť definovaný ako polynomiálne zobrazenie na celých varietách.

*Poznámka.* Zmenou súradníc v projektívnom prípade rozumieme morfizmus

$$\begin{aligned} F : \mathbb{P}^n &\to \mathbb{P}^n, \\ x &\mapsto Ax, \end{aligned}$$

kde $A \in \mathbf{GL}_{n+1}(K)$ a $x$ je stĺpcový vektor s dĺžkou $n + 1$ a prvkami z $K$. Keďže $A$ je matica, tak sa skutočne jedná o polynomiálne zobrazenie. Ďalej z toho, že $A \in \mathbf{GL}_{n+1}(K)$ máme dobre definovanú zmenu súradníc, pretože žiaden prvok z $\mathbb{P}^n$ nezobrazí na nulový prvok. Naviac si všimnime, že pre $x \in \mathbb{P}^n$ a $c \in K$ máme $F(cx) = A(cx) = cAx = cF(x)$, teda nech použijeme ľubovoľnú reprezentáciu bodu z $\mathbb{P}^n$, dostaneme pri zmene súradníc ten istý obraz. Analogicky ako v afinnom prípade, aj v projektívnom prípade má zmena súradníc inverz, koknrétne

$$\begin{aligned} F^{-1} : \mathbb{P}^n &\to \mathbb{P}^n, \\ x &\mapsto A^{-1}x, \end{aligned}$$

teda zmena súradníc je automorfizmus, a tak rovnako ako v afinnom prípade aj v projektívnom platí, že po zmene súradníc sa môžeme vždy vrátiť k pôvodným súradniciam.

Ďalej zavádzame definíciu nadplochy a názvoslovia jej konkrétnych prípadov.

**Definícia 2.9.** Nadplochou *stupňa d rozumieme podmnožinu* $\mathbb{P}^n$ *vyrezanú jediným homogénnym polynómom stupňa* $d \geq 1$. Nadrovinou *rozumieme nadplochu stupňa 1.*

*V* $\mathbb{P}^3$ *nadrovinu voláme* rovina *a* priamkou *rozumieme prienik dvoch rôznych rovín.*

*V* $\mathbb{P}^2$ *nadrovinu budeme volať* priamka. Kužeľosečkou *nazývame nedegenerovanú nadplochu stupňa 2, to jest jej definičný polynóm je ireducibilný, ak nepovieme inak.*

*V texte budeme častokrát používať výraz* krivka, *čím rozumieme nadplochu (ľubovoľného stupňa).*

Nasledujúce dve vety budeme potrebovať pri ďalšom dokazovaní. V prvej sa venujeme prieniku dvoch priamok a priamky s rovinou, v druhej zas počtu núl polynómu v dvoch premenných.

**Veta 2.10** (Lazarus (2014), str. 7)**.**

1. *V projektívnej rovine sa dve rôzne priamky* $l_1$ *a* $l_2$ *vždy pretnú v jedinom bode.*

2. *Ak v* $\mathbb{P}^3$ *je* $P$ *rovina a* $l$ *priamka taká, že* $l \not\subseteq P$, *tak* $l$ *a* $P$ *sa pretnú v jedinom bode.*

*Dôkaz.*

1. Nech priamka $l_1$ je určená polynómom $\sum_{i=0}^{2} a_i x_i$, kde $a_0, a_1, a_2 \in K$ a aspoň jeden koeficient je nenulový, a analogicky $l_2$ je určená polynómom $\sum_{i=0}^{2} b_i x_i$, kde $b_0, b_1, b_2 \in K$ a aspoň jeden koeficient je nenulový. Potom ľubovoľný bod leží na priamkach $l_1$ a zároveň $l_2$ práve vtedy, keď je riešením rovníc

$$\begin{aligned} a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 &= 0, \\ b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 &= 0. \end{aligned}$$

   Keďže $l_1 \neq l_2$, tak tieto rovnice sú lineárne nezávislé, to jest matica s riadkami koeficientov príslušných týmto priamkam, $A := \left(\begin{smallmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{smallmatrix}\right)$, má hodnosť 2, teda $\dim\Big(\ker(A)\Big) = 1$. Označme si nenulové riešenie matice $A$ ako $p$. Potom každé riešenie je tvaru $\lambda p$, kde $\lambda \in K$. Ak $\lambda = 0$, tak $\lambda p \notin \mathbb{P}^2$ a pre $\lambda \in K \backslash \{0\}$ je $\lambda p$ iný reprezentant tej istej triedy ekvivalencie ako $p$. Tým dostávame jediné nenulové riešenie matice $A$, čo znamená, že sa priamky $l_1$ a $l_2$ pretnú v jedinom bode v $\mathbb{P}^2$.

2. Dôkaz tohto bodu je analogický ako dôkaz predošlého bodu. Nech rovina $P$ je určená polynómom $\sum_{i=0}^{3} a_i x_i$, kde $a_0, \ldots, a_3 \in K$ a aspoň jeden koeficient je nenulový, a $l$ je určená ako prienik 2 rôznych rovín, ktoré sú určené polynómami $\sum_{i=0}^{3} b_i x_i$ a $\sum_{i=0}^{3} c_i x_i$, kde $b_0, \ldots, b_3, c_0, \ldots, c_3 \in K$ a aspoň jeden koeficient z $b_0, \ldots, b_3$ a taktiež aspoň jeden koeficient z $c_0, \ldots, c_3$ je nenulový. Potom ľubovoľný bod leží na priamke $l$ a zároveň v rovine $P$ práve vtedy, keď je riešením rovníc

$$\begin{aligned} a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= 0, \\ b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= 0, \\ c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Keďže $l \nsubseteq P$, tak tieto rovnice sú lineárne nezávislé, to jest matica s riadkami koeficientov príslušných týmto priamkam, $A := \left(\begin{smallmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{smallmatrix}\right)$, má hodnosť 3, teda $\dim\Big(\ker(A)\Big) = 1$. Označme si nenulové riešenie matice $A$ ako $p$. Potom každé riešenie je tvaru $\lambda p$, kde $\lambda \in K$. Ak $\lambda = 0$, tak $\lambda p \notin \mathbb{P}^3$ a pre $\lambda \in K\backslash\{0\}$ je $\lambda p$ iný reprezentant tej istej triedy ekvivalencie ako $p$. Tým dostávame jediné nenulové riešenie matice $A$, čo znamená, že sa priamka $l$ a rovina $P$ pretnú v jedinom bode v $\mathbb{P}^3$.

$\square$

Teraz vyslovíme zopár definícií ohľadom vlastností variet.

**Definícia 2.11.** *Nech $V$ je varieta (afinná alebo projektívna). Potom $V$ nazveme* reducibilná*, ak*

$$\exists \emptyset \neq V_1, V_2 \subsetneq V : V = V_1 \cup V_2.$$

*Ak $V$ nie je reducibilná, tak ju nazveme* ireducibilná.

Na dokázanie pozorovania, ktoré môžeme vysloviť po zavedení pojmu ireducibilita variety, budeme potrebovať pripomenúť jednu definíciu.

**Definícia 2.12.** *Nech $R$ je okruh a $I$ jeho vlastný ideál, to jest $I$ je ideál a $I \neq R$. Potom $I$ nazveme* prvoideál*, ak pre všetky ideály $J_1, J_2$ okruhu $R$ platí, že ak $J_1 J_2 \subseteq I$, tak $J_1 \subseteq I$, alebo $J_2 \subseteq I$.*

V dôkaze ale využijeme ekvivalentné tvrdenie, ktoré vraví, že vlastný ideál $I$ okruhu $R$ je prvoideál práve vtedy, keď $\forall a,b \in R : ab \in I \Rightarrow (a \in I$ alebo $b \in I)$.

**Lemma 2.13.** *Ako v afinnom, tak aj v projektívnom prípade platí, že nadplocha [2] je ireducibilná práve vtedy, keď jej definujúci polynóm je mocninou ireducibilného polynómu.*

*Dôkaz.* Lemma dokážeme pre projektívny prípad, afinný by sa ukázal analogicky. Nech $K$ je algebraicky uzavreté, $S = \mathcal{V}(f) \subseteq \mathbb{P}^n$ nadplocha, kde $f \in K[x_0, \ldots, x_n]$ je homogénny polynóm stupňa $d \geq 1$. Potom je $S$ ireducibilná práve vtedy, keď $\mathcal{I}(S) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(f))$ je prvoideál (viď Kala, str. 43). Ďalej z vety 2.6 dostávame, že $\mathcal{I}(S) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(f)) = \sqrt{(f)}$.

Nech rozklad $f$ na ireducibilné homogénne polynómy je $f = f_1^{n_1} \ldots f_k^{n_k}$, kde $f_1, \ldots, f_k \in K[x_0, \ldots, x_n]$ sú po dvoch rôzne a $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$. Ireducibilný rozklad homogénneho polynómu zostáva vždy z homogénnych polynómov (viď Fulton (2008), str. 24). Potom

$$\sqrt{(f)} = \sqrt{(f_1^{n_1} \ldots f_k^{n_k})} = (f_1 \ldots f_k).$$

Teda dostávame, že $S$ je ireducibilná práve vtedy, keď $(f_1 \ldots f_k)$ je prvoideál, čo z ekvivalentného tvrdenia prvoideálu za definíciou 2.12 nastáva práve vtedy, keď

[2] Pojem nadplochy sme v afinnom prípade síce nedefinovali, ale definícia je analogická projektívnej verzii, teda nadplochou stupňa $d$ rozumieme podmnožinu $\mathbb{A}^n$ vyrezanú jediným polynómom stuňa $d \geq 1$.

$k = 1$, to jest keď $f$ a $f_1^{n_1}$ generujú ten istý ideál, kde $f_1$ je ireducibilný homogénny polynóm.

$\square$

**Definícia 2.14.** *Nech $V \subseteq \mathbb{P}^n$ je projektívna varieta a $p \in V$.* Dotyčnicovým priestorom *k variete $V$ v bode $p$ rozumieme projektívnu varietu*

$$T_pV = \bigcap_{f \in \mathcal{I}(V)} \mathcal{V}\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot x_i\right).$$

Dotyčnicový priestor k projektívnej variete je v danom bode ~~skutočne~~ opäť projektívnou varietou, pretože pre každé $f \in \mathcal{I}(V)$ je $\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot x_i \in K[x_0, \ldots, x_n]$ homogénny polynóm stupňa 1, teda $T_pV$ je prienikom nadrovín.

Taktiež je vhodné si uvedomiť, že do každej parciálnej derivácie dosadzujeme ten istý reprezentant triedy ekvivalencie. To je z dôvodu, že v prípade, že daná trieda ekvivalencie nie je koreň polynómu, tak polynóm môže pre jednotlivé reprezentanty triedy ekvivalencie nadobúdať rôzne hodnoty.

*Poznámka.* Dotyčnicový priestor k variete v afinnom prípade definujeme analogicky, to jest pre $V \subseteq \mathbb{A}^n$ afinnú varietu a $p = (p_1, \ldots, p_n) \in V$ rozumieme dotyčnicovým priestorom k $V$ v $p$ afinnú varietu

$$T_pV = \bigcap_{f \in \mathcal{I}(V)} \mathcal{V}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot (x_i - p_i)\right).$$

Počítať dotyčnicový priestor (či už v afinnom alebo projektívnom prípade) ako prienik cez všetky polynómy v príslušnom ideály nie je praktické. O tom, že prechádzať cez všetky polynómy v ideále variety nie je potrebné, pojednáva nasledujúce lemma. Rozoberieme síce iba projektívny prípad, ale afinný by sa dokázal analogicky.

**Lemma 2.15.** *Nech $V \subseteq \mathbb{P}^n$ je projektívna varieta, $p \in V$ a $\mathcal{I}(V) = (f_1, \ldots, f_r)$. Potom*

$$T_pV = \bigcap_{f \in \{f_1, \ldots, f_r\}} \mathcal{V}\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot x_i\right).$$

*Dôkaz.* Nech $g \in (f_1, \ldots, f_r)$, ale $g \notin \{f_1, \ldots, f_r\}$. Potom $g = \sum_{j=1}^{r} a_j f_j$, kde $a_1, \ldots, a_r \in K[x_0, \ldots, x_n]$ sú homogénne polynómy, aspoň jeden polynóm $a_j$ je nenulový a platí

$$\begin{aligned}
&\bigcap_{f \in \{f_1, \ldots, f_r\}} \mathcal{V}\left(\sum_{i=0}^{n} \tfrac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot x_i\right) \\
&= \mathcal{V}\left(\bigcup_{f \in \{f_1, \ldots, f_r\}} \left\{\sum_{i=0}^{n} \tfrac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot x_i\right\}\right) \\
&= \mathcal{V}\left(\sum_{i=0}^{n} \tfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(p) \cdot x_i, \ldots, \sum_{i=0}^{n} \tfrac{\partial f_r}{\partial x_i}(p) \cdot x_i\right) \\
&= \mathcal{V}\left(\sum_{i=0}^{n} \tfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(p) \cdot x_i, \ldots, \sum_{i=0}^{n} \tfrac{\partial f_r}{\partial x_i}(p) \cdot x_i, \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=0}^{n} \left(a_j \tfrac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)(p) x_i\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathcal{V}\left(\sum_{i=0}^{n}\tfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(p)\cdot x_i,\dots,\sum_{i=0}^{n}\tfrac{\partial f_r}{\partial x_i}(p)\cdot x_i,\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{r}\left(a_j\tfrac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)(p)x_i\right)\\
&= \mathcal{V}\left(\sum_{i=0}^{n}\tfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(p)\cdot x_i,\dots,\sum_{i=0}^{n}\tfrac{\partial f_r}{\partial x_i}(p)\cdot x_i,\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=1}^{r}\left(f_j\tfrac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)(p)+\left(a_j\tfrac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)(p)\right)\right)\\
&= \mathcal{V}\left(\sum_{i=0}^{n}\tfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(p)\cdot x_i,\dots,\sum_{i=0}^{n}\tfrac{\partial f_r}{\partial x_i}(p)\cdot x_i,\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=1}^{r}\left(f_j\tfrac{\partial a_j}{\partial x_i}+a_j\tfrac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)(p)\right)x_i\right)\\
&= \mathcal{V}\left(\sum_{i=0}^{n}\tfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(p)\cdot x_i,\dots,\sum_{i=0}^{n}\tfrac{\partial f_r}{\partial x_i}(p)\cdot x_i,\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=1}^{r}\tfrac{\partial(a_jf_j)}{\partial x_i}(p)\right)x_i\right)\\
&= \mathcal{V}\left(\sum_{i=0}^{n}\tfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(p)\cdot x_i,\dots,\sum_{i=0}^{n}\tfrac{\partial f_r}{\partial x_i}(p)\cdot x_i,\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial\left(\sum_{j=1}^{r}a_jf_j\right)}{\partial x_i}(p)\cdot x_i\right)\\
&= \bigcap_{f\in\{f_1,\dots,f_r,g\}}\mathcal{V}\left(\sum_{i=0}^{n}\tfrac{\partial f}{\partial x_i}(p)\cdot x_i\right),
\end{aligned}
$$

kde sme v prvej rovnosti použili uzavretosť projektívnych variet na ľubovoľný počet prienikov, v tretej sme pre každé $j \in \{1,\dots,r\}$ vynásobili $j$-ty polynóm vo variete číslom $a_j(p)$ a následne všetky polynómy sčítali a pripísali do variety. Týmto sme nepridali žiaden polynóm, ktorý by mal za koreň ľubovoľný iný prvok ako $f_1,\dots,f_r$, teda sa ani nemohlo stať, že by sme do variety pridali ďalší prvok. Vo štvrtej rovnosti sme vymenili sumy v poslednom polynóme, čo môžeme, pretože sa jedná o dve konečné sumy. Následne sme v piatej rovnosti pričítali nulu vo vhodnom tvare, kde sme využili to, že pre $p \in V$ a $\forall j \in \{1,\dots,r\} : f_j \in \mathcal{I}(V)$, teda $\forall j \in \{1,\dots,r\} : f_j(p) = 0$, čiže taktiež $\left(f_j\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)(p) = 0\ \forall j \in \{1,\dots,r\}\ \forall i \in \{0,\dots,n\}$. V siedmej rovnosti sme použili pravidlo pre deriváciu súčinu a v ôsmej zas linearitu derivácie.

Tým sme dostali, že prienik cez všetky generátory nám dáva tú istú varietu ako prienik cez všetky generátory a ich ľubovoľnú lineárnu kombináciu. V ideály ale žiadne iné prvky ako lineárna kombinácia generátorov daného ideálu nie sú. Teda dostávame, že

$$T_pV = \bigcap_{f\in\{f_1,\dots,f_r\}}\mathcal{V}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\cdot x_i\right).$$

□

**Definícia 2.16.** *Nech $V = \mathcal{V}(f)$ je nadplocha v $\mathbb{P}^n$. Povieme, že $V$ je* singulárna *v $p \in V$, ak*

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}(p),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0.$$

*Ak $V$ nie je singulárna v žiadnom bode, tak povieme, že $V$ je* nesingulárna*.*

Singularita nadplochy v danom bode je taktiež dobre definovaná, pretože ak je $f$ homogénny polynóm stupňa $d+1$ a pre nejaké $i \in \{0,\dots,n\}$ je $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$, tak pre ľubovoľnú inú reprezentáciu $q$ tohto bodu takú, že $q = c\cdot p$ platí, že $\frac{\partial f}{\partial x_i}(q) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(c\cdot p) = c^d\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = c^d\cdot 0 = 0$, kde sme použili to, že ak je $f$ homogénny polynóm stupňa $d+1$, tak $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ je homogénny polynóm stupňa $d$.

Taktiež je dobré si uvedomiť, že zmena súradníc nemá vplyv na ireducibilitu ani na singularitu.

*Poznámka.* V afinnom prípade definujeme pojem singulárnej, respektíve nesingulárnej nadplochy analogicky ako v projektívnom prípade.

# 3. Počet priamok na kubickej nesingulárnej nadploche

V tejto kapitole prezentujeme výsledky z publikácií Reid (1988), §7 a Hulek (2003), kapitola 5.

Od tejto chvíle až do konca práce uvažujeme teleso K algebraicky uzavreté a charakteristiky rôznej od 2. Ďalej označme $f \in K[x_0, \ldots, x_3]$ ako ireducibilný homogénny polynóm stupňa 3 definujúci nesingulárnu kubickú nadplochu $S$, teda $S = \mathcal{V}(f) \subseteq \mathbb{P}^3$.

V jednotlivých podkapitolách dokážeme dielčie tvrdenia vedúce ku kýženému tvrdeniu o počte priamok na nadploche $S$.

## 3.1 Prienik roviny a nadplochy $S$

**Definícia 3.1.** *Nech $f \in K[x_0, \ldots, x_n]$ a $p = (p_0, \ldots, p_n) \in \mathbb{A}^{n+1} \backslash \{0, \ldots, 0\}$ je konkrétna reprezentácia triedy ekvivalencie $(p_0 : \cdots : p_n)$. V ďalšom budeme používať značenie $\nabla f(p) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right)^\top$.*

**Lemma 3.2.** *Nech $P \subseteq \mathbb{P}^3$ je rovina a po vhodnej zmene súradníc $P = \mathcal{V}(x_3)$. Potom prienik roviny $P$ s nadplochou $S$ je jednou z možností:*

1. *kubická krivka definovaná ireducibilným homogénnym polynómom v premenných $x_0, x_1, x_2$,*
2. *kužeľosečka a priamka,*
3. *3 rôzne priamky.*

*Dôkaz.* Najprv ukážeme, že všetky tri možnosti môžu nastať a potom dokážeme, že prípad, kedy prienik $S \cap P$ sú 3 priamky, ale nie všetky z nich rôzne, nenastane.

Keďže sme vhodnou zmenou súradníc previedli $P$ na $\mathcal{V}(x_3)$, tak vzhľadom k tejto zmene súradníc, je $S$ definovaná ireducibilným homogénnym polynómom $g \in K[x_0, \ldots, x_3]$ stupňa 3, teda $S \cap P$ je definovaný nejakým polynómom $h \in K[x_0, x_1, x_2]$, ktorý dostaneme z polynómu $g$ tak, že položíme $x_3 = 0$. Potom pre polynóm $h$ nastane jedna z nasledujúcich možností:

1. je ireducibilný,
2. je súčinom ireducibilného kvadratického polynómu a lineárneho polynómu,
3. alebo je súčinom troch lineárnych polynómov.

V prípade, že $h$ je ireducibilný, tak sa jedná o ireducibilnú nadplochu projektívnej roviny , to jest prvá možnosť z tvrdenia lemmatu. Ak $h$ je súčinom ireducibilného kvadratického polynómu a lineárneho polynómu, tak z uzavretosti variet na konečné zjednotenia plynie, že sa jedná o druhú možnosť z tvrdenia lemmatu, a ak je $h$ súčinom troch lineárnych polynómov, tak opäť z uzavretosti variet na konečné zjednotenia dostávame, že sa jedná o prípad, kedy prienik $S \cap P$ sú 3 nie nutne rôzne priamky.

Ostáva dokázať, že keď $h$ je súčinom troch lineárnych polynómov, tak tieto tri polynómy sú navzájom rôzne. Nech $l$ je ľubovoľná priamka v $S \cap P$. Ukážeme, že lineárny polynóm definujúci $l$ nachádzajúci sa v súčine $h$ ako činiteľ má mocninu 1. Vhodnou zmenou súradníc dostaneme, že $l = \mathcal{V}(x_2, x_3)$, to jest polynóm definujúci $l$ v $P$ je $x_2$. Pre spor predpokladajme, že $h = x_2^2 a$, kde $a \in K[x_0, x_1, x_2]$ je homogénny lineárny polynóm. Teda $g = x_2^2 b + x_3 c$, kde $b, c \in K[x_0, \ldots, x_3]$, $b$ je lineárny a $c$ je kvadratický homogénny polynóm. Potom je ale z definície singularity nadplochy $S$ singulárna vo všetkých bodoch, kde platí, že $x_2 = x_3 = 0$ a $c = 0$, pretože

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2^2 \frac{\partial b}{\partial x_0}(\mathbf{x}) + x_3 \frac{\partial c}{\partial x_0}(\mathbf{x}) \\ x_2^2 \frac{\partial b}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + x_3 \frac{\partial c}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ 2x_2 b(\mathbf{x}) + x_2^2 \frac{\partial b}{\partial x_2}(\mathbf{x}) + x_3 \frac{\partial c}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ x_2^2 \frac{\partial b}{\partial x_3}(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x}) + x_3 \frac{\partial c}{\partial x_3}(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_3)$.

Množina takýchto bodov je zjavne neprázdna, pretože je to množina všetkých koreňov polynómu $c$ ležiacich na priamke $l$. Pre polynóm $c$ môžu na priamke $l$ nastať dva prípady. Buď bude $c$ nulový polynóm a teda na priamke $l$ bude jeho koreň každý bod $(x_0 : x_1 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^3$, alebo bude $c$ homogénny polynóm stupňa 2 v premenných $x_0, x_1$. V druhom prípade bude mať $c$ na $l$ aspoň jeden koreň, čo vieme z vety 2.8.

Teda $S$ je singulárna na nejakej neprázdnej množine, čo je spor s predpokladom, že $S$ je nesingulárna. Teda $h \neq x_2^2 a$ a dostávame, že $h$ je súčinom troch rôznych homogénnych polynómov stupňa 1. Čiže sme dokázali aj poslednú možnosť prieniku roviny $P$ s nadplochou $S$.

□

## 3.2 Existencia priamky na nadploche $S$

V tejto časti dokážeme, že na nadploche $S$ existuje priamka. Aby sme to dokázali, tak sa budeme venovať prieniku $S \cap T_pS$, kde $p$ je bodom $S$. Z lemmatu 3.2 máme, že $S \cap T_pS$ je rovinná kubická krivka. V prípade, že je táto krivka reducibilná, tak sa jedná o body 2 a 3 v lemmate 3.2, a teda máme dokázanú existenciu priamky na nadploche $S$, pretože priamka je v oboch prípadoch obsiahnutá v $S \cap T_pS$. Preto sa v ďalšom v tejto sekcii budeme venovať prípadu, kedy $S \cap T_pS$ je ireducibilná kubická krivka. V tomto prípade ukážeme, že na $S$ leží priamka prechádzajúca bodom v $S \cap T_pS$.

**Lemma 3.3.**

1. *Nech $p$ je bodom $S$ a $S \cap T_pS$ je ireducibilná kubická krivka. Potom $S \cap T_pS$ je singulárna krivka s bodom singularity $p$.*

2. *Nech $S \cap T_pS$ je ireducibilná kubická krivka pre každé $p \in S$. Potom má v bode $p$ hrot, to jest až na vhodnú zmenu súradníc je $S \cap T_pS$ definovaná polynómom $x_1^2 x_2 - x_0^3$.*

*Dôkaz.*

1. Vhodnou zmenou súradníc môžeme previesť $T_pS$ na $\mathcal{V}(x_2)$ a bod $p$ na $(0 : 0 : 0 : 1)$. Potom
$$f = x_2x_3^2 + x_3g + h,$$
kde $g, h \in K[x_0, x_1, x_2]$ sú kvadratický a kubický homogénny polynóm v tomto poradí. Označme $u(x_0, x_1, x_3) := f(x_0, x_1, 0, x_3)$, teda polynóm $f$ na $T_pS$ je zhodný s polynómom $u$. Potom
$$\begin{aligned}\nabla u(0,0,1) &= \nabla\Big(x_3g(x_0,x_1,0) + h(x_0,x_1,0)\Big)(0,0,1)\\ &= \begin{pmatrix} x_3\frac{\partial g(x_0,x_1,0)}{\partial x_0} + \frac{\partial h(x_0,x_1,0)}{\partial x_0} \\ x_3\frac{\partial g(x_0,x_1,0)}{\partial x_1} + \frac{\partial h(x_0,x_1,0)}{\partial x_1} \\ g(x_0,x_1,0)\end{pmatrix}(0,0,1)\\ &= \mathbf{0},\end{aligned}$$
kde sme v tretej rovnosti využili to, že $g, h \in K[x_0, x_1, x_2]$ sú homogénne a stupňa väčšieho ako 1, teda ich parciálne derivácie prvého rádu derivované podľa $x_0$ a $x_1$, sú homogénne polynómy stupňa aspoň 1. Z toho plynie, že po dosadení bodu $(0 : 0 : 1)$ sa tieto parciálne derivácie rovnajú 0. Taktiež polynóm $g(x_0, x_1, 0)$ po dosadení bodu $(0 : 0 : 1)$ sa rovná 0. Vzhľadom k tomu, že sme previedli $T_pS$ na $\mathcal{V}(x_2)$ a bod $p$ na $(0 : 0 : 0 : 1)$ tým dostávame, že skutočne $S \cap T_pS$ je singulárna s bodom singularity $p$.

2. Ak by neplatilo, že $S \cap T_pS$ je ireducibilná pre každé $p \in S$, tak by sme sa pre takéto $p$ dostali do situácie v úvode tejto podkapitoly a teda by sme existenciu priamky na nadploche $S$ mali dokázanú. Ukážeme, že $S \cap T_pS$ má hrot pre $p \in S$. Keďže $g$ je kvadratický polynóm, tak ho vieme zapísať ako
$$g(x_0, x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} a_{ij}x_ix_j, \tag{3.1}$$
kde $\forall i,j \in \{0, 1, 2\} : a_{ij} = a_{ji}$. Potom hessián $H_f(p)$ polynómu $f$ v bode $p$ je
$$\begin{aligned}H_f(p) &= \det\begin{pmatrix} x_3g_{x_0x_0} + h_{x_0x_0} & x_3g_{x_1x_0} + h_{x_1x_0} & x_3g_{x_2x_0} + h_{x_2x_0} & g_{x_0} + x_3g_{x_3x_0} + h_{x_3x_0} \\ x_3g_{x_1x_0} + h_{x_1x_0} & x_3g_{x_1x_1} + h_{x_1x_1} & x_3g_{x_2x_1} + h_{x_2x_1} & g_{x_1} + x_3g_{x_3x_1} + h_{x_3x_1} \\ x_3g_{x_2x_0} + h_{x_2x_0} & x_3g_{x_2x_1} + h_{x_2x_1} & x_3g_{x_2x_2} + h_{x_2x_2} & 2x_3 + g_{x_2} + x_3g_{x_3x_2} + h_{x_3x_2} \\ g_{x_0} + x_3g_{x_3x_0} + h_{x_3x_0} & g_{x_1} + x_3g_{x_3x_1} + h_{x_3x_1} & 2x_3 + g_{x_2} + x_3g_{x_3x_2} + h_{x_3x_2} & 2x_2 + 2g_{x_3} + x_3g_{x_3x_3} + h_{x_3x_3}\end{pmatrix}(p)\\ &= \det\begin{pmatrix} 2a_{00} & 2a_{10} & 2a_{20} & 0 \\ 2a_{10} & 2a_{11} & 2a_{21} & 0 \\ 2a_{20} & 2a_{21} & 2a_{22} & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}\\ &= -2^4 \cdot \det\begin{pmatrix} a_{00} & a_{10} \\ a_{10} & a_{11}\end{pmatrix},\end{aligned}$$
kde používame značenie $g_{x_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i}, g_{x_ix_j} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}, h_{x_ix_j} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}$ pre všetky $i, j$. V prvej rovnosti sme použili definíciu hessiánu a fakt, že $f_{x_ix_j} = f_{x_jx_i}$

pre každé $i, j \in \{1, \dots, 3\}$. V druhej rovnosti využívame, že parciálne derivácie, kde sme derivovali podľa $x_3$, sú nulové, pretože $g$ ani $h$ nie sú polynómy s premennou $x_3$ a, analogicky ako keď sme počítali $\nabla(f \restriction_{T_pS})(p)$, taktiež to, že $g, h \in K[x_0, x_1, x_2]$ sú homogénne polynómy stupňa 2 a 3, teda všetky ich parciálne derivácie prvého, respektíve druhého rádu sú homogénne polynómy stupňa 1, teda po dosadení bodu $p$ sa vynulujú. Čo sa týka parciálnych derivácií $g$ druhého rádu, tak sa redukujú na príslušné koeficienty podľa (3.1). Nakoniec v poslednej rovnosti sme na výpočet determinantu použili rozvoj podľa posledného riadku a následne rozvoj podľa posledného stĺpca.

Ďalej si uvedomme, že to, či sa hessián rovná nule je nezávislé na zmene súradníc, pretože ak označíme $M = (m_{ij})_{4\times 4} \in \mathbf{GL}_4(K)$ ako maticu určujúcu zmenu súradníc v $\mathbb{P}^3$, tak pre prvok $h_{ij}^{f\circ M}$ na mieste $(i,j)$ Hessovej matice príslušnej $f \circ M$ platí

$$h_{ij}^{f\circ M} = \sum_{k=0}^{3} \sum_{l=0}^{3} m_{ik} m_{lj} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

z čoho plynie, že

$$0 = H_{f\circ M} = (\det M)^2 H_f \;\Leftrightarrow\; H_f = 0,$$

pretože $\det M \neq 0$. V našom prípade teda dostávame, že

$$H_f(p) = 0 \;\Leftrightarrow\; \det \begin{pmatrix} a_{00} & a_{10} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; g \restriction_{T_pS} = (\sqrt{a_{00}} x_0 + \sqrt{a_{11}} x_1)^2,$$

teda $H_f(p) = 0$ práve vtedy, keď $g \restriction_{T_pS}$ je dvojnásobná priamka, alebo $g \restriction_{T_pS} \equiv 0$. V druhom prípade ale dostávame, že $f \restriction_{T_pS} = f(x_0, x_1, 0, x_3) = h(x_0, x_1, 0)$, teda $f \restriction_{T_pS}$ je homogénny kubický polynóm nad algebraicky uzavretým telesom. Z lemmatu 2.8 je potom $f$ na $T_pS$ zjednotením nanajvýš troch priamok. To je ale v spore s tým, že $S \cap T_pS$ je ireducibilná krivka. Potom $g \restriction_{T_pS}$ je dvojnásobná priamka a môžeme písať

$$g \restriction_{T_pS} = g(x_0, x_1, 0) = l^2(x_0, x_1),$$

kde $l \in K[x_0, x_1]$ je homogénny lineárny polynóm. Použitím vhodnej zmeny súradníc môžeme predpokladať, že $l(x_0, x_1) = x_1$, teda $f \restriction_{T_pS}$ môžeme zapísať ako

$$f \restriction_{T_pS} = f(x_0, x_1, 0, x_3) = x_3 x_1^2 + a x_0^3 + b x_0^2 x_1 + c x_0 x_1^2 + d x_1^3,$$

kde $a, b, c, d \in K$. Následnou substitúciou $x_0 = x_0' - \frac{b}{3a} x_1$, ktorú môžeme použiť, pretože ak by $a = 0$, tak $x_1$ delí $f \restriction_{T_pS}$, teda $S \cap T_pS$ je reducibilná, čo je spor s predpokladom, dostávame

$$
\begin{aligned}
f\restriction_{T_pS} &= x_3x_1^2 + a\left(x_0' - \frac{b}{3a}x_1\right)^3 + b\left(x_0' - \frac{b}{3a}x_1\right)^2 x_1 \\
&\quad + c\left(x_0' - \frac{b}{3a}x_1\right)x_1^2 + dx_1^3 \\
&= x_3x_1^2 + a(x_0')^3 - 3a\frac{b}{3a}(x_0')^2x_1 + 3a\frac{b^2}{9a^2}x_0'x_1^2 - a\frac{b^3}{27a^3}x_1^3 \\
&\quad + b(x_0')^2x_1 - 2b\frac{b}{3a}x_0'x_1^2 + b\frac{b^2}{9a^2}x_1^3 + cx_0'x_1^2 - c\frac{b}{3a}x_1^3 + dx_1^3 \\
&= x_3x_1^2 + a(x_0')^3 + \frac{3ac-b^2}{3a}x_0'x_1^2 + \frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^2}x_1^3,
\end{aligned}
$$

kde $a \neq 0$. Pre zjednodušenie zápisu preznačíme koeficienty

$$
\begin{aligned}
b' &:= \frac{3ac-b^2}{3a}, \\
c' &:= \frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^2}.
\end{aligned}
$$

Potom ďalšou substitúciou

$$x_3 = -ax_3' - b'x_0' - c'x_1$$

dostávame

$$
\begin{aligned}
f\restriction_{T_pS} &= (-ax_3' - b'x_0' - c'x_1)x_1^2 + a(x_0')^3 + b'x_0'x_1^2 + c'x_1^3 \\
&= -a\left(x_1^2x_3' - (x_0')^3\right),
\end{aligned}
$$

čo je projektívne ekvivalentné $x_1^2x_2 - x_0^3$.

Zatiaľ sme dokázali, že pre $p \in S$ má $S \cap T_pS$ hrot, ak $H_f(p) = 0$.

Ostáva teda ukázať, že $S \cap \mathcal{V}(H_f) \neq \emptyset$. Keďže $f$ je kubický polynóm, tak $\mathcal{V}(H_f)$ je z definície hessiánu rovina. Potom z lemmatu 3.2 máme $S \cap \mathcal{V}(H_f) \neq \emptyset$.

□

Každá priamka je jednoznačne určená dvoma bodmi, ktorými prechádza. To nás vedie k zavedeniu nasledujúceho pojmu, ktorý nám pomôže určiť, či daná priamka leží na nadploche určenej zadaným polynómom.

**Definícia 3.4.** *Nech $g \in K[x_0, \ldots, x_n]$. Potom* polárnou formou *príslušnou polynómu $g$ rozumieme*

$$g_1(x_0, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n) := \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} y_i.$$

O geometrickom význame polárnej formy polynómu pojednáva nasledujúce lemma.

**Lemma 3.5.** *Nech $p, q \in \mathbb{P}^3$, $p \neq q$. Potom priamka prechádzajúca bodmi $p$ a $q$ (označme ju $\overline{pq}$) leží v $S$ práve vtedy, keď $f(p) = f_1(p;q) = f_1(q;p) = f(q) = 0$.*

*Dôkaz.* Z definície dotyčnicového priestoru plynie, že

$$T_pS = \mathcal{V}\left(\sum_{i=0}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)x_i\right),$$

teda

$$\overline{pq} \subseteq T_pS \Leftrightarrow f_1(p;q) = 0.$$

Každý homogénny kubický polynóm $g \in K[x_0, \dots, x_3]$ má tvar

$$g(x_0, \dots, x_3) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{i} \sum_{k=0}^{j} a_{ijk} x_i x_j x_k,$$

kde $\forall i,j,k \in \{0, \dots, 3\}, i \geq j \geq k : a_{ijk} \in K$, a aspoň jeden z týchto koeficientov je nenulový. Nech $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ a fixujme $p = (p_0 : \dots : p_3), q = (q_0 : \dots : q_3)$ ako konkrétne reprezentácie týchto tried ekvivalencie, teda ďalej uvažujeme, že $p = (p_0, \dots, p_3), q = (q_0, \dots, q_3) \in \mathbb{A}^4 \setminus \{(0,0)\}$. Potom

$$\begin{aligned}
f(\lambda_1 p + \lambda_2 q) &= \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{i} \sum_{k=0}^{j} a_{ijk}(\lambda_1 p_i + \lambda_2 q_i)(\lambda_1 p_j + \lambda_2 q_j)(\lambda_1 p_k + \lambda_2 q_k) \\
&= \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{i} \sum_{k=0}^{j} a_{ijk}(\lambda_1^3 p_i p_j p_k + \lambda_1^2 \lambda_2 p_i p_j q_k + \lambda_1^2 \lambda_2 p_i q_j p_k \\
&\quad + \lambda_1 \lambda_2^2 p_i q_j q_k + \lambda_1^2 \lambda_2 q_i p_j p_k + \lambda_1 \lambda_2^2 q_i p_j q_k + \lambda_1 \lambda_2^2 q_i q_j p_k \\
&\quad + \lambda_2^3 q_i q_j q_k) \\
&= \lambda_1^3 f(p) + \lambda_2^3 f(q) + \lambda_1^2 \lambda_2 \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{i} \sum_{k=0}^{j} a_{ijk}(p_i p_j q_k + p_i q_j p_k \\
&\quad + q_i p_j p_k) + \lambda_1 \lambda_2^2 \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{i} \sum_{k=0}^{j} a_{ijk}(p_i q_j q_k + q_i p_j q_k + q_i q_j p_k) \\
&= \lambda_1^3 f(p) + \lambda_2^3 f(q) + \lambda_1^2 \lambda_2 f_1(p;q) + \lambda_1 \lambda_2^2 f_1(q;p).
\end{aligned}$$

Keďže sme $p$ a $q$ fixovali, tak sa na $f(\lambda_1 p + \lambda_2 q)$ môžeme pozerať ako na polynóm z $K[\lambda_1, \lambda_2]$. Potom

$$\overline{pq} \subseteq S \;\Leftrightarrow\; f(\lambda_1 p + \lambda_2 q) = 0$$

pre každé $\lambda_1, \lambda_2 \in K$. Pretože je $K$ algebraicky uzavreté, tak je nekončné, teda $f(\lambda_1 p + \lambda_2 q) = 0$ pre každé $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ práve vtedy, keď $f$ je na $K[\lambda_1, \lambda_2]$ nulový polynóm, to jest má všetky koeficienty $f(p), f(q), f_1(p;q), f_1(q;p)$ rovné nule. To znamená, že

$$\overline{pq} \subseteq S \;\Leftrightarrow\; f(p) = f_1(p;q) = f_1(q;p) = f(q) = 0.$$

$\square$

Z lemmatu 3.5 dostávame, že na určenie toho, či priamka leží na nadploche budeme potrebovať vedieť, či kolekcia viacerých polynómov má spoločný koreň. Tomu sa venuje nasledujúci pojem.

**Definícia 3.6.** *Majme homogénne polynómy* $r,s \in K[x_0, x_1]$ *stupňa 2, respektíve 3, to jest*

$$\begin{aligned} r(x_0, x_1) &= a_0x_0^2 + a_1x_0x_1 + a_2x_1^2, \\ s(x_0, x_1) &= b_0x_0^3 + b_1x_0^2x_1 + b_2x_0x_1^2 + b_3x_1^3. \end{aligned}$$

*Potom* rezultant *polynómov* $r$ *a* $s$ *definujeme ako*

$$R(r,s) := \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & \\ & & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix},$$

*kde sme pre prehľadnosť vynechali nuly.*

Nasledujúce lemma hovorí o dôležitosti rezultantu.

**Lemma 3.7.** *Nech* $r, s \in K[x_0, x_1]$ *sú homogénne polynómy stupňa 2 a 3. Potom tieto polynómy majú spoločný koreň v* $\mathbb{P}^1$ *práve vtedy, keď* $R(r,s) = 0$.

*Dôkaz.* Uvažujme vektorový priestor $V$ nad telesom $K$ homogénnych polynómov v premenných $x_0$ a $x_1$ stupňa 4. Potom $\dim V = 5$ a kanonickou bázou $V$ je

$$\{x_0^4,\ x_0^3x_1,\ x_0^2x_1^2,\ x_0x_1^3,\ x_1^4\}.$$

Z toho plynie, že riadky matice určujúcej rezultant z definície 3.6 sú koeficienty polynómov

$$x_0^2r,\ x_0x_1r,\ x_1^2r,\ x_0s,\ x_1s \tag{3.2}$$

v tomto poradí. Teda $R(r,s) = 0$ práve vtedy, keď polynómy (3.2) sú lineárne závislé, čo vieme zapísať ako

$$gr = hs,$$

kde $g, h \in K[x_0, x_1]$ sú homogénne polynómy stupňa 2, respektíve 1 v tomto poradí. Potom z lemmatu 2.8 sa $g, r, h, s \in K[x_0, x_1]$ rozkladajú na súčin lineárnych členov. Z jednoznačnosti rozkladu a porovnania stupňov týchto polynómov musia byť $r$ a $s$ súdeliteľné. Z toho plynie, že $r$ a $s$ majú rovnaký aspoň jeden koreň v $\mathbb{P}^1$.

Naopak, nech $r$ a $s$ majú nejaký spoločný koreň, označme ho $p_1$. Potom je $p_1$ koreňom aj všetkých polynómov (3.2). Keďže $K$ je algebraicky uzavreté a všetky polynómy (3.2) sú homogénne stupňa 4 z $K[x_0, x_1]$, tak z lemmatu 2.8 plynie, že každý polynóm (3.2) má práve 4 korene vrátane násobností. Potom každý polynóm (3.2) vieme zapísať v tvare $l \cdot c$, kde $l, c \in K[x_0, x_1]$ sú homogénne polynómy lineárny a kubický v tomto poradí s tým, že $p_1$ je koreňom $l$. Teda polynómy (3.2) vieme zapísať ako

$$lc_1,\ lc_2,\ lc_3,\ lc_4,\ lc_5,$$

kde $l$ je ako vyššie a $c_1, \ldots, c_5$ sú ako $c$ vyššie.

Ukážeme, že $c_1, \dots, c_5$ sú lineárne závislé. Vektorový priestor nad telesom $K$ homogénnych polynómov v premenných $x_0$ a $x_1$ stupňa 3 má dimenziu 4 vzhľadom k tomu, že jeho kanonickou bázou je

$$\{x_0^3,\ x_0^2x_1,\ x_0x_1^2,\ x_1^3\}.$$

Z toho plynie, že akákoľvek pätica kubických homogénnych polynómov z $K[x_0, x_1]$ je lineárne závislá. Keďže $c_1, \dots, c_5$ sú kubické homogénne polynómy z $K[x_0, x_1]$, tak sú lineárne závislé. Potom ale platí, že aj polynómy $lc_1, \dots, lc_5$ sú lineárne závislé, teda polynómy (3.2) sú lineárne závislé. To znamená, že riadky rezultantu polynómov $r$ a $s$ sú lineárne závislé, teda $R(r,s) = 0$.

□

Teraz už máme všetky nástroje na dokázanie hlavnej vety tejto podkapitoly.

**Veta 3.8.** *Na nadploche $S$ existuje aspoň jedna priamka.*

*Dôkaz.* Ako sme uviedli na začiatku tejto sekcie, venujeme sa akurát prípadu keď $S \cap T_pS$ je ireducibilná krivka pre každé $p \in S$. To je z dôvodu, že v opačnom prípade je tvrdenie dokázané. Ďalej z lemmatu 3.3 vieme, že existuje $p \in S$ také, že $S \cap T_pS$ má hrot, teda až na vhodnú zmenu súradníc je $p = (0 : 0 : 1 : 0)$ a $T_pS = \mathcal{V}(x_3)$, a po ďalšej vhodnej zmene súradníc je $S \cap T_pS = \mathcal{V}(x_0^2x_2 - x_1^3, x_3)$. Teda polynóm $f$ je na $S$ tvaru

$$f = x_0^2x_2 - x_1^3 + x_3g,$$

kde $g \in K[x_0, \dots, x_3]$ je kvadratický homogénny polynóm.

Keďže $S$ je nesingulárna nadplocha a $\nabla f(p) = (0, 0, 0, g(p))^\top$, tak $g(p) \neq 0$, teda po vhodnej zmene premenných, ktorá nezmení rovnice určujúce $S \cap T_pS$ ani $p$ môžeme predpokladať, že $g(p) = 1$.

Uvažujme body $p_\alpha$ a $q$, kde $p_\alpha$ je tvaru $(1 : \alpha : \alpha^3 : 0)$ pre $\alpha \in K$ a $q$ je tvaru $(0 : z_1 : z_2 : z_3)$. Potom $p_\alpha$ je bodom $S \cap T_pS$ pre každé $\alpha \in K$ a $q \in \mathcal{V}(x_0)$. Ukážeme, že $\overline{p_\alpha q}$ leží na nadploche $S$. Keďže $f(p_\alpha) = 0$ pre každé $\alpha$, tak z lemmatu 3.5 máme, že

$$\overline{p_\alpha q} \subseteq S \Leftrightarrow f_1(p_\alpha; q) = f_1(q; p_\alpha) = f(q) = 0.$$

Z definície 3.4 máme

$$\begin{aligned} f_1(x_0, \dots, x_3; y_0, \dots, y_3) = 2x_0x_2y_0 - 3x_1^2y_1 + x_0^2y_2 + y_3g(x_0, \dots, x_3) \\ + x_3g_1(x_0, \dots, x_3; y_0, \dots, y_3), \end{aligned}$$

kde $g_1$ je polárna forma polynómu $g$. Potom

$$\begin{aligned} f_1(p_\alpha; q) &= -3\alpha^2z_1 + z_2 + z_3g(1, \alpha, \alpha^3, 0), \\ f_1(q; p_\alpha) &= -3\alpha z_1^2 + z_3g_1(1, \alpha, \alpha^3, 0; 0, z_1, z_2, z_3), \\ f(q) &= -z_1^3 + z_3g(0, z_1, z_2, z_3). \end{aligned}$$

Označme $f_1(p_\alpha; q), f_1(q; p_\alpha), f(q) \in K[\alpha][z_1, z_2, z_3]$ ako $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha$ v tomto poradí, to jest $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha$ sú homogénne polynómy v premenných $z_1, z_2, z_3$ stupňa 1, 2, 3, a koeficientmi závislými na $\alpha$. Teda

$$\overline{p_\alpha q} \subseteq S \Leftrightarrow A_\alpha = B_\alpha = C_\alpha = 0.$$

Teraz zistíme, či $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha$ majú spoločný koreň lemmatom 3.7, kde budeme počítať rezultant

$$R(\alpha) := R(B_\alpha(z_1, \tilde{A}_\alpha(z_1, z_3), z_3); C_\alpha(z_1, \tilde{A}_\alpha(z_1, z_3), z_3)).$$

Výrazom $\tilde{A}_\alpha(z_1, z_3)$ rozumieme vyjadrenie $z_2$ z $A_\alpha = 0$, to jest

$$z_2 = \tilde{A}_\alpha(z_1, z_3) = 3\alpha^2 z_1 - z_3 g(1, \alpha, \alpha^3, 0).$$

Počítať $R(\alpha)$ má zmysel, pretože z lemmatu 3.7 plynie, že

$$\begin{aligned} R(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow B_\alpha(z_1, \tilde{A}_\alpha(z_1, z_3), z_3), C_\alpha(z_1, \tilde{A}_\alpha(z_1, z_3), z_3) = 0 \text{ pre nejaký bod} \\ &\Leftrightarrow A_\alpha = B_\alpha = C_\alpha = 0 \text{ pre nejaký bod } (z_1^\alpha : z_2^\alpha : z_3^\alpha) \in \mathbb{P}^2. \end{aligned}$$

Ďalej si uvedomme, že na dokázanie tvrdenia stačí dokázať, že pre nejaké $\alpha_0 \in K$ je $R(\alpha_0) = 0$. To je z dôvodu, že pre každý koreň $\alpha_0$ rezultantu $R(\alpha)$ platí, že $\overline{p_{\alpha_0} q}$ leží na $S$, kde $q = (0 : z_1^{\alpha_0} : z_2^{\alpha_0} : z_3^{\alpha_0})$. Keďže požadujeme, aby $R(\alpha_0) = 0$ pre nejaké $\alpha_0$, tak nám dokonca stačí, keď $R(\alpha)$ nebude konštanta.

Pred samotným výpočtom $R(\alpha)$ ešte zjednodušíme zápis $B_\alpha$ a $C_\alpha$. Keďže $g(p) = g(0, 0, 1, 0) = 1$ a $g$ je kvadratický polynóm, tak

$$a^{(6)} := g(1, \alpha, \alpha^3, 0) = \alpha^6 + \text{sčítance s nižšími mocninami } \alpha.$$

Z toho plynie

$$z_2 = 3\alpha^2 z_1 - z_3 a^{(6)},$$

čo po dosadení do $B_\alpha$ a $C_\alpha$ dáva

$$\begin{aligned} B_\alpha &= -3\alpha z_1^2 + z_3 g_1(1, \alpha, \alpha^3, 0; 0, z_1, 3\alpha^2 z_1 - z_3 a^{(6)}, z_3), \\ C_\alpha &= -z_1^3 + z_3 g(0, z_1, 3\alpha^2 z_1 - z_3 a^{(6)}, z_3). \end{aligned}$$

Keďže $g_1(1, \alpha, \alpha^3, 0; 0, z_1, z_2, z_3)$ je lineárny a $g(0, z_1, z_2, z_3)$ kvadratický polynóm v premenných $z_1, z_2, z_3$, tak dostávame

$$\begin{aligned} B_\alpha &= b_0 z_1^2 + b_1 z_1 z_3 + b_2 z_3^2, \\ C_\alpha &= c_0 z_1^3 + c_1 z_1^2 z_3 + c_2 z_1 z_3^2 + c_3 z_3^3, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} b_0 &= -3\alpha, \\ b_1 &= g_1(1, \alpha, \alpha^3, 0; 0, 1, 3\alpha^2, 0) = 6\alpha^5 + \dots, \\ b_2 &= g_1(1, \alpha, \alpha^3, 0; 0, 0, -a^{(6)}, 1) = -2\alpha^9 + \dots, \\ c_0 &= -1, \\ c_1 &= g(0, 1, 3\alpha^2, 0) = 9\alpha^4 + \dots, \\ c_2 &= g_1(0, 1, 3\alpha^2, 0; 0, 0, -a^{(6)}, 1) = -6\alpha^8 + \dots, \\ c_3 &= g(0, 0, -a^{(6)}, 1) = \alpha^{12} + \dots, \end{aligned}$$

kde „$\dots$“ značí sčítance s nižšími mocninami $\alpha$.

Pracovať iba so sčítancami s najvyššou mocninou $\alpha$ je postačujúce, pretože potrebujeme ukázať, že $R(\alpha)$ nie je konštantný rezultant. Teda ak ukážeme, že koeficient pri najvyššej mocnine $\alpha$ v rezultante $R(\alpha)$ nie je nulový, tak bude tvrdenie dokázané. Sčítanec s najvyššou mocninou $\alpha$ rezultantu $R(\alpha)$ je určený práve determinantom, ktorý vznikne z rezultantu $R(\alpha)$ tak, že za prvky $b_i$, respektíve $c_j$ dosadíme ich sčítance s najvyššou mocninou $\alpha$ za predpokladu nenulovosti takto vzniknutého determinantu. Teda sčítanec s najvyššou mocninou $\alpha$ rezultantu $R(\alpha)$ je

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} -3\alpha & 6\alpha^5 & -2\alpha^9 & & \\ & -3\alpha & 6\alpha^5 & -2\alpha^9 & \\ & & -3\alpha & 6\alpha^5 & -2\alpha^9 \\ -1 & 9\alpha^4 & -6\alpha^8 & \alpha^{12} & \\ & -1 & 9\alpha^4 & -6\alpha^8 & \alpha^{12} \end{pmatrix} &= -3^3\alpha^3 \det\begin{pmatrix} 1 & -2\alpha^4 & \frac{2}{3}\alpha^8 & & \\ & 1 & -2\alpha^4 & \frac{2}{3}\alpha^8 & \\ & & 1 & -2\alpha^4 & \frac{2}{3}\alpha^8 \\ & 7\alpha^4 & -\frac{16}{3}\alpha^8 & \alpha^{12} & \\ & & 7\alpha^4 & -\frac{16}{3}\alpha^8 & \alpha^{12} \end{pmatrix} \\
&= -3^3 7^2 \alpha^{11} \det\begin{pmatrix} 1 & -2\alpha^4 & \frac{2}{3}\alpha^8 & \\ & 1 & -2\alpha^4 & \frac{2}{3}\alpha^8 \\ & \frac{26}{21}\alpha^4 & -\frac{11}{21}\alpha^8 & \\ & & \frac{26}{21}\alpha^4 & -\frac{11}{21}\alpha^8 \end{pmatrix} \\
&= -2^2 3^1 13^2 \alpha^{19} \det\begin{pmatrix} 1 & -2\alpha^4 & \frac{2}{3}\alpha^8 \\ & \frac{41}{26}\alpha^4 & -\frac{2}{3}\alpha^8 \\ & 1 & -\frac{11}{26}\alpha^4 \end{pmatrix} \\
&= -2^1 3^1 13^1 41^1 \alpha^{23} \det\begin{pmatrix} 1 & -\frac{52}{123}\alpha^4 \\ & -\frac{1}{3198}\alpha^4 \end{pmatrix} \\
&= \alpha^{27},
\end{aligned}$$

kde sme rovnako ako v definícii 3.6 pre prehľadnosť vynechali nuly. V prvej rovnosti sme prvé tri riadky vydelili prvkom $-3\alpha$ a tým pádom celý determinant vynásobili trikrát prvkom $-3\alpha$. Následne sme k štvrtému riadku pripočítali prvý riadok a k piatemu riadku pripočítali druhý riadok. V druhej rovnosti sme použili rozvoj podľa prvého stĺpca. Potom sme tretí a štvrtý riadok vydelili prvkom $7\alpha^4$, a tým pádom celý determinant vynásobili dvakrát prvkom $7\alpha^4$. Nakoniec sme od tretieho riadku odpočítali prvý a od štvrtého druhý. V tretej rovnosti sme postupovali analogicky ako vyššie, to jest najprv sme použili rozvoj podľa prvého stĺpca a následne sme druhý a tretí riadok vydelili prvkom $\frac{26}{21}\alpha^4$, a tým pádom celý determinant vynásobili dvakrát prvkom $\frac{26}{21}\alpha^4$. Potom sme od druhého riadku odpočítali prvý. Vo štvrtej rovnosti sme opäť začali rozvojom podľa prvého stĺpca a následne sme prvý riadok vydelili prvkom $\frac{41}{26}\alpha^4$, takže sme celý determinant vynásobili prvkom $\frac{41}{26}\alpha^4$. Potom sme od druhého riadku odpočítali prvý. V piatej rovnosti sme už mohli využiť to, že sa jedná o determinant hornej trojuholníkovej matice, teda determinant je rovný súčinu prvkov na hlavnej diagonále.

Zistili sme, že $R(\alpha)$ nie je konštantný, takže existujú body $p_\alpha$ a $q$ požadovaného tvaru také, že priamka spojujúca body $p_\alpha$ a $q$ leží na nadploche $S$.

$\square$

## 3.3 Počet priamok prechádzajúcich bodom nadplochy $S$

Keďže už vieme, že na nadploche $S$ existuje priamka, začneme konštrukciu všetkých priamok na $S$. Najprv zistíme, koľko najviac priamok môže obsahovať daný bod nadplochy $S$.

**Lemma 3.9.** *Nech $p$ je bodom $S$. Potom počet priamok, ktoré ležia na $S$ a obsahujú bod $p$ je nanajvýš 3. Okrem toho, dotyčnicový priestor k $S$ v $p$ je rovina obsahujúca všetky takéto priamky.*

*Dôkaz.* Nech $l$ je priamka, $l \subseteq S$. Potom $l = T_p l$:

Vhodnou zmenou súradníc prevedieme $l$ na $\mathcal{V}(x_2, x_3)$. Potom $\mathcal{I}(\mathcal{V}(x_2, x_3)) = (x_2, x_3)$ a

$$\begin{aligned}
T_p l &= \bigcap_{g \in (x_2, x_3)} \mathcal{V}\left(\sum_{i=0}^{3} \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) \cdot x_i\right) \\
&= \bigcap_{g \in \{x_2, x_3\}} \mathcal{V}\left(\sum_{i=0}^{3} \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) \cdot x_i\right) \\
&= \bigcap_{i=2}^{3} \mathcal{V}(x_i) \\
&= \mathcal{V}(x_2, x_3) \\
&= l,
\end{aligned}$$

kde v prvej rovnosti sme použili definíciu 2.14 a v druhej rovnosti sme použili lemma 2.15.

Ďalej, keďže $l \subseteq S$, tak $\mathcal{I}(l) \supseteq \mathcal{I}(S)$. Taktiež vieme, že $S = \mathcal{V}(f)$ a analogickým postupom ako vyššie dostávame, že $\mathcal{I}(S) = (f)$. Teda

$$\begin{aligned}
T_p l = \bigcap_{g \in \mathcal{I}(l)} \mathcal{V}\left(\sum_{i=0}^{3} \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) \cdot x_i\right) \subseteq \bigcap_{g \in \{f\}} \mathcal{V}\left(\sum_{i=0}^{3} \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) \cdot x_i\right) = \mathcal{V}\left(\sum_{i=0}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot x_i\right) \\
= T_p S,
\end{aligned}$$

kde sme pri relácii podmnožiny použili lemma 2.15.

Z predpisu $T_p S$ podľa definície 2.9 plynie, že sa jedná o rovinu, pretože $T_p S$ je vyrezaná jediným homogénnym lineárnym polynómom. Tento polynóm je rozhodne nenulový, pretože $S$ je nesingulárna, teda aspoň jedna parciálna derivácia v bode $p$ je nenulová.

Dokázali sme, že každá priamka $l$ obsiahnutá v $S$ a prechádzajúca bodom $p$ je taktiež obsiahnutá v $T_p S$. Z toho a z lemmatu 3.2 plynie, že takéto priamky sú nanajvýš 3.

□

## 3.4 Počet priamok pretínajúcich danú priamku na nadploche $S$

V tejto podkapitole začneme s konštrukciou priamok na nadploche $S$. Naším cieľom bude dokázať, že ľubovoľnú priamku na nadploche $S$ pretína práve 10 priamok a ukázať vzájomné vzťahy medzi týmito priamkami, to jest ktoré ležia v jednej rovine a ktoré sa nepretínajú. V tom nám pomôže nasledujúce lemma.

**Lemma 3.10.** *Nech $f \in K[x_0, x_1, x_2]$ je kvadratický homogénny polynóm. Zapíšme $f$ ako*

$$f(x_0, x_1, x_2) = Ax_0^2 + Bx_0x_1 + Cx_1^2 + Dx_0x_2 + Ex_1x_2 + Fx_2^2.$$

*Potom $\mathcal{V}(f) \subseteq \mathbb{P}^2$ je nesingulárna práve vtedy, keď*

$$\triangle := 4ACF + BDE - AE^2 - B^2F - CD^2 \tag{3.3}$$

*je nenulový.*

*Dôkaz.* Uvažujme maticu $M \in \mathbf{M}_3(K)$ takú, že

$$M = \begin{pmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{pmatrix}.$$

Potom $\forall \mathbf{x}^\top = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{A}_K^3 : f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top M \mathbf{x}$. Z definície 2.16 plynie, že $\mathcal{V}(f)$ je singulárna práve vtedy, keď $\exists \tilde{\mathbf{x}}^\top = (\tilde{x}_0 : \tilde{x}_1 : \tilde{x}_2) \in \mathbb{P}^2$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_0}(\tilde{\mathbf{x}}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{\mathbf{x}}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\tilde{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

to jest keď

$$2\begin{pmatrix} A\tilde{x}_0 + B/2\tilde{x}_1 + D/2\tilde{x}_2 \\ B/2\tilde{x}_0 + C\tilde{x}_1 + E/2\tilde{x}_2 \\ D/2\tilde{x}_0 + E/2\tilde{x}_1 + F\tilde{x}_2 \end{pmatrix} = 2M\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Teda $\mathcal{V}(f)$ je singulárna práve vtedy, keď je singulárna matica $M$. Singularitu matice $M$ vyriešime prostredníctvom jej determinantu

$$\det M = ACF + \frac{BDE}{4} - \frac{CD^2}{4} - \frac{AE^2}{4} - \frac{B^2F}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \triangle = 4\det M = 0.$$

Dokázali sme, že $\mathcal{V}(f)$ je nesingulárna práve vtedy, keď $\triangle \neq 0$.

□

**Veta 3.11.** *Nech $l \subseteq S$ je priamka. Potom existuje práve 10 rôznych priamok na $S$ pretínajúcich $l$. Môžeme ich označiť ako $l_i, l_i'$ pre $i = 1, \ldots, 5$, tak, aby pre tieto priamky naviac platilo:*

1. *$\forall i \in \{1, \ldots, 5\} : l, l_i$ a $l_i'$ ležia v nejakej rovine $P_i$,*
2. *$\forall i \in \{1, \ldots, 5\}\ \forall j \in \{1, \ldots, 5\} \setminus \{i\} :\ (l_i \cup l_i') \cap (l_j \cup l_j') = \emptyset$.*

*Dôkaz.* Nech $P \subseteq \mathbb{P}^3$ je rovina a $l \subseteq P$. Potom z lemmatu 3.2 obsahuje $P \cap S$ okrem priamky $l$ ešte kužeľosečku alebo dve rôzne priamky. Na dokázanie bodu 1 teda potrebujeme dokázať, že existuje práve päť takých rovín $P$, že $P \cap S$ bude obsahovať tri rôzne priamky vrátane $l$, to jest $P \cap S = l \cup q$, kde $q$ je reducibilná kužeľosečka.

Bod 2 bude následne plynúť z lemmatu 3.9 a zvyšku tejto vety následovne. Nech pre spor $(l_1 \cup l_1') \cap (l_2 \cup l_2') \neq \emptyset$ a bod $p \in (l_1 \cup l_1') \cap (l_2 \cup l_2')$. Potom bod $p$ leží aspoň na jednej z priamok $l_1$ a $l_1'$. Bez ujmy na obecnosti nech $p \in l_1$. Analogicky pre $l_2$ a $l_2'$, nech $p \in l_2$. Potom $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$ a z časti tejto vety, ktorá je dokázaná nižšie, $l_1$ aj $l_2$ pretínajú priamku $l$. Tvrdíme, že $l, l_1$ a $l_2$ ležia v jednej rovine. Označme ako $P$ rovinu, v ktorej ležia priamky $l_1$ a $l_2$. Nech $l \nsubseteq P$, pretože v opačnom prípade sme skončili. Potom $l$ môže pretnúť $P$ v jedinom bode. Keďže $p \in l_1 \cap l_2$ a $l_1$ aj $l_2$ pretínajú $l$, tak môžu nastať 2 možnosti. Buď sa každá dvojica priamok z $l, l_1, l_2$ pretne v inom bode, teda $p_i \in l \cap l_i$ pre $i \in \{1, 2\}$, kde $p, p_1$ a $p_2$ sú 3 navzájom rôzne body. V tomto prípade $p_1 \in P$ a $p_2 \in P$ a $l$ je priamka spájajúca body $p_1$ a $p_2$, teda $l$ leží v rovine $P$. To je ale v spore s predpokladom, že $l$ neleží v rovine $P$. Z toho dostávame, že $l$ leží v $P$. Druhou možnosťou je, že sa všetky 3 priamky $l, l_1$ a $l_2$ pretínajú v jedinom bode. To znamená, že $l$ pretína $P$ v bode $p$, teda $p \in l \cap l_1 \cap l_2$. Potom z lemmatu 3.9 vieme, že rovina $T_pS$ obsahuje priamky $l, l_1$ a $l_2$. Teda priamky $l, l_1$ a $l_2$ ležia v jednej rovine. Zároveň z bodu 1 tejto vety vieme, že priamka $l_1'$ leží v jednej rovine s priamkami $l$ a $l_1$. Z toho plynie, že priamka $l_1'$ leží v jednej rovine s priamkami $l, l_1$ a $l_2$, pričom z časti tejto vety, ktorá je dokázaná nižšie, $l_1'$ je rôzna od priamok $l, l_1$ a $l_2$. Teda rovina $T_pS$ obsahuje aspoň 4 rôzne priamky, čo je spor s lemmatom 3.9. Z toho dostávame platnosť bodu 2 tejto vety.

Použitím vhodnej zmeny súradníc môžeme predpokladať, že $l = \mathcal{V}(x_2, x_3)$. Keďže $l \subseteq S$, tak

$$f = Ax_0^2 + Bx_0x_1 + Cx_1^2 + Dx_0 + Ex_1 + F, \tag{3.4}$$

kde $A, \ldots, F \in K[x_2, x_3]$ sú homogénne polynómy, $A, B, C$ lineárne, $D, E$ kvadratické a $F$ kubický.

Ľubovoľnú rovinu obsahujúcu priamku $l$ vieme zapísať ako

$$P_{\lambda_1,\lambda_2} := \mathcal{V}(\lambda_1 x_3 - \lambda_2 x_2),$$

kde $(\lambda_1 : \lambda_2) \in \mathbb{P}^1$, teda nás zaujíma, pre ktoré hodnoty $(\lambda_1 : \lambda_2)$ obsahuje $S \cap P_{\lambda_1,\lambda_2}$ tri priamky.

Keďže každý bod roviny $P_{\lambda_1,\lambda_2}$ je tvaru $(x_0 : x_1 : k\lambda_1 : k\lambda_2)$, kde $k \in K$, tak body na $P_{\lambda_1,\lambda_2}$ môžeme uvažovať v homogénnych súradniciach $(x_0 : x_1 : k)$. V týchto súradniciach je potom $l \restriction_{P_{\lambda_1,\lambda_2}} = \mathcal{V}(k)$ a $f \restriction_{P_{\lambda_1,\lambda_2}} = kg(x_0, x_1, k)$, kde

$$\begin{aligned} g(x_0, x_1, k) = {} & A(\lambda_1, \lambda_2)x_0^2 + B(\lambda_1, \lambda_2)x_0x_1 + C(\lambda_1, \lambda_2)x_1^2 \\ & + D(\lambda_1, \lambda_2)x_0k + E(\lambda_1, \lambda_2)x_1k + F(\lambda_1, \lambda_2)k^2. \end{aligned}$$

Použili sme tu vlastnosť homogénnych polynómov

$$f_1(cx_0, \ldots, cx_n) = c^d f_1(x_0, \ldots, x_n),$$

kde $c \in K, (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n_K, \mathrm{st}(f_1) = d$, na $A, \ldots, F$. Pretože pracujeme na $P_{\lambda_1,\lambda_2}$, tak $A, \ldots, F$ z predpisu (3.4) vieme upraviť nasledujúcim spôsobom

$$\begin{array}{rcccl} A(x_2, x_3) & = & A(k\lambda_1, k\lambda_2) & = & kA(\lambda_1, \lambda_2), \\ B(x_2, x_3) & = & B(k\lambda_1, k\lambda_2) & = & kB(\lambda_1, \lambda_2), \\ C(x_2, x_3) & = & C(k\lambda_1, k\lambda_2) & = & kC(\lambda_1, \lambda_2), \\ D(x_2, x_3) & = & D(k\lambda_1, k\lambda_2) & = & k^2D(\lambda_1, \lambda_2), \\ E(x_2, x_3) & = & E(k\lambda_1, k\lambda_2) & = & k^2E(\lambda_1, \lambda_2), \\ F(x_2, x_3) & = & F(k\lambda_1, k\lambda_2) & = & k^3F(\lambda_1, \lambda_2). \end{array} \tag{3.5}$$

Nakoniec sme vytkli $k$, z čoho dostávame vyjadrenie $f$ na $P_{\lambda_1,\lambda_2}$.

Keďže $g(x_0, x_1, k)$ je kvadratický homogénny polynóm, tak z lemmatu 3.10 plynie, že $g$ je singulárny polynóm práve vtedy, keď

$$\triangle(\lambda_1, \lambda_2) = 4ACF + BDE - AE^2 - B^2F - CD^2 = 0.$$

Keďže $A, B, C$ sú lineárne, $D, E$ kvadratické a $F$ kubický homogénny polynóm, tak $\triangle(\lambda_1, \lambda_2) \in K[\lambda_1, \lambda_2]$ je homogénny kvintický polynóm. Potrebujeme teda dokázať, že existuje práve päť rôznych koreňov $\triangle(\lambda_1, \lambda_2)$. To, že existuje päť koreňov vrátane násobností vieme z lemmatu 2.8, pretože predpokladáme algebraickú uzavretosť $K$.

Po vhodnej zmene súradníc $\lambda_1, \lambda_2$ môžeme predpokladať, že $(\lambda_1 : \lambda_2) = (0 : 1)$ je koreň $\triangle(\lambda_1, \lambda_2)$. Túto zmenu súradníc môžeme spraviť, pretože akurát $\lambda_1, \lambda_2$ nahradíme ich lineárnymi kombináciami, a keďže $\lambda_1, \lambda_2$ korešpondujú $x_2, x_3$[1], tak aj v ich prípade dôjde k ich nahradeniu zodpovedajúcimi lineárnymi kombináciami, z čoho plynie, že rovnosť $l = \mathcal{V}(x_2, x_3)$ sa zachová. Teda $\lambda_1 | \triangle(\lambda_1, \lambda_2)$. Ukážeme, že $\lambda_1^2 \nmid \triangle(\lambda_1, \lambda_2)$. Keďže $\triangle(\lambda_1, \lambda_2)$ má koreň, tak $g$ je singulárna. Zo singularity $g$, toho že na $S \cap P_{0,1}$ leží priamka $l$ a z lemmatu 3.2 máme, že na $S \cap P_{0,1}$ ležia tri rôzne priamky. Tieto priamky sa môžu na $S \cap P_{0,1}$ pretnúť v jedinom bode, alebo každá dvojica z nich v inom bode, čo vieme z vety 2.10, bod 1. Keďže $P_{0,1} = \mathcal{V}(-x_2) = \mathcal{V}(x_2)$, tak priamky na $S \cap P_{0,1}$, po vhodnej zmene súradníc v rovine $P_{0,1}$ [2], v prípade pretnutia v jedinom bode sú

$$l \restriction_{P_{0,1}} = \mathcal{V}(x_3),\ l_1 \restriction_{P_{0,1}} = \mathcal{V}(x_0),\ l_1' \restriction_{P_{0,1}} = \mathcal{V}(x_0 - x_3),$$

a v prípade, že sa každá dvojica pretne v inom bode sú

$$l \restriction_{P_{0,1}} = \mathcal{V}(x_3),\ l_2 \restriction_{P_{0,1}} = \mathcal{V}(x_0),\ l_2' \restriction_{P_{0,1}} = \mathcal{V}(x_1).$$

Skutočne, pretože v prvom prípade $l \cap l_1 \cap l_1' = (0 : 1 : 0 : 0)$ a v druhom prípade $l \cap l_2 = (0 : 1 : 0 : 0)$, $l \cap l_2' = (1 : 0 : 0 : 0)$ a $l_2 \cap l_2' = (0 : 0 : 0 : 1)$.

Postupne rozoberieme oba prípady:

1. Nech $l \restriction_{P_{0,1}} = \mathcal{V}(x_3)$, $l_1 \restriction_{P_{0,1}} = \mathcal{V}(x_0)$, $l_1' \restriction_{P_{0,1}} = \mathcal{V}(x_0 - x_3)$. Potom

   $$f = x_0x_3(x_0 - x_3) + x_2h_1,$$

   kde $h_1 \in K[x_0, \dots, x_3]$ je kvadratický homogénny polynóm. Z porovnania tohto zápisu $f$ so zápisom (3.4)

   $$\begin{aligned} x_0^2x_3 - x_0x_3^2 + x_2h_1(x_0, \dots, x_3) = A(x_2, x_3)x_0^2 + B(x_2, x_3)x_0x_1 + C(x_2, x_3)x_1^2 \\ + D(x_2, x_3)x_0 + E(x_2, x_3)x_1 + F(x_2, x_3), \end{aligned}$$

   dostávame, že $A = x_3 + k_1x_2, D = -x_3^2 + x_2h_{11}$, kde $k_1 \in K$, $h_{11} \in K[x_2, x_3]$ homogénny lineárny polynóm a $x_2$ delí $B, C, E, F$. Z toho plynie, že $\lambda_1^2$ delí v $\triangle(\lambda_1, \lambda_2)$ všetky sčítance okrem $-C(\lambda_1, \lambda_2)D^2(\lambda_1, \lambda_2)$, o ktorom to zatiaľ nevieme. Používame tu jednoduché pozorovanie plynúce z (3.5), že $x_2 | A(x_2, x_3) \Leftrightarrow \lambda_1 | A(\lambda_1, \lambda_2)$, a analogicky pri $B, \dots, F$ a $\lambda_2$ s $x_3$. Teda potrebujeme zistiť, či $\lambda_1^2 | -C(\lambda_1, \lambda_2)D^2(\lambda_1, \lambda_2)$. Keďže $x_2 \nmid D(x_2, x_3)$, pretože

[1] Z tvaru bodov roviny $P_{\lambda_1,\lambda_2}$ vidíme, že $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (x_0 : x_1 : k\lambda_1 : k\lambda_2)$.

[2] Teda urobíme vhodnú zmenu súradníc $x_0, x_1, x_3$.

$D(x_2, x_3)$ obsahuje sčítanec $-x_3^2$, tak $\lambda_1 \nmid D(\lambda_1, \lambda_2)$. Treba teda vyšetriť, či $\lambda_1^2 | C(\lambda_1, \lambda_2)$. Z toho, že $\lambda_1 | C(\lambda_1, \lambda_2)$ a $C$ je lineárny homogénny polynóm plynie, že $C(\lambda_1, \lambda_2) = c\lambda_1$, kde $c \in K$ a jediný spôsob ako môže $\lambda_1^2$ deliť $C(\lambda_1, \lambda_2)$ je, keď $c = 0$. Z nesingularity $S$ vieme, že je $S$ nesingulárna aj v bode $(0 : 1 : 0 : 0) \in S$, teda

$$\nabla f(0,1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_1(0,1,0,0) \\ 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0},$$

z čoho plynie, že

$$\begin{aligned} 0 \neq \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,1,0,0) &= \frac{\partial C}{\partial x_2}(0,0) + \frac{\partial E}{\partial x_2}(0,0) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(0,0) \\ &= \frac{\partial C}{\partial x_2}(0,0) \\ &= c, \end{aligned}$$

kde sme v závere implikácie využili zápis $f$ vo forme (3.4) a to, že $E$ a $F$ sú homogénne stupňa vyššieho ako jeden, teda ich parciálne derivácie sú homogénne stupňa aspoň jeden, takže sa po dosadení bodu (0,0) vynulujú. Teda $c \neq 0$, z čoho plynie, že $\lambda_1^2 \nmid C(\lambda_1, \lambda_2)$ a následne dostávame, že $\lambda_1^2 \nmid \triangle(\lambda_1, \lambda_2)$, to jest $\triangle(\lambda_1, \lambda_2)$ má práve päť rôznych koreňov a $g(x_0, x_1, k)$ je singulárny polynóm.
V bode 2 postupujeme analogicky.

2. Nech $l \restriction_{P_{0,1}} = \mathcal{V}(x_3)$, $l_2 \restriction_{P_{0,1}} = \mathcal{V}(x_0)$, $l_2' \restriction_{P_{0,1}} = \mathcal{V}(x_1)$. Potom

$$f = x_0 x_1 x_3 + x_2 h_2,$$

kde $h_2 \in K[x_0, \ldots, x_3]$ je kvadratický homogénny polynóm. Z porovnania tohto zápisu $f$ so zápisom (3.4)

$$\begin{aligned} x_0 x_1 x_3 + x_2 h_2(x_0, \ldots, x_3) = A(x_2, x_3)x_0^2 + B(x_2, x_3)x_0 x_1 + C(x_2, x_3)x_1^2 \\ + D(x_2, x_3)x_0 + E(x_2, x_3)x_1 + F(x_2, x_3), \end{aligned}$$

dostávame, že $B = x_3 + k_2 x_2$, kde $k_2 \in K$ a $x_2$ delí $A, C, D, E, F$. Z toho plynie, že $\lambda_1^2$ delí v $\triangle(\lambda_1, \lambda_2)$ všetky sčítance okrem $-B^2(\lambda_1, \lambda_2)F(\lambda_1, \lambda_2)$, o ktorom to zatiaľ nevieme. Rovnako ako v bode 1 tu používame pozorovanie plynúce z (3.5), že $x_2 | A(x_2, x_3) \Leftrightarrow \lambda_1 | A(\lambda_1, \lambda_2)$, a analogicky pri $B, \ldots, F$ a $\lambda_2$ s $x_3$. Teda potrebujeme zistiť, či $\lambda_1^2 | - B^2(\lambda_1, \lambda_2)F(\lambda_1, \lambda_2)$. Keďže $x_2 \nmid B(x_2, x_3)$, pretože $B(x_2, x_3)$ obsahuje sčítanec $x_3$, tak $\lambda_1 \nmid B(\lambda_1, \lambda_2)$. Treba teda vyšetriť, či $\lambda_1^2 | F(\lambda_1, \lambda_2)$. Z toho, že $\lambda_1 | F(\lambda_1, \lambda_2)$ a $F$ je kubický homogénny polynóm plynie, že $F(\lambda_1, \lambda_2) = a_0\lambda_1^3 + a_1\lambda_1^2\lambda_2 + a_2\lambda_1\lambda_2^2$, kde $a_0, a_1, a_2 \in K$. Z nesingularity $S$ vieme, že je $S$ nesingulárna aj v bode $(0 : 0 : 0 : 1) \in S$, teda

$$\nabla f(0,0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_2(0,0,0,1) \\ 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0},$$

z čoho plynie, že

$$0 \neq \frac{\partial f}{\partial x_2}(0{,}0{,}0{,}1) = \frac{\partial F}{\partial x_2}(0{,}1) = a_2,$$

kde sme v závere implikácie využili zápis $f$ vo forme (3.4). Teda $a_2 \neq 0$, z čoho plynie, že $\lambda_1^2 \nmid F(\lambda_1, \lambda_2)$ a následne dostávame, že $\lambda_1^2 \nmid \triangle(\lambda_1, \lambda_2)$, to jest $\triangle(\lambda_1, \lambda_2)$ má práve päť rôznych koreňov a $g(x_0, x_1, k)$ je singulárny polynóm.

Tým sme tvrdenie dokázali v oboch prípadoch.

□

Teraz zo zatiaľ dokázaných tvrdení ukážeme, že na nadploche $S$ existuje 17 rôznych priamok a to tak, že vetu 3.11 aplikujeme na 2 rôzne priamky.

Z vety 3.11, bod 2, plynie, že na $S$ existuje dvojica priamok $l$ a $m$ taká, že $l \cap m = \emptyset$ [3].

Nech $l, m \subseteq S$ sú pevne zvolené priamky ako vyššie, teda $l \cap m = \emptyset$. Potom z vety 3.11 vieme, že jediné priamky ležiace na $S$, ktoré pretnú $l$ sú priamky $l_1, \dots, l_5, l_1', \dots, l_5'$.

Ďalej vieme, že $m$ neleží v žiadnej z rovín $P_1, \dots, P_5$ z tejto vety. Pre spor predpokladajme, že $m$ leží v rovine $P_i$ pre nejaké $i \in \{1, \dots, 5\}$. Potom z vety 3.11, bod 1, vieme, že $l, l_i, l_i' \in P_i \cap S$. Z lemmatu 3.2, bod 3, to ale znamená, že $m \in \{l, l_i, l_i'\}$. Tým ale dostávame spor, pretože z vety 3.11 máme, že $l, l_i, l_i'$ pretnú $l$ a my sme volili $l$ a $m$ také, že $l \cap m = \emptyset$. Tým sme dokázali, že $m$ neleží na žiadnej z rovín $P_1, \dots, P_5$. Z vety 2.10, bod 2, teda dostávame, že $m$ pretne každú z rovín $P_1, \dots, P_5$ v práve jednom bode.

Teraz ukážeme, ktoré priamky z $l_1, \dots, l_5, l_1', \dots, l_5'$ pretne $m$. Z vety 3.11, bod 1, v kombinácii s lemmatom 3.2, bod 3, pre každé $i \in \{1, \dots, 5\}$ dostávame, že $S \cap P_i = l \cup l_i \cup l_i'$. Z tohto vzťahu a toho, že $m$ leží na $S$ dostávame, že pre každé $i \in \{1, \dots, 5\}$ platí, že $m$ pretne $l_i$ alebo $l_i'$, pretože $m$ sme volili tak, že nepretne $l$. Ďalej vieme, že pre každé $i \in \{1, \dots, 5\}$ platí, že $m$ nepretne obe $l_i$ a $l_i'$. Pre spor predpokladajme, že $m$ pretne obe $l_i$ aj $l_i'$ pre nejaké $i \in \{1, \dots, 5\}$. To znamená, že buď $m$ pretne $l_i$ a $l_i'$ v 2 rôznych bodoch, alebo existuje bod $p \in S$ taký, že sa v $p$ pretnú $l_i, l_i'$ a $m$. Ak $m$ pretne $l_i$ a $l_i'$ v 2 rôznych bodoch, tak $m$ leží v rovine $P_i$, pretože $l_i, l_i' \in P_i$ a $l_i \neq l_i'$. To je ale spor, pretože sme v predošlom odstavci dokázali, že $m$ neleží v rovine $P_i$. V prípade, že existuje bod $p$ taký, že $p \in m \cap l_i \cap l_i'$, zas dostávame spor s lemmatom 3.9, pretože dostávame, že $p$ je bodom, v ktorom sa pretínajú 3 priamky neležiace v jednej rovine, ale podľa lemmatu 3.9 majú všetky tieto 3 priamky ležať v dotyčnicovej rovine $T_pS$. Teda dostávame, že pre každé $i \in \{1, \dots, 5\}$ existuje práve jedna priamka z množiny $\{l_i, l_i'\}$ taká, že pretne $m$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že pre každé $i \in \{1, \dots, 5\}$ to bude priamka $l_i$, ktorú $m$ pretne. To si môžeme dovoliť, pretože v prípade, že by $m$ pretla $l_i'$ a nie $l_i$, tak ich akurát formálne preznačíme.

Z toho plynie, že pri použití vety 3.11 na priamku $m$ dostávame 10 priamok ležiacich na $S$ a pretínajúcich $m$, pričom sú to $l_1, \dots, l_5$ a nejakých ďalších 5 priamok, ktoré označíme $l_1'', \dots, l_5''$. Teda z vety 3.11 plynie, že pre priamku $m$ a $\forall i \in \{1, \dots, 5\}$ platí:

[3] Stačí voliť $l = l_1$ a $m = l_2$.

1. $m, l_i$ a $l_i''$ ležia v nejakej rovine $Q_i$,
2. $\forall j \in \{1, \ldots, 5\} \backslash \{i\} : (l_i \cup l_i'') \cap (l_j \cup l_j'') = \emptyset$.

Momentálne by nás zaujímalo či pri novooznačených priamkach nenastala situácia, že sme zaviedli nové označenie pre nejakú priamku, ktorú už máme, teda či pre nejaké $i$,$j \in \{1, \ldots, 5\}$ platí, že $l_i'' = l_j'$. Tvrdíme, že táto situácia nenastala. Pre spor uvažujme, že $l_i'' = l_j'$ pre nejaké $i, j \in \{1. \ldots, 5\}$. Najprv uvažujeme, že $i \neq j$. Potom vieme, že $l_i$ a $l_j'$ neležia v jednej rovine, pretože z vety 3.11, bod 2, máme, že $l_i \cap l_j' = \emptyset$ a z vety 2.10, bod 1, máme, že ak by ležali v jednej rovine, tak by sa pretli práve v jednom bode. Keďže $l_i$ a $l_i''$ ležia v tej istej rovine $Q_i$, tak z toho dostávame, že $l_i''$ a $l_j'$ neležia obe v jednej rovine, teda $l_i'' \cap l_j' = \emptyset$, čiže $l_i'' \neq l_j'$, čím dostávame spor s tým, že $l_i'' = l_j'$ pre nejaké $i, j \in \{1, \ldots, 5\}$, $i \neq j$. Teraz uvažujme, že $i = j$. Vieme, že $l_i$ a $l_i''$ pretínajú $m$, a že $l_i'$ nepretína $m$. Keďže uvažujeme, že $l_i'' = l_i'$, tak dostávame spor s tým, že $l_i'$ nepretína $m$. Teda $l_i'' \neq l_i'$ pre každé $i \in \{1, \ldots, 5\}$. Týmto sme dokázali, že skutočne sú všetky priamky $l_i''$ a $l_j'$ navzájom rôzne pre $i, j \in \{1, \ldots, 5\}$.

Takto dostávame 17 rôznych priamok na nadploche $S$. Množinu tvorenú týmito prvkami si na ďalšiu prácu označíme ako $A$, teda:

$$A = \{l, m, l_1, \ldots, l_5, l_1', \ldots, l_5', l_1'', \ldots, l_5''\}.$$

## 3.5 Priamky určené prienikom s $l_i, l_j, l_k$

Označme množinu všetkých priamok na $S$, ktoré nie sú v množine $A$ ako $B$. V tejto podkapitole dokážeme, že v množine B sú všetky priamky definované trojicou po dvoch rôznych priamok $l_i, l_j, l_k$, kde $i$,$j$,$k \in \{1, \ldots, 5\}$, teda množina B obsahuje 10 priamok. Najprv ale vybudujeme aparát na dokázanie takého tvrdenia.

**Lemma 3.12.** *Nech $Q$ je kvadratická nadplocha v $\mathbb{P}^3$ určená kvadratickým homogénnym polynómom $g \in K[x_0, \ldots, x_3]$ a $\hat{l}$ priamka v $\mathbb{P}^3$. Potom $\hat{l}$ pretne $Q$. Naviac $\hat{l} \subseteq Q$ práve vtedy, keď $\hat{l} \cap Q$ obsahuje aspoň 3 body v $\mathbb{P}^3$.*

*Dôkaz.* Použitím vhodnej zmeny súradníc môžeme predpokladať, že $\hat{l} = \mathcal{V}(x_2, x_3)$. Potom
$$g \restriction_{\hat{l}} = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2,$$
kde $a, b, c \in K$. Ak je $g \restriction_{\hat{l}}$ nulový polynóm, tak každý bod $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1$ je koreňom $g \restriction_{\hat{l}}$. Ak je $g \restriction_{\hat{l}}$ homogénny polynóm stupňa 2, tak z lemmatu 2.8 vieme, že $g \restriction_{\hat{l}}$ má práve 2 korene vrátane násobností v $\mathbb{P}^1$. Teda v oboch prípadoch existuje bod $(x_0 : x_1 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^3$ taký, že je koreňom $g$ aj polynómov definujúcich priamku $\hat{l}$, teda $\hat{l}$ a $Q$ majú spoločný koreň, čiže sa $\hat{l}$ a $Q$ pretnú.

Nech $\hat{l} \subseteq Q$. Potom $\hat{l} \cap Q = \hat{l} = \mathcal{V}(x_2, x_3) = \{(x_0 : x_1 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^3\}$, teda $\hat{l} \cap Q$ obsahuje aspoň 3 body. Na druhú stranu, nech $\hat{l} \not\subseteq Q$. Potom $g \restriction_{\hat{l}}$ je homogénny polynóm stupňa 2 a z predošlého odstavca vieme, že potom $\hat{l} \cap Q$ obsahuje nanajvýš 2 rôzne body.

□

**Lemma 3.13.** *Nech $\hat{l}_1, \hat{l}_2, \hat{l}_3$ sú po dvoch disjunktné priamky v $\mathbb{P}^3$. Potom existuje nesingulárna kvadratická nadplocha $Q \subseteq \mathbb{P}^3$ taká, že obsahuje všetky tri priamky $\hat{l}_1, \hat{l}_2, \hat{l}_3$.*

*Dôkaz.* Každá kvadratická nadplocha v $\mathbb{P}^3$ je definovaná kvadratickým polynómom $g \in K[x_0, \dots, x_3]$ tvaru

$$\begin{aligned} g(x_0, \dots, x_3) = Ax_0^2 + Bx_0x_1 + Cx_0x_2 + Dx_0x_3 + Ex_1^2 + Fx_1x_2 + Gx_1x_3 \\ + Hx_2^2 + Ix_2x_3 + Jx_3^2, \end{aligned}$$

kde $A, \dots, J \in K$. Z lemmata 3.12 vieme, že priamka leží na kvadratickej nadploche práve vtedy, keď táto nadplocha obsahuje aspoň tri body priamky. Keďže sú $\hat{l}_1, \hat{l}_2, \hat{l}_3$ po dvoch disjunktné, tak z toho dostávame deväť lineárnych rovníc, kde sú neznámymi $A, \dots, J$. To jest zisťujeme, či má deväť lineárnych rovníc o desiatich neznámych netriviálne riešenie. Evidentne áno, teda existuje kvadratická nadplocha $Q$ obsahujúca všetky tri priamky $\hat{l}_1, \hat{l}_2, \hat{l}_3$.

Teraz ukážeme, že nadplocha $Q$ je nesingulárna.

1. Ak by bola nadplocha $Q$ zjednotením dvoch rovín alebo jednou rovinou (jednou rovinou by bola nadplocha $Q$ práve vtedy, keď by $g$ bol druhou mocninou lineárneho polynómu), tak v aspoň jednej z týchto rovín by sa nachádzali aspoň dve priamky. Potom z vety 2.10 bod 1 by mali tieto dve priamky neprázdny prienik, čo je spor s predpokladom, že sú priamky po dvoch disjunktné.

2. Na druhý prípad budeme potrebovať reprezentovať $g$ pomocou matice. Uvažujme maticu $M \in \mathbf{M}_4(K)$ takú, že

$$M = \begin{pmatrix} A & B/2 & C/2 & D/2 \\ B/2 & E & F/2 & G/2 \\ C/2 & F/2 & H & I/2 \\ D/2 & G/2 & I/2 & J \end{pmatrix}.$$

   Potom $\forall \mathbf{x}^\top = (x_0, \dots, x_3) \in \mathbb{A}^4 : g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top M \mathbf{x}$. To, že $g$ je singulárny polynóm práve vtedy, keď je singulárna matica $M$ by sme ukázali analogicky ako v dôkaze lemmatu 3.10. Všimnime si, že situácie, ktorým sme sa venovali v bode 1 boli z maticového pohľadu prípady, keď hodnosť matice $M$ je dva a jeden v tomto poradí. V tomto bode sa budeme venovať situácii, keď hodnosť matice $M$ je tri. V prípade, že je hodnosť matice štyri, tak to zodpovedá nesingulárnej nadploche. Nech hodnosť matice je tri. Potom $\exists \mathbf{y} \in \mathbb{A}^4 : M\mathbf{y} = \mathbf{0}$, $\mathbf{y}^\top M = \mathbf{0}^\top$, kde sme využili symetriu matice $M$. Z toho plynie, že $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{A}^4 : \mathbf{x}^\top M \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top M \mathbf{x} = 0$. Ďalej, keďže $\hat{l}_1, \hat{l}_2, \hat{l}_3$ sú po dvoch disjunktné, tak $\exists i \in \{1, 2, 3\} : \mathbf{y} \notin \hat{l}_i$. Bez ujmy na obecnosti predpokladajme, že $\mathbf{y} \notin \hat{l}_1$. Potom $\forall \mathbf{x} \in \hat{l}_1 \ \forall (a : b) \in \mathbb{P}^1$ :

$$\begin{aligned} g(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) &= (a\mathbf{x} + b\mathbf{y})^\top M (a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) \\ &= a^2 \mathbf{x}^\top M \mathbf{x} + ab\mathbf{x}^\top M \mathbf{y} + ab\mathbf{y}^\top M \mathbf{x} + b^2 \mathbf{y}^\top M \mathbf{y} \\ &= 0, \end{aligned}$$

kde sme využili to, že $\mathbf{x}^\top M\mathbf{y}, \mathbf{y}^\top M\mathbf{x} = 0$ a keďže $\mathbf{x} \in \hat{l}_1 \subseteq Q$, tak $g(a\mathbf{x}) = 0$. Pretože $\mathbf{y} \notin \hat{l}_1$ a $\mathbf{x} \in \hat{l}_1$, tak $a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$ určuje rovinu obsahujúcu $\hat{l}_1$ a $\mathbf{y}$ na $Q$. V bode 1 sme ale ukázali, že nadplocha $Q$ neobsahuje žiadnu rovinu, teda dostávame spor.

Týmto sme dokázali, že nadplocha $Q$ je nesingulárna.

□

**Lemma 3.14.** *Nech $Q \subseteq \mathbb{P}^3$ je nesingulárna kvadratická nadplocha definovaná kvadratickým homogénnym polynómom $g$. Potom po vhodnej zmene súradníc je $Q = \mathcal{V}(x_0x_1 - x_2x_3)$.*

*Dôkaz.* Analogicky ako v dôkaze lemmatu 3.10 by sme ukázali, že existuje symetrická matica $M \in \mathbf{M}_4(K)$ taká, že $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{A}^4 : g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top M\mathbf{x}$, ktorá je naviac singulárna práve vtedy, keď je singulárna nadplocha $Q$, teda matica $M$ je regulárna. Potom vhodnou zmenou súradníc prevedieme maticu $M$ na maticu diag$(a,b,c,d)$, kde $a, b, c, d \in K$. Keďže matica $M$ je regulárna, tak $a, b, c, d \neq 0$. Teda vzhľadom k tejto zmene súradníc je

$$\begin{aligned} g(x_0, \ldots, x_3) &= (x_0, \ldots, x_3)\mathrm{diag}(a,b,c,d)(x_0, \ldots, x_3)^\top \\ &= ax_0^2 + bx_1^2 + cx_2^2 + dx_3^2 \\ &= (\sqrt{a}x_0 + i\sqrt{b}x_1) \cdot (\sqrt{a}x_0 - i\sqrt{b}x_1) \\ &\quad - (i\sqrt{c}x_2 - \sqrt{d}x_3) \cdot (i\sqrt{c}x_2 + \sqrt{d}x_3). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ďalej nech

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & i\sqrt{b} & 0 & 0 \\ \sqrt{a} & -i\sqrt{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{c} & -\sqrt{d} \\ 0 & 0 & i\sqrt{c} & \sqrt{d} \end{pmatrix},$$

potom $\det A = \det \begin{pmatrix} \sqrt{a} & i\sqrt{b} \\ \sqrt{a} & -i\sqrt{b} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} i\sqrt{c} & -\sqrt{d} \\ i\sqrt{c} & \sqrt{d} \end{pmatrix} = -2i\sqrt{ab} \cdot 2i\sqrt{cd} = 4\sqrt{abcd} \neq 0$, kde sme v prvej rovnosti využili to, že je matica $A$ blokovo diagonálna. Teda matica $A$ určuje zmenu súradníc $F$ na $\mathbb{P}^3$. Potom použitím zmeny súradníc $F^{-1}$ dostávame $g(x_0, \ldots, x_3) = x_0x_1 - x_2x_3$, kde sme použili vyjadrenie $g$ v tvare (3.6).

□

**Lemma 3.15.** *Nech $Q \subseteq \mathbb{P}^3$ je nesingulárna kvadratická nadplocha. Potom množina všetkých priamok v $\mathbb{P}^3$, ktoré ležia na nadploche $Q$, je rozdelená do dvoch disjunktných rodín $F_1$ a $F_2$ takých, že*

1. *žiadne dve rôzne priamky z tej istej rodiny sa nepretnú,*
2. *ak $\hat{l}_1 \in F_1$ a $\hat{l}_2 \in F_2$, tak $\hat{l}_1 \cap \hat{l}_2 \neq \emptyset$,*
3. *$\bigcup_{\hat{l}_1 \in F_1} \hat{l}_1 = Q = \bigcup_{\hat{l}_2 \in F_2} \hat{l}_2$.*

*Dôkaz.* Z lemmatu 3.14 vieme, že po vhodnej zmene súradníc môžeme predpokladať, že $Q = \mathcal{V}(x_0x_1 - x_2x_3)$. Ďalej uvažujme zobrazenie

$$\begin{aligned} s : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\to Q, \\ ((u_0 : u_1), (v_0 : v_1)) &\mapsto (u_0v_0 : u_1v_1 : u_1v_0 : u_0v_1). \end{aligned}$$

Zobrazenie $s$ je dobre definované, pretože ak $(k_1u_0 : k_1u_1), (k_2v_0 : k_2v_1) \in \mathbb{P}^1$, kde $k_1, k_2 \in K$, tak

$$\begin{aligned} s((k_1u_0 : k_1u_1), (k_2v_0 : k_2v_1)) &= (k_1k_2u_0v_0 : k_1k_2u_1v_1 : k_1k_2u_1v_0 : k_1k_2u_0v_1) \\ &= (u_0v_0 : u_1v_1 : u_1v_0 : u_0v_1), \end{aligned}$$

a pretože aspoň jedna zložka z $u_0, u_1$ a $v_0, v_1$ je nenulová, tak aspoň jedna zložka z $u_0v_0, u_1v_1, u_1v_0, u_0v_1$ je nenulová.

Zobrazenie $s$ je naviac bijekcia. Nech $(c_{00} : c_{11} : c_{10} : c_{01}) \in Q$ a $c_{00} = 1$. Ak $s((u_0 : u_1), (v_0 : v_1)) = (1 : c_{11} : c_{10} : c_{01})$, tak $u_0, v_0 \neq 0$. Teda bez ujmy na obecnosti môžeme predpokladať, že $u_0 = v_0 = 1$ [4]. Z toho plynie, že $u_1 = c_{10}$ a $v_1 = c_{01}$. Teda zebrazenie $s$ je prosté. Ďalej body $s(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ zrejme spĺňajú rovnosť definujúcu $Q$, teda $s(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subseteq Q = \mathcal{V}(x_0x_1 - x_2x_3)$. Naopak, uvažujme bod $c = (c_{00} : c_{11} : c_{10} : c_{01}) \in Q$. Aspoň jedna z jeho súradníc musí byť nenulová. Bez ujmy na obecnosti, nech je to $c_{00}$. Prejdime k afinným súradniciam položením $c_{00} = 1$ (teda uvažujeme konkrétnu reprezentáciu bodu $c$ takú, že $c_{00} = 1$). Potom dostaneme, že $c_{ij} = c_{i0}c_{0j}$, kde $i, j \in \{0, 1\}$. Teda položením $u_i := c_{i0}$ a $v_j := c_{0j}$, kde $i, j \in \{0, 1\}$, dostaneme bod z $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, ktorý je vzorom bodu $c$ pri zobrazení $s$. Tým sme ukázali, že zobrazenie $s$ je surjektívne. Keďže $s$ je injektívne aj surjektívne, tak máme dokázané, že je to bijektívne zobrazenie.

Vezmime dve množiny $F_1, F_2$ prvkov $Q$, kde

$$F_1 := \left\{ s\left(\{p\} \times \mathbb{P}^1\right) : p \in \mathbb{P}^1 \right\},$$

$$F_2 := \left\{ s\left(\mathbb{P}^1 \times \{q\}\right) : q \in \mathbb{P}^1 \right\}.$$

Prvky $F_1$ a $F_2$ sú priamky ležiace na nadploche $Q$, pretože ak vezmeme pevne zvolený bod $p = (a : b) \in \mathbb{P}^1$, tak

$$s\left(\{p\} \times \mathbb{P}^1\right) = \left\{ (av_0 : bv_1 : bv_0 : av_1) \in \mathbb{P}^3 : (v_0 : v_1) \in \mathbb{P}^1 \right\}$$

je priamka prechádzajúca bodmi $(a : 0 : b : 0)$ a $(0 : b : 0 : a)$. Analogicky by sme ukázali, že aj prvky množiny $F_2$ sú priamky ležiace na $Q$.

Ukážeme, že každá priamka ležiaca na nadploche $Q$ patrí do $F_1$ alebo $F_2$. Nech $\hat{l} \subseteq Q$ je priamka a voľme $x := s(p,q) \in \hat{l}$. Potom $\hat{l}, s\left(\{p\} \times \mathbb{P}^1\right), s\left(\mathbb{P}^1 \times \{q\}\right) \in T_xQ \cap Q$. To by sme dokázali analogicky ako lemma 3.9, v ktorom je jediný rozdiel ten, že pracujeme na nesingulárnej kubickej nadploche $S$ a nie na nesingulárnej kvadratickej nadploche $Q$. Keďže $Q$ je určená ireducibilným polynómom, tak aj nadplocha $Q$ je ireducibilná, takže $T_xQ \nsubseteq Q$ a $T_xQ \cap Q$ je kužeľosečka (môže byť aj degenerovaná) v rovine $T_xQ$. Z toho plynie, že v $T_xQ \cap Q$ sú nanajvýš dve priamky, teda buď $\hat{l} = s\left(\{p\} \times \mathbb{P}^1\right)$, alebo $\hat{l} = s\left(\mathbb{P}^1 \times \{q\}\right)$. Z toho dostávame, že každá priamka ležiaca na nadploche $Q$ patrí do $F_1$ alebo $F_2$.

[4] V opačnom prípade by sme zložky bodu $(u_0 : u_1)$ vydelili členom $u_0$ a zložky bodu $(v_0 : v_1)$ vydelili členom $v_0$.

Z toho, že je $s$ bijektívne a predpisov $F_1$ a $F_2$ hneď plynie bod 1, stačí v množine $F_1$ voliť $p_1 \neq p_2$, potom $(\{p_1\} \times \mathbb{P}^1) \cap (\{p_2\} \times \mathbb{P}^1) = \emptyset$, teda

$$s\left(\{p_1\} \times \mathbb{P}^1\right) \cap s\left(\{p_2\} \times \mathbb{P}^1\right) = \emptyset,$$

a analogicky v prípade $F_2$.

Bod 2 platí okamžite z voľby množín $F_1$ a $F_2$, pretože bod $(p,q)$ patrí do prieniku priamky z $F_1$ a priamky z $F_2$, kde $p, q$ berieme ako zodpovedajúce body v definícii $F_1, F_2$.

Bod 3 taktiež platí hneď, pretože stačí voliť bod $r := s(p,q)$, kde $p, q$ opäť berieme ako zodpovedajúce body v definícii $F_1, F_2$.

□

**Lemma 3.16.** *Nech $\hat{l}_1, \ldots, \hat{l}_4$ sú po dvoch disjunktné priamky v $\mathbb{P}^3$ a neležia všetky na jednej nesingulárnej kvadratickej nadploche $Q \subseteq \mathbb{P}^3$. Potom počet priamok, ktoré pretnú $\hat{l}_1, \ldots, \hat{l}_4$ je 1 alebo 2.*

*Dôkaz.* Z lemmatu 3.13 vieme, že ľubovoľná trojica rôznych priamok v $\mathbb{P}^3$ leží na nadploche $Q$. Bez ujmy na obecnosti predpokladajme, že sú to $\hat{l}_1, \hat{l}_2, \hat{l}_3$ a z lemmatu 3.15 bod 1 môžeme rodinu, do ktorej patria, označiť ako $F_1$. Potom z lemmatu 3.12 obsahuje $\hat{l}_4 \cap Q$ jeden alebo dva body. Ďalej pre každý bod $p \in \hat{l}_4 \cap Q$ označme $l_p$ priamku ležiacu na $Q$ takú, že $p \in l_p$ a $l_p \notin F_1$. Takáto priamka zjavne existuje, pretože $\hat{l}_1, \hat{l}_2, \hat{l}_3 \in F_1$ sú disjunktné, teda každá priamka, ktorá ich pretína, tak ich pretína dokopy v troch rôznych bodoch. Teda z lemmatu 3.12 takáto priamka leží na nadploche $Q$. Potom priamka $l_p$ pretína všetky štyri priamky $\hat{l}_1, \ldots, \hat{l}_4$.

Žiadne ďalšie priamky, ktoré by pretínali $\hat{l}_1, \ldots, \hat{l}_4$ nie sú. Pre spor predpokladajme, že $n$ je ďalšia taká priamka. Potom $n \subseteq Q$ z lemmatu 3.12 a z lemmatu 3.15 $n \in F_1$, alebo $n \in F_2$. Ak $n \in F_1$, tak z lemmatu 3.15 bod 1, $n$ nepretína žiadnu priamku z $\hat{l}_1, \ldots, \hat{l}_3$, teda dostávame spor. Ak $n \in F_2$, tak $n \cap \hat{l}_4 \subseteq \hat{l}_4 \cap Q$, teda v prípade, že $n \cap \hat{l}_4 = \emptyset$, tak $n$ nepretne $\hat{l}_4$, čo je spor, alebo ak pretne, tak $n = l_p$.

□

**Lemma 3.17.** *Na nesingulárnej kvadraticke nadploche $Q$ neležia štyri po dvoch disjunktné priamky $\hat{l}_1, \ldots, \hat{l}_4 \in S$.*

*Dôkaz.* Tvrdenie dokážeme sporom. Nech existuje taká kvadratická nadplocha $Q$, že priamky $\hat{l}_1, \ldots, \hat{l}_4$ na nej ležia. Keďže $Q$ je nesingulárna a $\hat{l}_1, \ldots, \hat{l}_4$ sú po dvoch disjunktné, tak z lemmatu 3.15 bod 1 plynie, že všetky štyri patria do jednej rodiny, povedzme $F_1$. Ďalej z lemmatu 3.15 bod 3 je $Q = \cup_{\hat{l} \in F_2} \hat{l}$.

Ukážeme, že polynóm $f$ je na nadploche $Q$ konštantne nulový. Nech $n \in F_2$ leží na $S$. Po vhodnej zmene súradníc je $n = \mathcal{V}(x_2, x_3)$. Z lemmatu 3.15 bod 2 má $n$ s každou priamkou z $\hat{l}_1, \ldots, \hat{l}_4$ neprázdny prienik. Keďže $\hat{l}_1, \ldots, \hat{l}_4$ sú po dvoch disjunktné, tak prieniky $n \cap \hat{l}_i$, kde $i \in \{1, \ldots, 4\}$,určujú 4 rôzne korene polynómu $f(x_0, x_1, 0, 0)$. Tento polynóm je stupňa nanajvýš 3, z čoho plynie, že je konštantne nulový.

Teda $Q \subseteq S$. Keďže $Q$ je kvadratická nadplocha, tak existuje homogénny kvadratický polynóm, ktorý ju určuje. Označme ho $u$, teda $Q = \mathcal{V}(u)$. Potom z

$\mathcal{V}(u) \subseteq \mathcal{V}(f)$ plynie $(u) \supseteq (f)$. To znamená, že $u$ delí $f$, čo je spor s ireducibilitou nadplochy $S$.

$\square$

**Lemma 3.18.**

1. *Ľubovoľná priamka na $S$, ktorá leží v množine $B$ pretne práve 3 z priamok $l_1, \ldots, l_5$ a je jednoznačne určená troma priamkami, ktoré pretne.*

2. *Pre ľubovoľnú voľbu $i, j, k \in \{1, \ldots, 5\}$ existuje priamka na $S$, ktorá neleží v množine $A$ a pretne $l_i, l_j$ a $l_k$.*

*Dôkaz.* Nech $n \in B$ je priamka ležiaca na nadploche $S$. Najprv si uvedomme, že $n$ nepretne $l$ ani $m$, pretože z vety 3.11 vieme, že každú priamku na $S$ pretne práve desať priamok a $l, m$ pretínajú $l_1, \ldots, l_5$ a $l'_1, \ldots, l'_5$, respektíve $l''_1, \ldots, l''_5$. Ukážeme, že $n$ pretne práve tri priamky z $l_1, \ldots, l_5$ tak, že všetky ostatné možnosti vylúčime.

1. Priamka $n$ nepretne viac ako tri priamky z $l_1, \ldots, l_5$. Ak by priamka $n$ pretla aspoň štyri priamky z $l_1, \ldots, l_5$, tak z lemmatu 3.16 plynie, že $n \in \{l, m\}$, čo je spor s tým, že $n \in B$.

2. Priamka $n$ nepretne menej ako dve priamky z $l_1, \ldots, l_5$. Ak by $n$ pretla nanajvýš jednu priamku z $l_1, \ldots, l_5$, tak by pretla aspoň štyri priamky z $l'_1, \ldots, l'_5$. Ukázali by sme to analogicky ako v prípade priamky $m$ na stranách $31 - 32$. Rovnako ako v bode 1 vedie tento prípad k sporu, pretože z lemmatu 3.16 má platiť, že $n \in \{l, m\}$, ale $n \in B$.

3. Priamka $n$ nepretne dve priamky z $l_1, \ldots, l_5$. Nech $n$ pretne priamky $l_4$ a $l_5$. Keďže $n$ nepretne $l$ ani $m$, viď vyššie, tak pretne $l'_1, l'_2, l'_3$ a nepretne $l''_4$ ani $l''_5$.

   Keďže $l \cap l''_j = \emptyset$, inak by $l''_j \in \{l_1, \ldots, l_5, l'_1, \ldots, l'_5\}$, čo je spor, tak by sme dokázali, že $l''_j$ pretne buď $l_i$ alebo $l'_i$ pre $i \in \{1, \ldots, 5\}$ analogicky ako tvrdenie, že $m$ pretne buď $l_i$ alebo $l'_i$ pre $i \in \{1, \ldots, 5\}$ na strane 31. Pretože $l_i \cap l''_j = \emptyset$, tak $l''_j$ pretne $l'_i$. Teda $l''_j \cap l'_i \neq \emptyset$ pre $i \in \{1, \ldots, 5\}$.

   Teda dostávame, že po dvoch disjunktné priamky $n, l''_4, l''_5$ pretínajú po dvoch disjunktné priamky $l'_1, \ldots, l'_3, l_4$. Z lemmatu 3.17 plynie, že $l'_1, \ldots, l'_3, l_4$ neležia všetky na jednej nesingulárnej kvadratickej nadploche, teda ležia na aspoň dvoch. Potom z lemmatu 3.16 plynie, že $l'_1, \ldots, l'_3, l_4$ pretnú nanajvýš dve priamky, teda dostávame spor.

Dokázali sme, že priamka $n$ pretne práve tri priamky z $l_1, \ldots, l_5$. Takú priamku $n$ si označíme ako $l_{ijk}$.

Ukážeme, že priamka $l_{ijk}$ je určená jednoznačne. Pre spor predpokladajme dve rôzne priamky $l_{ijk}, l'_{ijk}$, ktoré sú disjunktné s $l, m$ a pretínajú $l_i, l_j, l_k$. Ak $l_{ijk} \cap l'_{ijk} \neq \emptyset$, tak priamky $l_i, l_j, l_k, l_{ijk}, l'_{ijk}$ ležia v jednej rovine, čo je spor s lemmatom 3.2. Teda máme po dvoch rôzne priamky $l_i, l_j, l_k$, ktoré pretínajú po dvoch rôzne priamky $l, m, l_{ijk}, l'_{ijk}$. Potom analogicky ako v bode 3 v tomto dôkaze vďaka lemmatám 3.17 a 3.16 dostávame spor. Teda priamka $l_{ijk}$ je určená jednoznačne.

Ostáva dokázať, že všetky priamky $l_{ijk}$ existujú. Z vety 3.11 priamka $l_i$, kde $i \in \{1, \ldots, 5\}$ pretne desať priamok. Priamky $m$ a $l_i''$ pretože ležia s $l_i$ v jednej rovine $Q_i$. Z rovnakého dôvodu aj priamky $l$ a $l_i'$, pretože ležia v jednej rovine $P_i$. Z vety 3.11 vieme, že $\forall j \in \{1, \ldots, 5\}, j \neq i$ priamky $l_j$ a $l_j'$ nepretnú $l_i$ a taktiež $l_j''$, viď bod 3 tohto dôkazu. Teda všetky priamky z množiny $A$, ktoré pretnú $l_i$ sú $l, m, l_i', l_i''$. Potom je šesť priamok v množine $B$, ktoré pretnú $l_i$. Každá z týchto šiestich priamok pretne práve dve priamky z $\{1, \ldots, 5\} \backslash \{l_i\}$, čo je $\binom{4}{2} = 6$ možností. Každá z možností môže nastať nanajvýš raz. Ak ny niktorá nenastala, mali by sme opäť prípad troch po dvoch disjunktných priamok, ktoré majú pretínať štyri po dvoch disjunktné priamky, čo je spor, ako sme už ukázali v tomto dôkaze. Teda každá možnosť nastane práve raz, čo znamená, že všetky priamky $l_{ijk}$, kde $i, j, k \in \{1, \ldots, 5\}$ navzájom rôzne, existujú.

$\square$

Keďže všetky priamky v množine $B$ sú tvaru $l_{ijk}$, tak počet priamok v $B$ je rovný počtu možností výberu trojíc rôznych čísel z $\{1, \ldots, 5\}$, to jest $\binom{5}{3} = 10$. Potom na nadploche $S$ leží $|A| + |B| = 17 + 10 = 27$ priamok.

# Záver

Cieľom práce bolo ukázať jednu zaujímavú vlastnosť nesingulárnych kubických nadplôch nad algebraicky uzavretým telesom $K$ charakteristiky rôznej od dvoch. Konkrétne to, že na takejto nadploche ležiacej v $\mathbb{P}^3_K$ existuje práve 27 rôznych priamok.

V prvých dvoch kapitolách sme pripomenuli a ukázali základné pojmy a vlastnosti ohľadom afinných a projektívnych variet.

V tretej kapitole sme ukázali existenciu 27 rôznych priamok na nadploche $S$, kde sme najprv ukázali, že na nadploche $S$ existuje priamka a následne určili všetky priamky pomocou ich vzájomných vzťahov.

# Zoznam použitej literatúry


FULTON, W. (2008). Algebraic curves. *An Introduction to Algebraic Geometry.* `http://www.math.lsa.umich.edu/~wfulton/CurveBook.pdf`.

HULEK, K. (2003). *Elementary Algebraic Geometry*, volume 20 of *Student Mathematical Library.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

KALA, V. Komutativní okruhy. `http://karlin.mff.cuni.cz/~kala/1920%20ko/KO%20skripta.pdf`. Citované: 30.12.2020.

LAZARUS, S. (2014). Basic algebraic geometry and the 27 lines on a cubic surface. `http://math.uchicago.edu/~may/REU2014/REUPapers/Lazarus.pdf`.

REID, M. (1988). *Undergraduate Algebraic Geometry.* London Mathematical Society Student Texts 12. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom.