



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jakub Novák

Základy perzistentní homologie

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Štovíček, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Chtěl bych poděkovat mému vedoucímu práce, doc. RNDr. Jan Štovíček, Ph.D.,
za cenné rady, zajímavé informace a vždy pozitivní přístup.

Název práce: Základy perzistentní homologie

Autor: Jakub Novák

Katedra: Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Štovíček, Ph.D., Katedra algebry

Abstrakt: V této práci seznámíme čtenáře s teorií perzistentní homologie a naznačíme její aplikace. V první kapitole ukážeme základy simplicialní a singulární homologie a dokážeme základní vztahy, zejména nezávislost simplicialních homologických grup na zvoleném Δ -komplexu a izomorfismus mezi homologickými grupami homotopických prostorů. V druhé kapitole vysvětlíme motivaci za perzistentní homologií, popíšeme její algebraickou strukturu a způsob, jak lze vizuálně reprezentovat. Popíšeme a dokážeme správnost algoritmu na její výpočet. Teorii poté ilustrujeme na příkladu.

Klíčová slova: homologie, perzistentní homologie, redukční algoritmus

Title: Basics on persistent homology

Author: Jakub Novák

Department: Department of Algebra

Supervisor: doc. RNDr. Jan Štovíček, Ph.D., Department of algebra

Abstract: In this work, the reader is introduced to the theory of persistent homology and its applications. In the first chapter we will show the basics of simplicial and singular homology and we will prove the basic relations, especially the independence of simplicial homological groups on the chosen Δ -complex and isomorphism between homological groups of homotopic spaces. In the second chapter, we explain the motivation behind persistent homology, describe its algebraic structure and how it can be visually represented. We describe and prove the correctness of the algorithm for its calculation. We then illustrate the theory on an example.

Keywords: homology, persistent homology, reduction algorithm

Obsah

Úvod	2
1 Homologie	3
1.1 Simpliciální homologie	3
1.2 Singulární homologie	6
1.3 Homotopická invariance	8
1.4 Relativní homologie	11
1.5 Ekvivalence simpliciální a singulární homologie	20
2 Perzistentní homologie	22
2.1 Algebraická struktura	22
2.2 Věta o nervu	27
2.3 Vizualizace	28
2.4 Algoritmus	29
2.5 Korektnost algoritmu	30
2.6 Příklad	32
Závěr	35
Seznam použité literatury	36

Úvod

Práce pojednává o metodě topologické analýzy dat, perzistentní homologie. Za cíl si klade rozpoznat homologické grupy prostoru, z kterého jsou data vybrána. Tato metoda je částečně založena na homologii, která je jednou z hlavních témat algebraické topologie. Homologii je věnována první část, která má čtenáře uvést do této teorie.

V první části je popsána nejprve simplicialní homologie a následně singulární homologie. Pomocí té jsou dokázány základní výsledky, které opodstatňují myšlenku perzistentní homologie. Přesněji se jedná o tvrzení, že homotopické prostory mají izomorfní homologické grupy a na konci kapitoly dokážeme, že simplicialní a singulární homologické grupy pro daný prostor jsou izomorfní. Z toho vyplývá nezávislost simplicialní homologie na zvoleném Δ -komplexu. To dává základní myšlenku perzistentní homologii, kde bychom pomocí bodů chtěli najít Δ -komplex prostoru a poté pomocí simplicialní homologie spočítat jeho homologické grupy.

V druhé kapitole popíšeme základní vlastnosti perzistentní homologie, dokážeme větu o struktuře perzistentního modulu nad tělesem, která nám dá jednoznačnost perzistentních homologických grup pro pevné body, navíc z ní lze dobře nahlédnout strukturu. Uvedeme algoritmus na výpočet perzistentních grup a ukážeme jeho správnost. Uvedeme způsob, jak lze výsledky vizualizovat. Nakonec vše ilustrujeme na příkladu.

V celé práci používáme méně tradičně $\mathbb{N} := \{0, 1, \dots\}$ a uvažujeme jen konečně dimenzionální prostory.

1. Homologie

Tato kapitola by měla čtenáře seznámit s jednou ze základních teorií z algebraické topologie. Homologie přiřazuje prostoru posloupnost grup, která je izomorfní pro prostory, které jsou v jistém smyslu podobné. Navíc díky těmto grupám lze počítat a různě kategorizovat „díry“ v prostoru. Je poměrně jednoduchá na výpočet, protože na rozdíl od fundamentálních grup je vše abelovské.

Tato kapitola je rozdělena na dvě části. V první budeme zkoumat simplicialní homologii, vycházející ze zvolení pokrytí prostoru množinám podobným n -dimenzionálním trojúhelníkům. Navážeme se singulární homologií, která dobře slouží k teoretickým účelům. Pomocí ní dokážeme pro nás dvě důležitá tvrzení, že podobné prostory mají homologické grupy opravdu izomorfní a že simplicialní homologie pro zvolené pokrytí je izomorfní se singulární homologií. Z toho nám pak plyne, že pro různé pokrytí dostaneme izomorfní homologické grupy, proto až na izomorfismus nezáleží na zvolení pokrytí.

Pokud nebude psáno jinak, je vše převzato z Hatcherovy knihy (Hatcher, 2002, Kapitola 2).

1.1 Simplicialní homologie

Definice 1. Necht $m, n \in \mathbb{N}$ a mějme body $v_0, \dots, v_n$ v $\mathbb{R}^m$. **Konvexním obalem** bodů $v_0, \dots, v_n$ nazýváme množinu

$$\left\{ \sum_{k=0}^n n_k \cdot v_k \mid (\forall k \in \{0, 1, \dots, n\})(n_k \in \mathbb{R} \wedge n_k \geq 0) \wedge \sum_{k=0}^n n_k = 1 \right\}.$$

Definice 2. Necht $m, n \in \mathbb{N}$. Dále mějme $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$. Pokud je množina vektorů $\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$ lineárně nezávislá, potom definujeme **n -simplex** jako konvexní obal bodů $v_0, \dots, v_n$, typicky značíme jako $[v_0, \dots, v_n]$, kde lineární nezávislost vyjadřujeme tím, že říkáme, že se jedná o n -simplex.

Standardním n -simplexem je konvexní obal bodů $\mathbf{0}, e_1, \dots, e_n$, kde e_i značí kanonickou bázi v $\mathbb{R}^n$. Budeme ho značit jako Δ^n .

Definice 3. Necht $n \in \mathbb{N}$. Mějme n -simplex $[v_0, \dots, v_n]$, **stěnou** n -simplexu rozumíme $(n-1)$ -simplex, který vznikne vynecháním i -tého vrcholu, tedy jde o $[v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$.

Definice 4. Topologickým prostorem je uspořádaná dvojice (X, ρ) , kde je X množina a ρ je systém podmnožin splňující:

- $\emptyset, X \in \rho$
- $A_1, A_2, \dots \in \rho \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \rho$
- $A_1, \dots, A_n \in \rho \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \rho$

Systém množin ρ nazýváme **topologie na X** . Prvky topologie ρ nazveme **otevřené množiny**.

Definice 5. *Podprostorem topologického prostoru (X, ρ) rozumíme dvojici (Y, ρ_Y) , kde $Y \subseteq X$ a topologii ρ_Y definujeme jako $\rho_Y = \{Y \cap U \mid U \in \tau\}$.*

Poznámka. U topologického prostoru (X, ρ) budeme ρ vynechávat a budeme ho značit jen X .

Definice 6. *Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ mezi topologickými prostory X a Y je **spojité**, pokud pro každou otevřenou množinu U v Y platí, že její vzor $f^{-1}(U)$ je otevřená množina v X .*

Definice 7. *Pro topologický prostor X definujeme **n -simplex v X** jako spojitě zobrazení $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$.*

Stěnou σ rozumíme restrikci σ na stěnu simplexu. Jedná se o zobrazení $\sigma|_{[v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]}$ pro $i \in \{0, \dots, n\}$.

Definice 8. *Pro topologický prostor X definujeme **Δ -komplex** jako množinu simplexů v X $\{\sigma_\alpha: \Delta^{n_\alpha} \rightarrow X \mid \alpha \in \Gamma\}$, kde Γ je indexová množina a $n_\alpha \in \mathbb{N}$ pro každé α , která navíc splňuje:*

- $\sigma_\alpha|_{\text{Int}(\Delta^n)}$ je prosté $\forall \alpha \in \Gamma$ a každý bod $x \in X$ je prvkem obrazu právě jednoho $\text{Int}(\sigma_\alpha(\Delta^{n_\alpha}))$.
- Pro každou restrikci σ_α na stěnu n -simplexu existuje nějaké $\sigma_\beta: \Delta^{n-1} \rightarrow X$ v Δ -komplexu, že se tyto zobrazení shodují.
- Množina $A \subseteq X$ je otevřená právě tehdy, když $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ je otevřená v Δ^n pro každé zobrazení σ_α .

Definice 9. *Ať G je abelovská grupa a $X \subseteq G$ množina. Řekneme, že X je **báze volné grupy G** , pokud pro každé zobrazení $\psi: X \rightarrow H$, kde H je libovolná abelovská grupa, existuje **jednoznačně** určený **homomorfismus** $\varphi: G \rightarrow H$, že $\varphi|_X \equiv \psi$. Grupa je **volná** pokud obsahuje nějakou volnou bázi.*

Definice 10. *Pro topologický prostor X a Δ -komplex pro tento prostor označme množinu všech n -simplexů z Δ -komplexu jako $\Delta_n(X)$.*

Definice 11. *Pro topologický prostor X , každé $n \in \mathbb{N}$ a zvolený Δ -komplex definujeme volnou abelovskou grupu $C_n^\Delta(X)$ s bází $\Delta_n(X)$. **Řetězcem n -simplexů** rozumíme prvky této grupy, tedy $\sum_{\sigma_\alpha \in \Delta_n(X)} k_\alpha \sigma_\alpha$, kde $k_\alpha \in \mathbb{Z}$, $\sigma_\alpha \in \Delta_n(X)$. Většinou nazýváme zkráceně jen n -řetězci nebo pouze řetězci, pokud je n jasné z kontextu.*

Poznámka. $\Delta_n(X)$ je volná báze grupy $C_n^\Delta(X)$.

Definice 12. *Mějme n -simplex σ v X , pro $i \in \{0, \dots, n\}$ definujme funkci přiřazující i -tou stěnu*

$$d_i: \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_{n-1}(X)$$

$$\sigma \mapsto \sigma|_{[v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]}.$$

Pro $n > 0$ definujeme zobrazení přiřazující n -simplexu jeho **hranici**

$$\begin{aligned}\partial_n: \Delta_n(X) &\rightarrow C_{n-1}^\Delta \\ \sigma &\mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i(\sigma).\end{aligned}$$

Pro 0-simplex definujeme $\partial_0(\sigma) = 0$.

Rozšíření tohoto zobrazení na homomorfismus z definice volné abelovské grupy dostáváme

$$\begin{aligned}\partial_n: C_n^\Delta(X) &\rightarrow C_{n-1}^\Delta(X) \\ \sum_{\alpha} k_{\alpha} \sigma_{\alpha} &\mapsto \sum_{\alpha} k_{\alpha} \partial_n \sigma_{\alpha}.\end{aligned}$$

Nazýváme jej **hraniční homomorfismus**. Obraz prvku nazýváme **hranicí**.

Tvrzení 1 (O hranici z hranice). Pro každé $c \in C_n^\Delta(X)$ platí $\partial_{n-1}\partial_n(c) = 0$ pro $n > 0$. Nebo-li hranice z hranice je 0.

Důkaz. Nejdříve dokážeme pro n -simplex $\sigma \in \Delta_n(X)$. Platí

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]}.$$

Potom

$$\begin{aligned}\partial_{n-1}\partial_n(\sigma) &= \partial_{n-1} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]} \right) = \\ &= \sum_{i>j} (-1)^j (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]} + \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{j-1} (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n]} = 0.\end{aligned}$$

Poslední rovnost lze snadno nahlédnout z toho, že obě sumy obsahují stejné členy, ale s opačným znamínkem, proto se navzájem odečtou a z toho plyne tvrzení.

Protože $C_n^\Delta(X)$ je volná grupa s bází $\Delta_n(X)$, tak hned dostáváme, že pro $c \in C_n^\Delta(X)$ platí

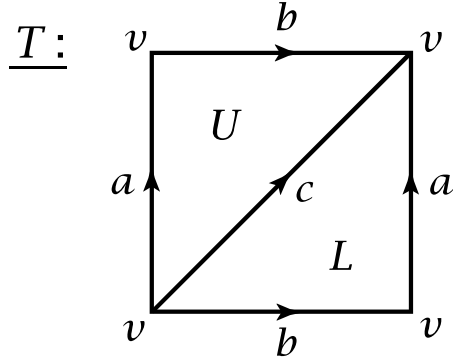
$$\partial_{n-1}\partial_n(c) = 0.$$

Tím je tvrzení dokázáno. □

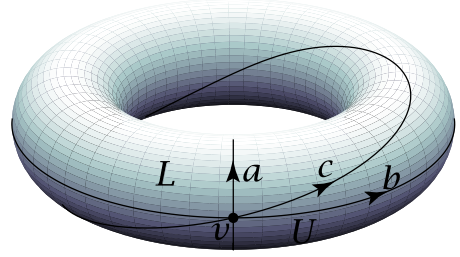
Definice 13. Necht $n \in \mathbb{N}$ a X je topologický prostor a zvolme jeho Δ -komplex, potom n -**cyklem** nazveme ty prvky $c \in C_n^\Delta(X)$, které jsou navíc i prvkem $\text{Ker } \partial_n$. Ty $c \in C_n^\Delta(X)$, které jsou prvkem $\text{Im } \partial_{n+1}$, nazveme n -**hranice**.

Poznámka. Ze vztahu $\partial_{n-1}\partial_n(c) = 0$ pro všechny $c \in C_n^\Delta(X)$ dostáváme, že $\text{Im } \partial \subseteq \text{Ker } \partial$.

O $\text{Im } \partial_{n+1}$ můžeme uvažovat jako o grupě „nezajímavých“ n -cyklů, protože to jsou hranice $(n+1)$ -simplexů, ale mezi $\text{Ker } \partial_n$ se mohou skrývat n -cykly, že v Δ -komplexu není $(n+1)$ -simplex, který by měl cyklus za hranici. To značí, že v prostoru je nějaká díra, kterou tento cyklus označuje. Jelikož my chceme studovat právě tyto díry, tak se zbavíme n -hranic tím, že $\text{Im } \partial_{n+1}$ vyfaktorizujeme, tím získáme pouze „zajímavé“ n -cykly. To nám dává motivaci pro tuto definici.



Obrázek 1.1: Čtverec, z kterého lze získat torus slepením protilehlých stran



Obrázek 1.2: Torus se simplexu

Definice 14. Necht X topologický prostor se zvoleným Δ -komplexe, potom n . **homologickou grupou** rozumíme faktorgrupu $H_n^\Delta(X) = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$. Třídy této faktorgrupy nazýváme **homologické třídy**. Pokud jsou dva prvky ve stejné třídě, nazveme je **homologické**.

Příklad (Torus). Spočítáme homologické grupy pro torus T . Zvolme Δ -komplex jako na obrázku 1.2, kde máme dva 2-simplexy U a V se stranami a, b, c , které tvoří všechny 1-simplexy. Všechny tři 1-simplexy začínají a končí v 0-simplexu, bodu v . Tento Δ -komplex lze reprezentovat také pomocí čtverce s jednou úhlopříčkou jako na obrázku 1.1, kde slepením protilehlých stran dostaneme torus. Z reprezentace pomocí čtverce lze lépe nahlédnout vztahy mezi jednotlivými simplexu.

Jistě platí, že $H_n^\Delta(T) = 0$ pro všechna $n > 2$. Dále máme $\partial_2 U = \partial_2 L = a + b - c$. Platí $\partial_2(pU - qL) = (p - q)(a + b - c) = \mathbf{0} \Leftrightarrow p = q$ a neexistují žádné 3-simplexy. Z toho plyne $H_2^\Delta(T) = \text{Ker } \partial_2 / \text{Im } \partial_3 = \text{Ker } \partial_2 \simeq \mathbb{Z}$. Máme $\text{Im } \partial_2 = \text{LO}(a + b - c)$. Báze 1-cyklů je $\{a, b, a + b - c\}$, tedy $H_1^\Delta(T) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Zbývá $H_0^\Delta(T)$. Jiná báze 1-cyklů je $\{a, b, c\}$, jelikož $\partial_1(a) = \partial_1(b) = \partial_1(c) = v - v = \mathbf{0}$, tak $\partial_1 \equiv 0$. $H_0^\Delta(T) = \text{Ker } \partial_0 \simeq \mathbb{Z}$, protože $\partial(v) = \mathbf{0}$ a jiné 0-simplexy nemáme. Celkem dostáváme, že

$$\text{simpliciální homologické grupy pro torus } H_n^\Delta(T) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pro } n = 0, 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{pro } n = 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

1.2 Singulární homologie

Zdefinujeme si obdobné pojmy jako pro simpliciální homologii. Poté do konce této kapitoly budeme dokazovat slibované tvrzení na začátku kapitoly.

Definice 15. *Singulárním n -simplexe* v X označíme spojitě zobrazení $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$.

Definice 16. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme volnou abelovskou grupu $C_n(X)$ s bází singulárních n -simplexů v X . **Řetězcem singulárních n -simplexů**, většinou zkráceně singulární n -řetězci, rozumíme prvky $C_n(X)$.

Poznámka. Dva důležité rozdíly mezi singulární a simplicialní verzí jsou:

1. Řetězce v singulární verzi jsou tvořeny všemi možnými simplexy, naproti tomu simplicialní byly pouze ty z Δ -komplexu.
2. Singulární n -simplex nemusí být prostý na $\text{Int}(\Delta^n)$.

Poznámka. Pokud to bude z kontextu jasné nebo nemůže dojít ke zmatení, budeme vynechávat n před a v X za simplexy a cykly.

Definice 17. *Hraniční homomorfismus pro singulární n -řetězce definujeme tímto vztahem*

$$\begin{aligned} \partial_n: C_n(X) &\rightarrow C_{n-1}(X) \\ \sum_{\alpha} k_{\alpha} \sigma_{\alpha} &\mapsto \sum_{\alpha} k_{\alpha} \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{\alpha}|_{([v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n])}. \end{aligned}$$

Definice 18. *Nechť $c \in C_n(X)$, potom řekneme, že singulární n -řetězec je singulární cyklus, pokud $\partial_n(c) = 0$. Pokud je $c \in \text{Im } \partial_{n+1}$, potom ho nazveme singulární hranicí.*

Definice 19. *Definujeme n . singulární homologickou grupu $H_n(X)$ jako $H_n(X) = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$.*

Definice 20. *Posloupnost volných abelovských grup $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ s homomorfismy $\partial_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$ s vlastností $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nazveme **řetězcový komplex** a značíme jej (C_*, ∂_*) .*

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_n} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

Poznámka. Homologické grupy můžeme definovat naprosto identicky pro řetězcové komplexy.

Poznámka. V následujícím textu nebudeme uvádět **singulární** před simplexy, řetězci, homomorfismem, cyklem a hranicí. Pokud tedy nebude zmíněno jinak, myslíme singulární verzi pojmu.

Definice 21. *Buď X topologický prostor, pokud pro každé dva body $x, y \in X$ existuje spojitě zobrazení $\psi: [0,1] \rightarrow X$, že $\psi(0) = x$ a $\psi(1) = y$, řekneme, že je prostor **obloukově souvislý** a jedinou jeho komponentou obloukové souvislosti je celý prostor. Pro prostory, které nejsou obloukově souvislé, nazveme množinu, která již nelze zvětšit, aniž by přestala být obloukově souvislou, jako **komponentu obloukové souvislosti**.*

Tvrzení 2. *Mějme topologický prostor X a jeho obloukově souvislé komponenty X_{α} , potom existuje izomorfismus mezi $H_n(X)$ a $\bigoplus_{\alpha} H_n(X_{\alpha})$.*

Důkaz. Simplex má za obraz obloukově souvislou množinu, vždy proto leží v právě jedné X_{α} . Proto se $C_n(X)$ nechá rozložit na direktní sumu podgrup $C_n(X_{\alpha})$. Hraniční homomorfismus ∂_n zobrazí prvky $C_n(X_{\alpha})$ do $C_{n-1}(X_{\alpha})$, tedy zachová tento rozklad na direktní sumu, proto se tak nechá rozložit i $\text{Ker } \partial_n$ a $\text{Im } \partial_{n+1}$. Z toho plyne izomorfismus $H_n(X) \simeq \bigoplus_{\alpha} H_n(X_{\alpha})$. $\square$

1.3 Homotopická invariance

V této sekci si vysvětlíme, jak popsat, že jsou si prostory „podobné“. Dokážeme, že tyto prostory mají izomorfní homotopické grupy pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Definice 22. Mějme topologické prostory X, Y , spojitě funkce $f: X \rightarrow Y$ a $g: X \rightarrow Y$ nazveme **homotopické**, pokud existuje spojitá funkce $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$, která splňuje:

- $H(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in X$
- $H(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X$

Vztah mezi funkcemi nazýváme **homotopie**.

Definice 23. Necht X, Y jsou topologické prostory. Prostory nazveme **homotopicky ekvivalentní**, pokud existují spojitá zobrazení $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow X$, že $f \circ g$ je homotopické s funkcí Id_Y a $g \circ f$ je homotopické s Id_X . Zobrazení f, g nazýváme **homotopické ekvivalence**.

Budeme chtít ukázat, že homotopicky ekvivalentní prostory mají stejné homotopické grupy pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Využijeme vlastnosti, že spojitě zobrazení $f: X \rightarrow Y$ indukuje homomorfismus $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ pro každé n . Poté ukážeme, že pokud je f homotopická ekvivalence, potom f indukuje izomorfismus $H_n(X) \simeq H_n(Y)$.

Tvrzení 3. Mějme X, Y topologické prostory a $f: X \rightarrow Y$ spojitě zobrazení mezi nimi. Potom zobrazení f indukuje homomorfismus $f_\#: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$.

Důkaz. Necht σ je n -simplex v X , potom $f \circ \sigma$ je n -simplex v Y , protože složené zobrazení $f \circ \sigma: \Delta^n \rightarrow Y$ je spojitě zobrazení jako složení dvou spojitých zobrazení.

Necht σ je n -simplex v X , potom definujeme

$$f_\#(\sigma) = f \circ \sigma,$$

protože $C_n(X)$ je volná abelovská grupa a n -simplexy jsou její báze, tak máme jednoznačné rozšíření na každé $c = \sum_{\alpha} k_{\alpha} \sigma_{\alpha} \in C_n(X)$ určené vztahem

$$f_\#(c) = \sum_{\alpha \in \Gamma} k_{\alpha} f \sigma_{\alpha}.$$

□

Tvrzení 4. Mějme X, Y topologické prostory a $f: X \rightarrow Y$ spojitě zobrazení mezi nimi. Potom indukovaný homomorfismus $f_\#: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ splňuje $\partial f_\#(c) = f_\# \partial(c)$ pro každé $c \in C_n(X)$.

Důkaz. Víme, že pro $c = \sum_{\alpha \in \Gamma} k_{\alpha} \sigma_{\alpha}$ platí $f_\#(c) = \sum_{\alpha \in \Gamma} k_{\alpha} f \sigma_{\alpha}$, z toho

$$\begin{aligned} \partial(f_\#(c)) &= \sum_{\alpha \in \Gamma} k_{\alpha} \partial(f \sigma_{\alpha}) = \sum_{\alpha \in \Gamma} k_{\alpha} \sum_{i=0}^n (-1)^i (f \sigma_{\alpha})|_{[v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]} = \\ &= \sum_{\alpha \in \Gamma} k_{\alpha} f_{\#} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{\alpha}|_{[v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]} \right) = f_{\#} \sum_{\alpha \in \Gamma} k_{\alpha} \partial(\sigma_{\alpha}) = f_{\#} \partial(c). \end{aligned}$$

□

Definice 24. Necht máme řetězcové komplexy $\{C_n, \partial_n^X\}_{n \in \mathbb{N}}$ a $\{D_n, \partial_n^Y\}_{n \in \mathbb{N}}$. Potom o $f_\#$ řekneme, že $f_\#$ definuje **řetězcové zobrazení**, pokud $f_\# \partial_n^C = \partial_n^D f_\#$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Tento vztah můžeme znázornit následujícím komutativním diagramem

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+2}^C} & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^C} & C_n & \xrightarrow{\partial_n^C} & C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}^C} \cdots \\ & & \downarrow f_\# & & \downarrow f_\# & & \downarrow f_\# \\ \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+2}^D} & D_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^D} & D_n & \xrightarrow{\partial_n^D} & D_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}^D} \cdots \end{array}$$

Tvrzení 5. Necht X, Y jsou topologické prostory a $f: X \rightarrow Y$ spojitě zobrazení mezi nimi. Potom indukovaný homomorfismus $f_\#: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ splňuje:

- Cykly se zobrazí na cykly.
- Hranice se zobrazí na hranice.

Důkaz. Mějme cyklus $c \in C_n(X)$, poté platí $\partial(c) = 0$. Z toho plyne $\partial(f_\#(c)) = f_\#(\partial(c)) = f_\#(0) = 0$. Z čehož plyne, že $f_\#(c)$ je také cyklus.

Mějme hranici $c \in C_n(X)$, existuje proto $d \in C_{n+1}(X)$ splňující $\partial(d) = c$. Potom platí $f_\#(c) = f_\#(\partial(d)) = \partial(f_\#(d))$. Dostáváme, že se c obrazí na hranici řetězce $(f_\#(d))$. $\square$

Důsledek 6. Necht jsou X, Y topologické prostory a $f: X \rightarrow Y$ spojitě zobrazení mezi nimi. Potom f indukuje homomorfismus $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Důsledek 7. Řetězcové zobrazení indukuje homomorfismus mezi homologickými grupami dvou řetězcových komplexů.

Poznámka. Ať jsou X, Y a Z topologické prostory a $f: Y \rightarrow Z, g: X \rightarrow Y$ spojitá zobrazení. Potom pro indukované homomorfismy platí $(fg)_* = f_*g_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Z)$ a $(Id_X)_* = Id_{H_n(X)}: H_n(X) \rightarrow H_n(X)$.

Věta 8. Pokud $f, g: X \rightarrow Y$ jsou homotopické, potom indukují stejné homomorfismy $f_* = g_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$.

Důkaz. Cílem bude dokázat, že pro každé $c \in C_n(X)$ platí, že $(g_\#(c) - f_\#(c))$ je hranice v $C_n(Y)$. Tedy $f_\#(c)$ a $g_\#(c)$ jsou homologické, protože se liší pouze o hranici.

Nejdříve rozdělíme $\Delta^n \times [0, 1]$ na simplexy. Označme $\Delta^n \times \{0\} = [v_0, \dots, v_n]$ a $\Delta^n \times \{1\} = [w_0, \dots, w_n]$, kde $\pi(v_i) = \pi(w_i)$ pro přirozenou projekci $\pi: \Delta^n \times [0, 1] \rightarrow \Delta^n$. Pro každé $0 \leq i \leq n$ máme $(n+1)$ -simplex $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$. Rozdělili jsme $\Delta \times [0, 1]$ na $n+1$ $(n+1)$ -simplexů.

Jelikož jsou f a g homotopické, tak existuje homotopie $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$. Zobrazení F můžeme složit s singulárním n -simplexem $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ následujícím

způsobem $F \circ (\sigma \times \text{Id}): \Delta^n \times [0,1] \rightarrow Y$. Toho využijeme při definici zobrazení P , pro které dokážeme, že splňuje vztah

$$\partial P + P\partial = g_{\#} - f_{\#}.$$

Definujeme

$$\begin{aligned} P: C_n(X) &\rightarrow C_{n+1}(X) \\ \sigma &\mapsto \sum_i (-1)^i F \circ (\sigma \times \text{Id})|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}, \end{aligned}$$

potom platí

$$\begin{aligned} \partial(P(\sigma)) &= \sum_{j \leq i} (-1)^j (-1)^i F \circ (\sigma \times \text{Id})|_{[v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} + \\ &+ \sum_{j \geq i} (-1)^{j+1} (-1)^i F \circ (\sigma \times \text{Id})|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_{j-1}, w_{j+1}, \dots, w_n]} = \\ &= \sum_{j < i} (-1)^j (-1)^i F \circ (\sigma \times \text{Id})|_{[v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} + \\ &+ \sum_{j > i} (-1)^{j+1} (-1)^i F \circ (\sigma \times \text{Id})|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_{j-1}, w_{j+1}, \dots, w_n]} + \\ &+ F \circ (\sigma \times \text{Id})|_{[w_0, \dots, w_n]} - F \circ (\sigma \times \text{Id})|_{[v_0, \dots, v_n]}, \end{aligned}$$

protože prvky s $i = j$ se zkrátí až na $i \in \{0, n\}$. To jsou přesněji $F \circ (\sigma \times \text{Id})|_{[w_0, \dots, w_n]} = g_{\#}$ pro $i = 0$ a $(-1)^{n-1} (-1)^n F \circ (\sigma \times \text{Id})|_{[v_0, \dots, v_n]} = -f_{\#}$ pro $i = n$. Dále ze vztahu

$$\begin{aligned} P(\partial(\sigma)) &= P\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]\right) = \\ &= \sum_{j < i} (-1)^j (-1)^i F \circ (\sigma \times \text{Id})|_{[v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \\ &+ \sum_{j > i} (-1)^{j+1} (-1)^i F \circ (\sigma \times \text{Id})|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_{j-1}, w_{j+1}, \dots, w_n]} \end{aligned}$$

dostaneme, že

$$\partial P(\sigma) = -P(\partial\sigma) + g_{\#}(\sigma) - f_{\#}(\sigma).$$

Tedy z toho dostáváme zmíněný vztah

$$\partial(P) + P(\partial) = g_{\#} - f_{\#}.$$

Pro cykly $c \in C_n(X)$ platí $\partial P(c) + P\partial(c) = \partial P(c) = g_{\#}(c) - f_{\#}(c)$. Tedy $f_{\#}$ a $g_{\#}$ se na cyklech liší pouze o hranici. $\square$

Důsledek 9. *Nechť $f: X \rightarrow Y$ je homotopická ekvivalence, potom $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ je izomorfismus pro všechna $n \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. Z předpokladů víme, že existuje $g: Y \rightarrow X$, že (gf) a Id_X jsou homotopické. Proto (gf) indukuje izomorfismus grup $(gf)_* = g_* f_*$. Chceme ukázat, že je f_* izomorfismus. Víme, že f_* je homomorfismus z důsledku 6.

Nahlédneme, že f_* musí být prosté, protože kdyby $f_*([\alpha]) = f_*([\beta])$, kde $[\alpha] \neq [\beta] \in H_n(X)$, tak $g_*f_*([\alpha]) = g_*f_*([\beta])$ a to je spor s tím, že je g_*f_* izomorfismus. Máme $\text{Ker } f_* = \{0\}$.

Jistě platí, že g_* je na. Jelikož g je také homotopická ekvivalence, dostaneme, že i f_* je na. Poté z 1. věty o izomorfismu dostáváme $H_n(X)/\text{Ker } f_* = H_n(X)/_{(0)} \simeq \text{Im } f_* = H_n(Y)$. $\square$

Definice 25. Necht $P: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$, $f: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ a $g: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$. Řekneme, že P je **řetězcová homotopie** mezi f a g , pokud platí $\partial P + P\partial = g - f$. O f a g pak řekneme, že jsou **řetězcově homotopické**.

Důsledek 10. Pokud jsou zobrazení řetězcově homotopické, tak indukují stejný homomorfismus mezi homologickými grupami řetězcových komplexů.

1.4 Relativní homologie

V této sekci se budeme věnovat singulární homologii, kde budeme určený podprostor a řetězce v něm považovat jako triviální.

Definice 26. Pro prostor X a podprostor A definujeme relativní n -řetězce jako prvky faktorgrupy $C_n(X)/_{C_n(A)}$, obvykle značenou jako $C_n(X, A)$.

Z vlastnosti, že $\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ a $\partial_n: C_n(A) \rightarrow C_{n-1}(A)$ zobrazují n -řetězce v prostoru na $(n-1)$ -řetězce ve stejně prostoru, můžeme definovat $\partial_n: C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A)$.

Vlastnost $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ je zachována pro všechna $n \in \mathbb{N}$, protože platí i před projekcí do faktorgrupy. Proto můžeme definovat homologii pro tyto řetězce obvyklým způsobem.

Grupu $H_n(X, A) = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$ budeme nazývat jako n -tou relativní homologickou grupu.

Relativními cykly nazveme $c \in C_n(X)$, pro které platí $\partial(\alpha) \in C_{n-1}(A)$. Relativní hranice jsou $\alpha = \partial\beta + \gamma$, kde $\beta \in C_{n+1}(X)$ a $\gamma \in C_n(A)$.

Definice 27. Necht $\{(C_n, \varphi_{n+1})\}_{n \in \Gamma}$, kde $\Gamma = \mathbb{N} \vee \Gamma = \{0, \dots, k\}$ a $k \in \mathbb{N}$, je posloupnost grup s homomorfismy $\varphi_{n+1}: C_{n+1} \rightarrow C_n$. **Exaktní** posloupnosti nazveme takové posloupnosti, které splňují $\text{Ker } \varphi_n = \text{Im } \varphi_{n+1}$ pro všechna $n \in \Gamma$.

Exaktní posloupnost $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ nazýváme **krátká exaktní posloupnost**.

Pokud je $\Gamma = \mathbb{N}$, nazýváme tuto posloupnost **dlouhou exaktní posloupností**.

Nášim hlavním důvodem studia relativní homologie je ukázat, že za pomoci relativních homologických grup umíme poskládat dlouhou exaktní posloupnost.

$$\cdots \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

Budeme vycházet z tohoto diagramu, kde i značí inkluzi a j značí projekci na A .

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{i} & C_n(X) & \xrightarrow{j} & C_n(X, A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial_n & & \\ 0 & \longrightarrow & C_{n-1}(A) & \xrightarrow{i} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{j} & C_{n-1}(X, A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Jedná se o komutativní diagram, protože nezáleží, zda nejdříve vezmeme hranici simplexu a tu vnoříme do $C_{n-1}(X)$ nebo nejdříve vnoříme do $C_n(X)$ a poté vezmeme hranici, obdobně pro projekci do faktorgrupy.

Zobrazení i a j jsou řetězcová, proto indukují i_*, j_* mezi odpovídajícími homologickými grupami. Ukážeme, že lze definovat zobrazení $\partial_n: H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$, pomocí kterého spojíme krátké exaktní posloupnosti do dlouhé exaktní posloupnosti.

Ukážeme, jak definovat zobrazení $\partial_n: H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$. Mějme reprezentující cyklus $c \in C_n(X, A)$, najdeme $j(b) = c$ pro nějaké $b \in C_n(X)$, protože j je na, tak takové b existuje. Dále platí, že $\partial_n b \in \text{Ker } j$ ze vztahu $j(\partial_n(b)) = \partial_n(j(b)) = \partial_n c = 0$, protože c je cyklus. Můžeme najít $a \in C_{n-1}(A)$ takové, že $i(a) = \partial_n b$, jelikož $\text{Im } i = \text{Ker } j$ z exaktnosti posloupnosti. Navíc $i(\partial_{n-1}(a)) = \partial_{n-1}(i(a)) = \partial_{n-1}(\partial_n(b)) = 0$ a z prostoty i dostáváme, že $\partial_{n-1}(a) = 0$. Můžeme tedy definovat zobrazení ∂_n mezi $H_n(X, A)$ a $H_{n-1}(A)$, že $\partial_n[c]$ přiřadíme $[a]$.

Poznámka. V následujících dvou tvrzení budeme automaticky používat prvky a, b, c jak jsme je právě teď popsaly.

Definice 28. Zobrazení $\partial_n: H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$, které homologické třídy $[c] \in H_n(X, A)$ přiřadí třídu $[a] \in H_{n-1}(A)$ nazýváme **hraniční homomorfismus pro relativní homologické grupy**.

Tvrzení 11. Hraniční homomorfismus pro relativní homologické grupy je dobře definovaný homomorfismus.

Důkaz. Zkusme zvolit jiného reprezentanta homologické třídy $[c]$, například $c + \partial_{n+1}c'$. Najdeme $b' \in C_{n+1}(X)$, že $j(b') = c'$, potom $c + \partial_{n+1}c' = c + \partial_{n+1}(j(b')) = j(b) + j(\partial_{n+1}(b')) = j(b + \partial_{n+1}(b'))$, ale jelikož $\partial_n(b + \partial_{n+1}(b')) = \partial_n(b)$, tak se nám tímto $\partial_n(b)$, proto ani a , nezmění. Tedy ∂_n je dobře definované zobrazení. Zbývá ověřit, že se jedná o homomorfismus.

Nechť $\partial_n([c_1]) = a_1$ a $\partial_n([c_2]) = a_2$ přes prvky b_1 a b_2 . Víme, že $j(b_1 + b_2) = j(b_1) + j(b_2) = c_1 + c_2$ a také $i(a_1 + a_2) = i(a_1) + i(a_2) = \partial_n(b_1) + \partial_n(b_2) = \partial_n(b_1 + b_2)$. Z toho již plyne $\partial_n([c_1 + c_2]) = [a_1 + a_2] = [a_1] + [a_2] = \partial_n([c_1]) + \partial_n([c_2])$. Takže ∂_n je homomorfismus grup. $\square$

Našli jsme posloupnost homologických grup a homomorfismů mezi nimi. Teď dokážeme, že dokonce tvoří dlouho exaktní posloupnost.

Poznámka. Pokud je n jasné z kontextu, budeme psát místo ∂_n pouze ∂ .

Tvrzení 12. *Posloupnost*

$$\cdots \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

je exaktní.

Důkaz. Chceme tedy ověřit tyto 3 rovnosti $\text{Im } i_* = \text{Ker } j_*$, $\text{Im } j_* = \text{Ker } \partial$ a $\text{Im } \partial = \text{Ker } i_*$. Budeme ověřovat jednotlivé inkluze.

- $\text{Im } i_* \subseteq \text{Ker } j_*$: Jelikož platí $ji = 0$, tak platí i $j_*i_* = 0$.
- $\text{Im } \partial \subseteq \text{Ker } i_*$: Protože platí $i_*(\partial([c])) = i_*([a]) = [\partial b] = 0$.
- $\text{Im } j_* \subseteq \text{Ker } \partial$: Mějme $[c] \in \text{Im } j_*$. Jelikož $[\partial b]$ je homologické s 0, platí $\partial([c]) = [0]$.
- $\text{Ker } j_* \subseteq \text{Im } i_*$: Necht $[b] \in \text{Ker } j_*$. Potom $j(b) = \partial(c')$ pro nějaké $c' \in C_{n+1}(X, A)$, protože $j(b)$ je hranice. Z toho, že j je na, víme, že existuje $b' \in C_{n+1}(X)$, že $j(b') = c'$. Potom $j(b - \partial(b')) = j(b) - \partial(j(b')) = \partial c' - \partial c' = 0$. Proto najdeme $a \in C_n(A)$ splňující $i(a) = b - \partial(b')$. Navíc a je cyklus, jelikož $i(\partial a) = \partial(i(a)) = \partial(b) = 0$, protože b je cyklus. Máme, že a je cyklus z prostoty i . Potom platí $i_*[a] = [b - \partial(b')] = [b]$.
- $\text{Ker } i_* \subseteq \text{Im } \partial$: Mějme $[a] \in \text{Ker } i_*$, potom $i(a) = \partial b$. Navíc $\partial(j(b)) = j(\partial(b)) = j(i(a)) = 0$, tedy $j(b)$ je cyklus a platí $\partial[j(b)] = [a]$.
- $\text{Ker } \partial \subseteq \text{Im } j_*$: Necht $[c] \in \text{Ker } \partial$, potom $\partial[c] = [\partial a]$, kde $a \in C_n(A)$. Potom je $b - i(a)$ cyklus, protože $\partial(b - i(a)) = \partial(b) - \partial(i(a)) = \partial(b) - i(\partial(a)) = \partial(b) - i(\partial(b)) = \partial(b) - \partial(b) = 0$. Jelikož platí $j(b - i(a)) = j(b) - ji(a) = j(b) = c$, tak dostáváme, že $j_*[b - i(a)] = [c]$.

Ověřili jsme všechny inkluze z toho již platí tvrzení. □

Poznámka. Tato posloupnost se nechá generalizovat pro trojice (X, A, B) , že $B \subseteq A \subseteq X$. Pak z krátké exaktní posloupnosti

$$0 \rightarrow C_n(A, B) \rightarrow C_n(X, B) \rightarrow C_n(X, A) \rightarrow 0$$

dostaneme dlouhou exaktní posloupnost

$$\cdots \rightarrow H_n(A, B) \rightarrow H_n(X, B) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A, B) \rightarrow \cdots$$

Pro důkaz existence izomorfismu mezi singulárními a simplicialními homologickými grupami budeme potřebovat dokázat větu o výřezu. Ta dává do vztahu relativní homologické grupy pro dvojici (X, A) a dvojici $(X - Z, A - Z)$, kde Z je podprostor, jehož uzávěr je obsažen v A .

Nejdříve si dokážeme pomocné tvrzení, které mimo jiné říká, že když povolíme jen libovolně malé simplexy, dostaneme izomorfismus dostaneme homologické grupy tohoto řetězcového komplexu se singulárními homologickými grupami.

Definice 29. Necht $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \Gamma}$, kde Γ je indexová množina, je množina podprostorů prostoru X , jejichž vnitřek pokrývá celý prostor X . Potom označme podgrupu grupy $C_n(X)$ obsahující pouze řetězce $\sum_i n_i \sigma_i$ takové, že $n_i \in \mathbb{N}$ a $\sigma_i \in C_n(X)$ je obsažená v nějakém podprostoru $z \mathcal{U}$, jako $C_n^{\mathcal{U}}(X)$.

Jedná se o celkem technický důkaz, nejdříve si k tomu dokážeme pomocná lemmata.

Lemma 13. Pro Δ^n a $\varepsilon > 0$ lze najít Δ -komplex na Δ^n takový, že pro každý k -simplex σ_α v Δ -komplexu platí $\text{diam}(\sigma_\alpha(\Delta^k)) < \varepsilon$ pro všechna $k \in \{0, \dots, n\}$.

Důkaz. Budeme používat metodu zvanou barycentrické dělení. Idea je, že pro každý simplex $[v_0, \dots, v_n]$ v Δ -komplexu vezmeme těžiště b tohoto simplexu a ke každé stěně $[v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$ přidáme toto těžiště, dostaneme simplex $[b, v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$, tím simplex rozdělíme na menší simplex, které dohromady tvoří původní simplex, ale jsou menší, jak i právě teď dokážeme.

Každý bod n -simplexu $[v_0, \dots, v_n]$ se nechá reprezentovat jako

$$\sum_{i \in \{0, \dots, n\}} t_i v_i, \text{ kde } 0 \leq t_i \leq 1 \wedge \sum_{i \in \{0, \dots, n\}} t_i = 1.$$

Těžiště je bod, který má v této reprezentaci $t_i = t_j$ pro všechna $i, j \in \{0, \dots, n\}$.

Definujeme induktivně, jak barycentrické dělení funguje. Pro $n = 0$ zobrazíme 0-simplex sám na sebe. Pro $n > 0$ rozdělíme n -simplex $[v_0, \dots, v_n]$ na n -simplexy $[b, w_0, \dots, w_{n-1}]$, kde $[w_0, \dots, w_{n-1}]$ je $(n-1)$ -simplex z indukčního kroku, který vznikl při dělení z $[v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$.

Ukážeme, že $\text{diam}([w_0, \dots, w_k]) \leq \frac{n}{n+1} \text{diam}([v_0, \dots, v_n])$ pro všechny $[w_0, \dots, w_k]$, $k \in \{0, \dots, n\}$, kde $[w_0, \dots, w_k]$ je k -simplex, který vznikl při dělení.

Předpokládejme, že $\text{diam}([v_0, \dots, v_n]) = 1$, jinak můžeme všechny průměry v rovnostech a nerovnostech vynásobit $\text{diam}([v_0, \dots, v_n])$.

Jelikož pro množinu A platí $\text{diam}(A) = \max_{x, y \in A} |x - y|$, bude stačit ukázat, že pro libovolné 2 body $x, y \in [w_0, \dots, w_k]$ je $|x - y| \leq \frac{n}{n+1}$. Využijeme reprezentaci bodů n -simplexu. Pro libovolné body x, y n -simplexu $[v_0, \dots, v_n]$ platí

$$\begin{aligned} |x - y| &= \left| \sum_{i \in \{0, \dots, n\}} t_i v_i - y \right| = \left| \sum_{i \in \{0, \dots, n\}} t_i (v_i - y) \right| \leq \max_{a \in \{0, \dots, n\}} |v_a - y| \\ \max_{a \in \{0, \dots, n\}} \left| v_a - \sum_{j \in \{0, \dots, n\}} t_j v_j \right| &= \max_{a \in \{0, \dots, n\}} \left| \sum_{j \in \{0, \dots, n\}} t_j (v_a - v_j) \right| \leq \max_{a, b \in \{0, \dots, n\}} |v_a - v_b| \end{aligned} \quad (1.1)$$

Postupujeme indukcí, pro $n = 0$ tvrzení platí, protože $\text{diam}(\Delta^0) = 0$. Necht tvrzení platí pro $n > k \geq 0$ a $x, y \in [w_0, \dots, w_n]$. Použije vztah 1.1, dostaneme $\text{diam}([w_0, \dots, w_n]) \leq \max_{a, b} |w_a - w_b|$, pokud ani jeden bod není těžiště $[v_0, \dots, v_n]$, použijeme indukční předpoklad, protože w_a, w_b leží ve stejné stěně $[v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$ pro nějaké $i \in \{0, \dots, n\}$.

Nechť tedy $w_b = b$ je těžiště simplexu $[v_0, \dots, v_n]$ a w_a je vrchol v $[v_0, \dots, v_n]$, proto $w_a = v_i$ pro nějaké $i \in \{0, \dots, n\}$. Víme, že $b = \sum_j \frac{1}{n+1} v_j$. Najdeme těžiště b_i stěny $[v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$, dosazením $b_i = \sum_{j \neq i} \frac{1}{n} v_j$ dostaneme

$$b = \sum_j \frac{1}{n+1} v_j = \frac{1}{n+1} v_i + \sum_{j \neq i} \frac{1}{n+1} v_j = \frac{1}{n+1} v_i + \frac{n}{n+1} b_i.$$

Proto platí, že b leží na přímce mezi v_i a b_i , jelikož je součet koeficientů u vrcholů roven jedné. Z toho pak dostáváme $|v_i - b| = \frac{n}{n+1} |v_i - b_i| \leq \frac{n}{n+1} \text{diam}([v_0, \dots, v_n])$.

Pokud toto budeme opakovat m -krát, tak $\text{diam}([w_0, \dots, w_n]) \leq (\frac{n}{n+1})^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. Z toho plyne tvrzení. $\square$

Lemma 14 (Lebesgueovo číslo). *Mějme X metrický prostor a $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$ množina podprostorů, jejichž vnitřek pokrývá celé X .*

Pokud je X kompaktní, potom existuje $\delta > 0$, že pro každou podmnožinu A v X s $\text{diam}(A) < \delta$ existuje U_i , že $A \subseteq U_i$.

Důkaz. Převzato z práce Munkerse (Munkres, 1975, Strana 175). $\square$

Lemma 15. *Nechť $\{\sigma_\alpha\}_\alpha$ jsou n -simplexy tvořící bázi $C_n(X)$. Potom existuje řetězcové zobrazení $D: C_n(X) \rightarrow C_n(X)$, které je řetězcově homotopické identitě a navíc pro $\sigma_\alpha \in C_n(X)$ platí $D(\sigma_\alpha) = \sum_i k_i \sigma_{\beta_i}$ a $\text{diam}(\sigma_\alpha^{-1}(\sigma_{\beta_i}(\Delta^n))) < \varepsilon$ pro každé σ_{β_i} .*

Důkaz. Nejdříve dokážeme tvrzení pro lineární n -řetězce v konvexní množině Y v euklidovském prostoru. Poté tento výsledek zobecníme pro všechny obecné n -řetězce.

Lineární zobrazení generují podgrupu v $C_n(Y)$, budeme ji označovat $LC_n(Y)$, Platí, že $\partial|_{LC_n(Y)}$ se zobrazí na prvky z $LC_{n-1}(Y)$, tedy $(LC_*(Y), \partial_*)$ je řetězcový komplex. Každé lineární zobrazení $\lambda: \Delta^n \rightarrow Y$ lze ztotožnit s jeho s obrazem $[w_0, \dots, w_n]$, kde w_i je obraz v_i z Δ^n . Tyto prvky tvoří bázi $LC_n(Y)$. Z technických důvodů definujeme $LC_{-1} := \mathbb{Z}$ generovaný $[\emptyset]$ a $\partial([\emptyset]) = [\emptyset]$.

Pro každý bod $b \in Y$ definujeme homomorfismus definovaný na $[w_0, \dots, w_n]$, které tvoří bázi $LC_n(Y)$, následujícím vztahem:

$$\begin{aligned} b: LC_n(Y) &\rightarrow LC_{n+1}(Y) \\ [w_0, \dots, w_n] &\mapsto [b, w_0, \dots, w_n] \end{aligned}$$

Aplikací ∂ na $b([w_0, \dots, w_n])$, kde $[w_0, \dots, w_n]$ je prvek báze, získáme následující vztah $\partial(b([w_0, \dots, w_n])) = [w_0, \dots, w_n] - b(\partial[w_0, \dots, w_n])$. Z toho, že simplexy tvoří volnou bázi řetězců, máme pro $c \in LC_n(Y)$ vztah $\partial(b(c)) = c - b(\partial(c))$ a $b(\partial(c)) + \partial(b(c)) = \text{Id}(c)$.

Pro $LC_n(Y)$ definujeme dělicí homomorfismus $S: LC_n(Y) \rightarrow LC_n(Y)$. Nechť $\lambda: \Delta^n \rightarrow Y$ a b_λ je obraz těžiště Δ^n . Definujeme $S([\emptyset]) = [\emptyset]$, dále induktivně dodefinujeme $S(\lambda) = b_\lambda(S\partial(\lambda))$, kde b_λ je homomorfismus definovaný výše.

Pro $n = 0$ potom máme $S([w_0]) = w_0([\emptyset]) = [w_0]$.

Budeme chtít ukázat, že $S\partial(c) = \partial S(c)$. Víme, že $\partial S(c) = S\partial(c)$ pro $c \in LC_0(Y)$. Použijeme indukci, indukční předpoklad je $\partial S = S\partial$ pro všechna $c \in LC_k(Y)$, kde $k < n$. Potom pro $n > 0$ máme

$$\partial S(\lambda) = \partial b_\lambda(S\partial(\lambda)) = S\partial\lambda - b_\lambda\partial(S\partial\lambda) = S\partial\lambda - b_\lambda(S\partial\partial\lambda) = S\partial(\lambda),$$

kde předposlední rovnost plyne z indukčního předpokladu.

Dále budeme chtít ukázat, že Id a S jsou řetězcově homotopické. Dokážeme to díky zobrazení $T: LC_n(Y) \rightarrow LC_{n+1}(Y)$, které definujeme následujícím způsobem. $T\lambda = 0$ pro $\lambda \in LC_{-1}(Y)$. Pro $[w_0] = \lambda \in LC_n(Y)$, $n \geq 0$ definujeme $T(\lambda) = b_\lambda(\lambda - T(\partial\lambda))$. Pro $n = 0$ platí

$$\partial T(\lambda) + T\partial(\lambda) = \partial b_\lambda(\lambda - T(\partial\lambda)) - T(\partial\lambda) = \partial([w_0, w_0] - 0) - 0 = 0 = \text{Id}(\lambda) - S(\lambda),$$

protože $b_\lambda = w_0$.

Uděláme indukční krok. Nechť $n > 0$, $\lambda \in LC_n(Y)$ a ať platí $\partial T = T\partial$ pro všechna $k < n$.

$$\begin{aligned} \partial T\lambda &= \partial b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda) = \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda(\partial(\lambda - T\partial\lambda)) = \\ &= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda(\partial\lambda - \partial T\partial\lambda) = \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda(S(\partial\lambda) - T\partial\partial\lambda) = \\ &= \lambda - T\partial\lambda - S(\lambda), \end{aligned}$$

kde druhá rovnost platí, protože $\partial b_\lambda = \text{Id} - b_\lambda(\partial)$, čtvrtá je z indukčního předpokladu a poslední z definice S . Dostáváme, že $\partial T + T\partial = \text{Id} - S$. Grupy $LC_{-1}(Y)$ můžeme již přestat uvažovat a výsledek je stále zachován, protože T na $LC_{-1}(Y)$ je identické 0.

Pro obecný n -simplex σ definujeme $S: C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ jako $S\sigma = \sigma_\# S(\text{Id}_n)$, kde zobrazení $\text{Id}_n: \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ je lineární zobrazení na konvexní množině.

Jedná se o řetězcové zobrazení, jelikož

$$\begin{aligned} \partial(S\sigma) &= \partial\sigma_\#(S(\text{Id}_n(\Delta^n))) = \sigma_\#(\partial S(\text{Id}_n(\Delta^n))) = \sigma_\#S\partial(\text{Id}_n(\Delta^n)) = \\ &= \sigma_\#S\left(\sum_i (-1)^i \text{Id}_n^i \Delta^{n-1}\right) = \sum_i (-1)^i \sigma_\#S\Delta_i^n = S\left(\sum_i (-1)^i \sigma|_{\Delta_i^n}\right) = S(\partial\sigma), \end{aligned}$$

kde $\text{Id}_n^i: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$ je zobrazení na i . stěnu a Δ_i^n je i . stěna Δ^n .

Obdobně definujeme i $T: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$ jako $T(\sigma) = \sigma_\#(T(\text{Id}_n(\Delta^n)))$. Obdobně platí

$$\begin{aligned} \partial(T\sigma) &= \partial(\sigma_\#T(\text{Id}_n(\Delta^n))) = \sigma_\#(\partial T(\text{Id}_n(\Delta^n))) = \\ &= \sigma_\#(\text{Id}_n(\Delta^n) - S(\text{Id}_n(\Delta^n)) - T\partial(\text{Id}_n(\Delta^n))) = \sigma - S\sigma - \sigma_\#T\partial(\text{Id}_n(\Delta^n)) = \\ &= \sigma - S\sigma - T(\partial\sigma) \implies \partial T - T\partial = \text{Id} - S. \end{aligned}$$

Potom T dokazuje, že Id a S indukují stejné homomorfismy. Jelikož Id_n indukuje izomorfismus, tak i S pro všechna $n \in \mathbb{N}$ z důsledku 10.

Nakonec ukážeme, že i Id a m -krát opakované S , S^m , indukují stejné homomorfismy. Mějme zobrazení $D_m := \sum_{0 \leq i < m} TS^i$, potom

$$\begin{aligned} \partial D_m + D_m \partial &= \sum_{0 \leq i < m} (\partial TS^i + TS^i \partial) = \sum_{0 \leq i < m} (\partial TS^i + T \partial S^i) = \\ &= \sum_{0 \leq i < m} (\partial T + T \partial) S^i = \sum_{0 \leq i < m} (\text{Id} - S) S^i = \sum_{0 \leq i < m} (S^i - S^{i+1}) = \text{Id} - S^m. \end{aligned}$$

Pro každý singulární n -simplex $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ existuje m takové, že $S^m(\sigma)$ leží v $C_n^{\mathcal{U}}(X)$, jelikož z lemma 13 víme, že diam simplexů v $S^m(\text{Id}_n \Delta^n) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. Potom zvolíme m , že pro n -simplexy σ_α v $S^m(\text{Id}_n \Delta^n)$ platí, že $\text{diam}(\sigma^{-1}(\sigma_\alpha))$ je menší než Lebesgueovo číslo pokrytí $\sigma^{-1}(\text{Int}(U_j))$. Jelikož pro různá σ_α bude Lebesgueovo číslo různě velké, označíme $m(\sigma_\alpha)$ jako nejmenší, pro které je $\text{diam}(\sigma^{-1}(\sigma_\alpha)) < \varepsilon$ pro každé σ_α . Z toho plyne tvrzení. $\square$

Tvrzení 16. *Existuje zobrazení $\rho: C_n(X) \rightarrow C_n^{\mathcal{U}}(X)$ takové, že pro vnoření $\iota: C_n^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow C_n(X)$, platí, že $\iota\rho$ a $\rho\iota$ jsou řetězcově homotopické identity. Z toho plyne, že ι indukuje izomorfismus $\iota_*: H_n^{\mathcal{U}}(X) \simeq H_n(X)$.*

Důkaz. Můžeme definovat $D: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$ jako $D(\sigma) := D_{m(\sigma)}\sigma$ pro každý n -simplex $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$. Chceme ukázat, že existuje $\rho: C_n(X) \rightarrow C_n^{\mathcal{U}}(X)$ s obrazem v $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ splňující $\partial D + D\partial = \text{Id} - \rho$. Zvolíme $\rho := \text{Id} - \partial D - D\partial$. Potom

$$\partial\rho(\sigma) = \partial\sigma - \partial\partial D\sigma - \partial D\partial\sigma = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma$$

a

$$\rho\partial(\sigma) = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma - D\partial\partial\sigma = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma.$$

Tedy $\partial\rho = \rho\partial$.

Ověříme, že $\text{Im}(\rho) \subseteq C_n^{\mathcal{U}}(X)$.

$$\begin{aligned} \rho(\sigma) &= \sigma - \partial D\sigma - D\partial\sigma = \sigma - (\sigma - S^{m(\sigma)}(\sigma) - D_{m(\sigma)}\partial) - D\partial\sigma = \\ &= S^{m(\sigma)}(\sigma) + D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D(\partial(\sigma)), \end{aligned}$$

kde druhá rovnost plyne z toho, že $\partial D_{m(\sigma)} + D_{m(\sigma)}\partial = \text{Id} - S$. Víme, že $S^{m(\sigma)}$ a leží v $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ z definice $m(\sigma)$. Pro $D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D(\partial\sigma)$ platí, že se jedná o lineární kombinaci členů $D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D_{m(\sigma_j)}(\partial\sigma_j)$, kde σ_j je stěna σ . Platí, že je $m(\sigma_j) \leq m(\sigma)$, protože σ_j je zúžení σ na j -tou stěnu. Proto se rozdíl skládá z členů $TS^i(\sigma_j)$, kde $i \geq m(\sigma_j)$, tedy tyto členy leží v $C_n^{\mathcal{U}}(X)$, protože z definice T plyne, že T zobrazuje prvky z $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$ do $C_n^{\mathcal{U}}(X)$.

Dostáváme, že pro $\rho: C_n(X) \rightarrow C_n^{\mathcal{U}}(X)$ máme $\partial D + D\partial = \text{Id} - \iota\rho$, to plyne ze vztahu, že $\partial D + D\partial = \text{Id} - \rho$ a ι je vnoření $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ do $C_n(X)$. Dále máme $\rho\iota = \text{Id}$, protože $\rho\iota(\sigma) = \rho(\sigma) = \text{Id}(\sigma) - D(\partial\sigma) - \partial(D\sigma) = \sigma$, protože $m(\sigma) = 0$ a $D_0 \equiv 0$. Tedy existuje homotopie mezi $\rho\iota$ a $\text{Id}_{C_n^{\mathcal{U}}(X)}$ a mezi $\iota\rho$ a $\text{Id}_{C_n(X)}$. Tedy ι musí být bijekce a indukuje ekvivalenci $H_n^{\mathcal{U}}(X) \simeq H_n(X)$. $\square$

Věta 17 (O výřezu). Mějme prostor X a jeho podprostory A, B takové, že $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) = X$. Potom inkluze $\iota: (B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ indukuje izomorfismus $\iota_*: H_n(B, A \cap B) \rightarrow H_n(X, A)$ pro všechna n .

Ekvivalentně pro podprostory $Z \subseteq A \subseteq X$ takové, že uzávěr Z je podmnožina $\text{Int}(A)$, platí, že inkluze $\iota: (X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, A)$ indukuje izomorfismus grup $\iota_*: H_n(X - Z, A - Z) \rightarrow H_n(X, A)$ pro všechna n .

Důkaz. Nejdříve dokážeme 1. část. Máme, že $X = A \cup B$. Označme $\mathcal{U} := \{A, B\}$, budeme místo $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ používat pro tento důkaz vhodnější značení $C_n(A + B)$. Z tvrzení 16 máme, vztahy $\partial D + D\partial = \text{Id} - \iota\rho$ a $\rho\iota = \text{Id}$. Všechna tato zobrazení přenášejí řetězce z A do A , proto když definujeme projekci na A , tak budou pro indukovanou zobrazení splněné oba vztahy uvedené výše a tedy $\iota: C_n(A + B) \hookrightarrow C_n(X)$ indukuje izomorfismus mezi $H_n(A + B) \rightarrow H_n(X)$, navíc všude v důkazu platí, že řetězce z A se zobrazí pomocí všech zobrazení v důkazu na řetězce v A , tedy i $\iota': C_n(A + B)/C_n(A) \hookrightarrow C_n(X)/C_n(A)$ indukuje izomorfismus mezi příslušnými faktorgrupami. Faktorgrupy $C_n(A + B)/C_n(A)$ a $C_n(B)/C_n(A) \cap C_n(B)$ jsou izomorfní, protože obě jsou generované n -simplexy v B , které neleží v A . Tedy dostáváme, že $H_n(B, A \cap B) \simeq H_n(X, A)$.

Ekvivalentní verze plyne z toho, že položíme $Z = X - B$, obráceně $B = X - Z$. Dále $A \cap B = A \cap (X - Z) = A - Z$ a podmínka na uzávěr Z uvnitř A plyne z toho, že $X = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \implies A \supset X - \text{Int}(B) = \bar{Z}$. $\square$

Definice 30. Nechť je X topologický prostor a A jeho podprostor. Řekneme, že A **deformační retrakce** X , pokud existuje posloupnost funkcí $\{f_t: X \rightarrow X\}_{t \in [0,1]}$, že $f_0 = \text{Id}$, $f_1(X) = A$, $f_t|_A = \text{Id}$ a funkce φ je spojitá.

$$\begin{aligned} \varphi: X \times [0,1] &\rightarrow X \\ (x, t) &\mapsto f_t(x) \end{aligned}$$

Definice 31. Nechť X, Y jsou topologické prostory. Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ nazveme **homeomorfismus**, pokud je spojitý, bijekce a navíc f^{-1} je spojitý. Pokud existuje homeomorfismus mezi prostory, nazveme je **homeomorfní**.

Poznámka. Homeomorfní prostory jsou homotopicky ekvivalentní, protože pokud existuje homeomorfismus $h: X \rightarrow Y$, stačí volit $f = h$ a $g = h^{-1}$ v definici 23. Dostaneme rovnou identitu. Z toho plyne, že pro prostory X, Y platí $H_n(X) \simeq H_n(Y)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Definice 32. Nechť (X, ρ) je topologický prostor a nechť $\sim$ je relace ekvivalence na X . **Kvocient** topologického prostoru $Y = X/\sim$ je definován jako

$$Y = \{\{v \in X : v \sim x\} : x \in X\},$$

kde U je otevřená množina v Y , pokud $\bigcup_{[x] \in U} x$ je otevřená množina v X .

Poznámka. V tomto textu u kvocientu topologického prostoru budeme místo ekvivalence $\sim$ uvádět pouze podprostor Z . Ekvivalenci $\sim$ definujeme, že pro každé $x, y \in Z$ platí $x \sim y$, pro $x \in X - Z$, $y \in X$ platí $x \not\sim y$.

Definice 33. Mějme topologický prostor X . **Okolím podmnožiny** $A \subseteq X$ je množina V , která obsahuje otevřenou množinu U splňující $A \subseteq U$.

Tvrzení 18. Necht' je X topologický prostor a A neprázdný uzavřený podprostor, který je deformační retrakce okolí množiny A . Potom projekce $\pi: (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$ indukují izomorfismus $\pi_*: H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A)$.

Důkaz. Označme okolí jako V . Máme komutativní diagram:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, A) & \longrightarrow & H_n(X, V) & \longleftarrow & H_n(X - A, V - A) \\ \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* \\ H_n(X/A, A/A) & \longrightarrow & H_n(X/A, V/A) & \longleftarrow & H_n(X/A - A/A, V/A - A/A) \end{array}$$

Ukážeme, že všechna zobrazení jsou izomorfismy pro všechna n .

Deformační retrakce mezi A, V nám dává homotopickou ekvivalenci mezi těmito podprostory, takže $H_n(X, A) \simeq H_n(X, V)$ z dlouhé exaktní posloupnosti pro (X, V, A) , protože $H_n(V, A) = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Obdobně i X/A s X/V nám dává $H_n(X/A, A/A) \simeq H_n(X/A, V/A)$. Vodorovné izomorfismy vpravo plynou z věty o výřezu. Svislé zobrazení vpravo nám dává izomorfismus, protože existuje homeomorfismus $\phi: (X - A, A - A) \rightarrow (X/A - A/A, V/A - A/A)$.

Ostatní izomorfismy plynou z komutativity diagramu. □

Lemma 19. Generátor $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ je n -simplex $\text{Id}_n: \Delta^n \rightarrow \Delta^n$.

Důkaz. Jistě platí, že Id_n je cyklus v $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$. Pro $n = 0$ je tvrzení zřejmé, protože jediný 0-simplex v Δ^0 je právě identita. Pro indukční krok definujme Λ jako sjednocení až na jednu všech stěn Δ^n . Budeme chtít ukázat, že zobrazení v

$$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \rightarrow H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \rightarrow H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$$

jsou izomorfismy. První zobrazení je izomorfismus z dlouhé exaktní posloupnosti

$$\dots \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\partial} H_n(\partial\Delta^n, \Lambda) \xrightarrow{i_*} H_n(\Delta^n, \Lambda) \xrightarrow{j_*} H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\partial} \dots$$

pro trojici $(\Delta^n, \partial\Delta^n, \Lambda)$ a toho, že $H_i(\Delta^n, \Lambda) = 0$, protože mezi Δ^n a Λ existuje deformační retrakce a tedy jsou homotopicky ekvivalentní. Druhé zobrazení je izomorfismus, protože pro $n = 1$ máme izomorfismus už pro řetězce, takže i pro homologické grupy a pro $n > 1$ platí

$$\begin{aligned} H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) &\simeq H_{n-1}(\partial\Delta^n/\Lambda, \Lambda/\Lambda) \simeq \\ &\simeq H_{n-1}(\Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1}) \simeq H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}), \end{aligned}$$

kde z Tvrzení 18 plyne první a třetí izomorfismus a druhý plyne z toho, že jsou prostory homeomorfní, protože v obou případech máme Δ^{n-1} se ztotožněnou hranicí do jednoho bodu. Dokázali jsme, že jsou vše izomorfismy.

Indukční krok plyne z toho, že Id_n je poslána zobrazením ∂ na $\pm\text{Id}_{n-1}$. Jelikož Id_{n-1} generuje $H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$, musí z izomorfismu Id_n generovat $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$. □

Lemma 20 (Five Lemma). *Mějme komutativní diagram s abelovskými grupami*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{k} & D & \xrightarrow{l} & E \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \eta \\ A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow{k'} & D' & \xrightarrow{l'} & E' \end{array},$$

kde řádky jsou exaktní a $\alpha, \beta, \delta, \eta$ jsou izomorfismy, potom γ je izomorfismus.

Důkaz. Lze nalézt v knize od Hatchera (Hatcher, 2002, Strana 129) $\square$

1.5 Ekvivalence simplicialní a singulární homologie

Obdobně jako pro relativní singulární homologické grupy definujeme i relativní simplicialní homologické grupy, značíme je $H_n^\Delta(X, A)$.

Věta 21. *Mějme $H_n^\Delta(X)$ a $H_n(X)$, potom jsou tyto grupy izomorfní pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechny Δ -komplexy.*

Důkaz. Označme X^k Δ -komplex, který se skládá pouze z m -simplexů, kde $m \leq k$.

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{n+1}^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \rightarrow & H_n^\Delta(X^{k-1}) & \rightarrow & H_n^\Delta(X^k) & \rightarrow & H_n^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \rightarrow & H_{n-1}^\Delta(X^{k-1}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{n+1}(X^k, X^{k-1}) & \rightarrow & H_n(X^{k-1}) & \rightarrow & H_n(X^k) & \rightarrow & H_n(X^k, X^{k-1}) & \rightarrow & H_{n-1}(X^{k-1}) \end{array}$$

Pro tento komutativní diagram budeme chtít ukázat, že jsou vertikální homologické grupy izomorfní.

Ukážeme, že první a čtvrté vertikální zobrazení jsou izomorfismy. Pro simplicialní verzi máme, že $C_n^\Delta(X^k, X^{k-1}) = 0$ pro $n \neq k$ a pro $n = k$ volnou abelovskou grupu s volnou bází n -simplexy z Δ -komplexu $\Delta^n(X^k) = \{\sigma_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$, kde Γ je nějaká indexová množina. Potom je $H_n^\Delta(X^k, X^{k-1})$ izomorfní $C_n^\Delta(X^k, X^{k-1})$ díky tomu, že všechny prvky $C_n^\Delta(X^k, X^{k-1})$ jsou cykly a nemáme žádné $(n+1)$ -simplexy, z čehož dostáváme $H_n^\Delta(X^k, X^{k-1}) \simeq \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} \mathbb{Z}$.

Pro $H_n(X^k, X^{k-1})$ ukážeme, že je simplicialní verzi izomorfní. Začneme s tím, že $\coprod_{\alpha \in \Gamma} \Delta_\alpha^k / \coprod_{\alpha \in \Gamma} \partial \Delta_\alpha^k$ a X^k / X^{k-1} jsou homeomorfní, kde $\coprod$ značí disjunktní sjednocení. Stačí použít

$$\begin{aligned} \Phi: \coprod_{\alpha \in \Gamma} \Delta_\alpha^k &\rightarrow X^k \\ \Delta_\alpha^k &\mapsto \sigma_\alpha(\Delta_\alpha^k). \end{aligned}$$

Z toho máme

$$\begin{aligned} H_n(X^k, X^{k-1}) &\simeq H_n(X^k / X^{k-1}) \simeq H_n\left(\coprod_{\alpha \in \Gamma} \Delta_\alpha^k / \coprod_{\alpha \in \Gamma} \partial \Delta_\alpha^k\right) \simeq \\ &\bigoplus_{\alpha \in \Gamma} H_n(\Delta_\alpha^k / \partial \Delta_\alpha^k) \simeq \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} H_n(\Delta_\alpha^k, \partial \Delta_\alpha^k), \end{aligned}$$

kde první a čtvrtý izomorfismus je z Tvzení 18, druhý z Důsledku 9, třetí z Tvzení 2. Z Lemma 19 víme, že $n = k$ je $H_n(\Delta^k, \partial\Delta^k)$ je generována $\text{Id}: \Delta^k \rightarrow \Delta^k$, proto $H_n(\Delta_\alpha^k, \partial\Delta_\alpha^k) \simeq \mathbb{Z}$ a pro $n \neq k$ je $H_n(X^k, X^{k-1}) = 0$. Z toho máme izomorfismus mezi $H_n^\Delta(X^k, X^{k-1})$ a $H_n(X^k, X^{k-1})$.

Pro dokázání izomorfismu u druhého, třetího a pátého vertikální zobrazení použijeme indukci podle k . Příklad pro $k = 1$ platí, protože $H_n^\Delta(X^{k-1})$ a $H_n(X^{k-1})$ jsou izomorfní, protože máme izomorfismus již pro grupy řetězců. Třetí zobrazení je izomorfismus z Five lemma 20.

Předkládejme, že tvrzení platí pro všechna $1 \leq i < k$, potom druhé a páté zobrazení je izomorfismus a opětovnou aplikací Five Lemma 20 dostáváme tvrzení. $\square$

Důsledek 22. $H_n^\Delta(X)$ je nezávislá na volbě Δ -komplexu.

2. Perzistentní homologie

Účelem této kapitoly je seznámit čtenáře s teorií perzistentní homologie, která má za cíl extrahovat topologické informace z množiny bodů. Toto lze využít například v počítačovém vidění, kdy ze senzorů zachytíme konečně mnoho měření a chtěli bychom poznat, o jaký předmět se jedná. Další využití může být při práci s vícedimenzionálními daty. Pro vícedimenzionální data navíc nemáme způsob, jak si je přímo vizualizovat, protože pro data o více než 3 složkách nám již klasické grafické metody nestačí. V dnešní době se setkáváme často s daty, které mají spoustu složek, nemusíme vědět, zda jsou všechny složky důležité, jestli máme dobře zvolený souřadnicový systém nebo jakou metriku vůbec máme volit. Z těchto informací bychom chtěli rozeznat topologické vlastnosti objektu, navíc bychom chtěli, aby malé nepřesnosti nezpůsobily velké rozdíly ve výsledku. Ukážeme, že pomocí perzistentní homologie se těchto výsledků můžeme pokusit dosáhnout.

Typickým příkladem dat, s kterými perzistentní homologie může pracovat jsou například fotografie nebo videa, ty se dají totiž reprezentovat jako vektory, kde každá složka odpovídá jednomu pixelu.

Způsob, jakým perzistentní homologie funguje, je celkem jednoduchý. Kolem každého bodu uvažujeme kouli o poloměru ε , pokud mají koule dvou bodů neprázdný průnik, přidáme mezi ně 1-simplex, obdobně pro ostatní n -simplexy a průnik $n+1$ koulí. Postupně zvětšujeme ε a sledujeme, zda jsou nějaké netriviální cykly, které dlouho vydrží, ty budeme považovat za vlastnost prostoru. Naopak ty, které brzy zaniknou, považujeme za šum, nepřesnost měření či pouze za jev, který nastává při růstu komplexu.

Předpokládáme, že máme n -dimenzionální vektory nad $\mathbb{R}$. Tyto vektory pak můžeme ztotožnit s body v $\mathbb{R}^n$. Všechny výpočty budeme provádět nad $\mathbb{Z}_2$, jednak to výpočty zjednoduší, ale také díky tomu budeme mít koeficienty nad tělesem, díky čemuž využijeme reprezentace, která nad obecným oborem neplatí. Přechodem k $\mathbb{Z}_2$ se homologické grupy změní, stanou se vektorovými prostory, nemohou mít torzní části homologických grup naproti homologickým grupám s koeficienty nad $\mathbb{Z}$. Ale nejsou úplně jiné, existuje jistý vztah mezi homologickými grupami s koeficienty nad $\mathbb{Z}$ a jakoukoliv jinou grupou. Více v tvrzení 32.

2.1 Algebraická struktura

V této sekci se zaměříme na algebraický popis perzistentní homologie. Nejdříve formálně definujeme její základní struktury, poté přejdeme k dokazování obecného tvrzení pro gradované moduly nad gradovaným oborem hlavních ideálů. Tento výsledek poté aplikujeme na struktury, které perzistentní homologii popisují, tím získáme důležitý výsledek o jejich vlastnostech.

Cílem je vybudovat posloupnost abstraktních simplicialních komplexů, která zachycuje, jak se s zvětšujícím ε vyvíjí struktura tohoto prostoru. Algebraickou

strukturu budeme popisovat podle práce Wanga (Wang, 2012).

Definice 34. *Konečná množina simplexů K , která je uzavřená na stěny, nazveme **abstraktní simplicialní komplex**.*

Poznámka. Abstraktní simplicialní komplex nemusí být Δ -komplex.

Definice 35. ***Perzistentní komplex** je posloupnost abstraktních simplicialních komplexů $\{K^i\}_{i \in \mathbb{N}}$, která splňuje, že $K_i \subset K_{i+1}$. Navíc pro každé $i \in \mathbb{N}$ existuje zobrazení $f^i: K^i \rightarrow K^{i+1}$.*

Poznámka. Pro každý abstraktní simplicialní komplex K^i máme jeho řetězový komplex, který označíme jako (C_*^i, ∂_*^i) . Ze vztahu $K^i \subseteq K^{i+1}$ máme vnoření $f^i: K^i \rightarrow K^{i+1}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$.

Definice 36. *Definujeme **k -Perzistentní p . homologickou grupu komplexu K^i** jako $H_p^{i,i+k} = \text{Ker } \partial_{p+1}^{i+k} / \text{Im } \partial_{p+1}^{i+k} \cap \text{Ker } \partial_p^i$.*

Poznámka. Definice je korektní, protože všechny grupy jsou podgrupy abelovské grupy C_p^{i+k} , tedy jejich průnik je také podgrupa. Místo $H_p^{i,i}$ budeme používat pouze H_p^i .

Definice 37. ***Bettiho číslo pro k -perzistentní p . homologickou grupu** rozumíme dimenzi grupy $H_p^{i,i+k}$, značíme jako $\beta_p^{i,i+k}$.*

Poznámka. Definice k -perzistentní p . homologické grupy tímto způsobem je motivována popisem p -cyklů, které, které vzniknou v i . kroku nebo dříve a v $(i+k)$. kroku stále ještě nejsou hranice od nějakého $(p+1)$ -řetězce. Lze říci, že se jedná o p -dimenzionální díry, které od i . kroku vydrží být netriviální nejméně ještě k kroků. Od toho název perzistentní.

Poznámka. Místo grup můžeme grupám řetězců a homologickým grupám dát strukturu R -modulů, kde koeficienty u řetězců budou z tohoto okruhu. Budeme nadále používat homologické moduly, protože pomocí nich odvodíme strukturu perzistentních modulů. Pokud používáme pro koeficienty homologických grup R , shodují se definice grupy s modulem už na řetězcích.

Definice 38. ***Perzistentní modulem p . homologických modulů** nazveme posloupnost modulů $\{H_p^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ s homomorfismy $f_p^i: H_p^i \rightarrow H_p^{i+1}$. Pokud je každý modul H_p^i konečně generovaný a existuje n , že pro každé $m \geq n$ platí, že f_p^m je izomorfismus, pak řekneme, že je **konečného typu**.*

Poznámka. Pro každý abstraktní simplicialní komplex K_i v perzistentním komplexu máme vnoření do K_{i+1} . Toto vnoření indukuje řetězcové zobrazení mezi řetězovými komplexy (C_*^i, ∂_*^i) a $(C_*^{i+1}, \partial_*^{i+1})$ a homomorfismus mezi H_p^i a H_p^{i+1} . Proto můžeme z perzistentní komplexu vytvořit perzistentní modul. Jelikož budeme chtít mít vrcholy simplexů pouze v naší množině bodů, kterých je konečně mnoho, může abstraktní simplicialní komplex obsahovat pouze konečně mnoho simplexů. Proto budou H_p^i konečně generované. Ze stejného důvodu musí existovat k , že abstraktní simplicialní komplexy $K^k = K^l$ pro všechna $l \geq k$. Proto z konečně mnoho bodů vždy dostaneme perzistentní modul konečného typu.

Dokážeme si tvrzení o podobě gradovaným modulů nad gradovanými obory hlavních ideálů, které využijeme pro popis p . perzistentnímu modulů konečného typu.

Definice 39. *Gradovaný okruh* je okruh R takový, že R se dá rozložit na direktní sumu abelovských grup

$$R = \bigoplus_{i=0}^{\infty} R^i,$$

pro který navíc platí, že když $x \in R^i$ a $y \in R^j$, tak $x \cdot y \in R^{i+j}$. Prvek $x \in R^i$, nazveme **homogenní stupně i** , značíme $\deg(x) = i$.

Levý gradovaný modul M nad gradovaným okruhem R je levý modul nad gradovaným okruhem R , který lze rozložit na direktní sumu abelovských grup

$$M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M^i,$$

kde $x \in R^i$ a $y \in M^j$ splňují, že $x \cdot y \in M^{i+j}$.

Definice 40. *Gradovaný ideál* I nad gradovaným okruhem R nazveme *ideál*, pro který platí $I = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} I^p$, kde $I^p = I \cap R^p$.

Pro konečně generované moduly nad oborem hlavních ideálů platí následující strukturální věta.

Věta 23 (Struktura konečně generovaných modulů nad oborem hlavních ideálů). *Nechť R je obor hlavních ideálů a M je konečně generovaný modul nad R . Potom M lze rozložit na direktní sumu*

$$M \simeq R^r \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^m R / (a_i) \right)$$

pro nějaké $r \geq 0$ a $n \in \mathbb{N}$. Prvky $a_1, \dots, a_n \in R$ nejsou jednotky v R a splňují $a_1 \mid a_2 \mid \dots \mid a_n$. Tento rozklad je jednoznačný.

Důkaz. Důkaz lze nalézt v knize od Dummita a Foote (Dummit a Foote, 1999, Strana 462). $\square$

Budeme chtít tento výsledek převést pro případ gradovaných modulů.

Lemma 24. *$F[x]$ je obor hlavních ideálů.*

Důkaz. Nechť I je ideál v $F[x]$, ukážeme, že je hlavní. Vezměme $f(x) \in I$, $f(x) \neq 0$ a $\deg(f(x))$ minimální. Pro spor existuje $g(x) \in I \setminus (f(x))$. Jelikož máme koeficienty polynomu nad tělesem, tak můžeme najít $a(x), b(x) \in F[x]$, že $\deg(b(x)) < \deg(f(x))$, které splňují $g(x) = a(x)f(x) + b(x)$. Jelikož $f(x), g(x) \in I$, musí i $b(x) \in I$, ale potom je to spor s tím, že $\deg(f(x))$ je v I minimální. $\square$

Lemma 25. *Mějme gradovaný okruh R a I gradovaný ideál, potom R/I je také gradovaný okruh, kde definujeme $(R/I)^p = R^p + I/I$. Dále platí, že $R/I = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} R^p / I^p$.*

Důkaz. Každé $R^p + I/I$ je abelovská podgrupa R/I . Ukážeme, že

$$\begin{aligned}\varphi: \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} R^p + I/I &\rightarrow R/I \\ (a_0 + I, a_1 + I, \dots) &\mapsto \sum_{p \in \mathbb{N}} (a_p + I)\end{aligned}$$

je izomorfismus abelovských grup.

Ověříme, že se jedná o homomorfismus. Platí $\varphi((a_0 + b_0 + I, a_1 + b_1 + I, \dots)) = \sum_p (a_p + b_p + I) = \sum_p (a_p + I) + \sum_p (b_p + I) = \varphi((a_0 + I, a_1 + I, \dots)) + \varphi((b_0 + I, b_1 + I, \dots))$.

Ukážeme, že φ je na. Uvažujme $x + I \in R/I$. Jelikož R je gradovaný máme $x = \sum_i x_i$, kde x_i jsou homogenní, ale potom $x_i + I \in R^{p_i} + I/I$ pro nějaké p_i .

Dokončíme tím, že φ je prosté. To je právě tehdy, když každý prvek jde generovat právě jedním způsobem. Předpokládejme, že tomu tak není, potom lze vyjádřit 0 netriviálním způsobem. Necht $\sum_i (x_i + I) = 0 + I \in R/I$, kde $x_i \notin I$, $x_i \in R^{p_i}$. Potom $\sum_i x_i \in I$, a z toho již plyne, že každé $x_i \in I$, protože I homogenní ideál.

Zbývá dokázat, že $\{R^p + I/I\}_{p \in \mathbb{N}}$ splňují podmínku v definici gradovaného okruhu. Mějme $x + i \in R^p + I$ a $y + j \in R^q + I$, potom $(x + i) \cdot (y + j) = xy + yi + xj + ij \in R^{p+q} + I$, protože $xy \in R^{p+q}$ z definice gradovaného okruhu a $yi + xj + ij \in I$. Při přirozené projekci dostaneme, že $(x + I) \cdot (y + I) = (xy + I) \in (R^{p+q} + I/I)$.

Druhá část tvrzení je přímočará, protože

$$R/I \simeq \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} R^p + I/I \simeq \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} R^p/I \cap R^p = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} R^p/I^p,$$

kde druhý izomorfismus plyne z druhé věty o izomorfismu a poslední rovnost z definice gradovaného ideálu. $\square$

Lemma 26. *Necht R je gradovaný okruh, potom ideál I je gradovaný právě tehdy, když je generovaný homogenními prvky.*

Důkaz. „ $\Rightarrow$ “ Gradovaný ideál $I = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} I^p$, tedy I je generovaný $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} I^p$. Jelikož $I^p = I \cap R^p \subset R^p$, tak každé I^p obsahuje pouze homogenní prvky, z toho již plyne implikace.

„ $\Leftarrow$ “ Necht X je množina homogenních prvků, které generují I . Ukážeme, že I je gradovaný, což znamená, že $I = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} (I \cap R^p)$. Jistě platí, že $I \supset \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} (I \cap R^p)$.

Pro druhou inkluzi uvažujme $x \in I$. Jelikož X generuje I , můžeme najít $r_i \in R$, $x_i \in X$, že $x = \sum_i r_i x_i$. Dále je R gradovaný, tedy existují $r_{i,j}$ homogenní, že $r_i = \sum_j r_{i,j}$. Dostáváme, že $x = \sum_{i,j} r_{i,j} x_i$. Všechny $r_{i,j}$, x_i jsou homogenní prvky, tedy i $r_{i,j} \cdot x_i$ jako součin dvou homogenních prvků, z čehož plyne, že $r_{i,j} x_i \in (I \cap R^p)$ pro nějaké p a poté $x \in \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} (I \cap R^p)$. $\square$

Poznámka. Z lemma 24 víme, že $F[x]$ je obor hlavních ideálů. Máme gradování $F[x] = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} F \cdot x^p$.

Věta 27 (Strukturální věta pro konečně generované gradované moduly nad gradovaným oborem hlavních ideálů). *Nechť F je těleso a M je konečně generovaný gradovaný modul nad $F[x]$. Potom M lze rozložit na direktní sumu*

$$M \simeq \left(\bigoplus_{i=1}^r (x^{a_i}) \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^m (x^{b_i}) / (x^{c_i}) \right),$$

kde $a^i, b^i, c^i, m, r \in \mathbb{N}$ a jsou určeny jednoznačně.

Důkaz. Věta se dokáže obdobně jako věta 23, ale navíc volíme bázi $(F[x])^{r+m}$ homogenní, kde $r+m$ je nejmenší počet prvků generujících M . Poté pro homomorfismus, který zachovává gradování $\varphi: (F[x])^{r+m} \rightarrow M$ lze ukázat, že můžeme zvolit $\{a_1, \dots, a_{r+m}\}$ homogenní bázi $(F[x])^{r+m}$, že $\{a_1 y_1, \dots, a_m y_m\}$ je báze $\text{Ker } \varphi$ a všechny a_i jsou homogenní prvky v $F[x]$. Poté již máme rozklad na

$$M \simeq \bigoplus_{i=1}^r F[x] \cdot y_i \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^m F[x] \cdot y_{r+i} / F[x] a_i y_{r+i} \right),$$

kde volná část je izomorfní gradovaným okruhům $\bigoplus_{k \geq j} x^k \cdot F$, protože y_i posune gradování o $\deg(y_i) = j$. Ty jsou izomorfní ideálu (x^j) . Torzní část se skládá opět z gradovaných okruhů stejného tvaru, jen jsou navíc faktorizovány přes jejich ideály, které jsou z lemma 26 gradované, protože a_i jsou homogenní. F je těleso, proto můžeme zvolit za generátor nějaké x^{c_i} , že $(a_i) = (x^{c_i})$. Dále platí, že $\deg(a_i) = \deg(x^{c_i})$. Z lemma 25 máme, že i torzní části jsou gradované a že mají uvedený tvar. Z toho již plyne tvrzení. $\square$

Posledních chybějícím článkem je způsob, jak převést perzistentní modul konečného typu na gradovaný modul. Ale to je poměrně přímočaré. Využijeme toho, že pro každé H_p^i máme zobrazení $f_p^i: H_p^i \rightarrow H_p^{i+1}$. Převedeme p . perzistentní modul na gradovaný modul nad $F[x]$. Posunutí v gradování definujeme pomocí f_p^i . V $F[x]$ je posunutí v gradování nahoru dané pomocí násobením x , pro $h \in H_k^i$ definujeme $x \cdot h = f_p^i(h)$. Tím jsme dostali gradovaný modul $\mathcal{H}_k$ nad oborem hlavních ideálů $F[x]$.

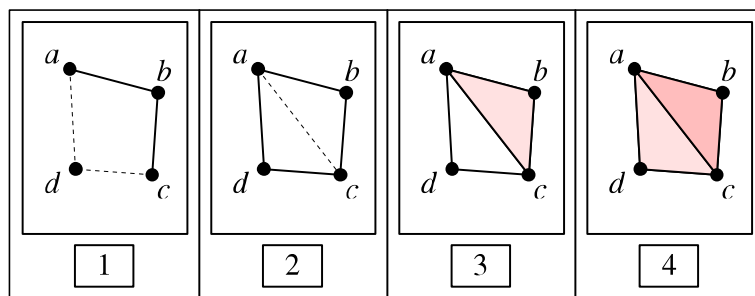
Definice 41. Pro p . **perzistentní modul** definujeme **strukturu gradovaného modulu nad okruhem** $F[x]$ následujícím způsobem

$$\mathcal{H}_p = \bigoplus_{i=0}^{\infty} H_p^i.$$

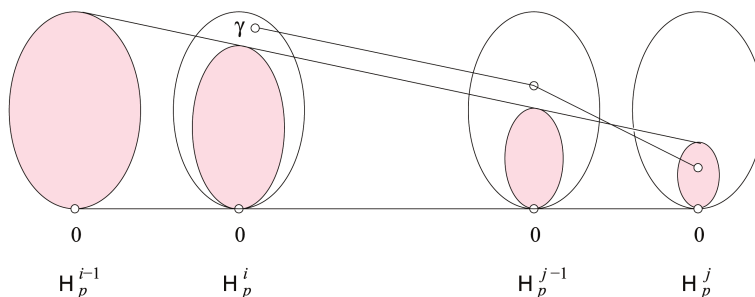
Ze strukturální věty pro nás plyne důležitý výsledek, někdy též označovaný jako **Základní věta perzistentní homologie**. Její důležitost tkví v tom, že nám dává jistotu, že existuje nějaká báze, ne nutně jediná, která zachycuje vlastnosti, kdy jaký cyklus vzniká, jak dlouho vydrží a kdy zaniká.

Věta 28 (Základní věta perzistentní homologie). *Pro p -perzistentní modul $\mathcal{H}_p$ konečného typu existují jednoznačně určené $a_i, b_i, c_i, m, n \in \mathbb{N}$, že*

$$\mathcal{H}_p \simeq \left(\bigoplus_{i=1}^m (x^{a_i}) \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^n (x^{b_i}) / (x^{c_i}) \right).$$



Obrázek 2.1: Vznik cyklu uvnitř cyklu



Obrázek 2.2: Zánik cyklu

Následující část je převzata z textu od Edelsbrunner a Harera (Edelsbrunner a Harer, 2010).

Definice 42. Necht $x \in H_k^i$. Řekneme, že třída x **vznikla v čase** i pokud x není v obrazu f_{i-1} . O třídě $x \in H_k^i$ řekneme, **zanikla v čase** i , pokud $f_i(x) = 0$ nebo $f_i(x) = y$ a existuje $z \in H_i^K$, která vznikla dříve než x a $f_i(z) = y$.

Poznámka. Důvod, proč je zánik takto definován, lze nahlédnout z obrázku 2.1 od Zomorodiana a Carlssona (Zomorodian a Carlsson, 2005). Jde například o situaci, kdy se uprostřed cyklu x vznikne další cyklus y . My si zvolíme bázi $\{[x], [y]\}$. V dalším kroku zanikne cyklus $x + y$. Cyklus y jako takový nezanikl, ale přesto chceme o třídě, kterou cyklus reprezentuje říci, že zanikla, protože x i y homologické. Navíc třída x vznikla dříve a stále obsahuje cyklus, který není hranicí. Přesně to odpovídá, že jeden cyklus stále nezanikl a existoval jiný, který vznikl později, a následně zanikl. Na obrázku 2.2 z článku Edelsbrunnera a Harera (Edelsbrunner a Harer, 2010) je tato situace vyobrazena pomocí modulů. V literatuře se tato definice zániku často označuje jako pravidlo staršího.

2.2 Věta o nervu

Způsobů, jak z bodů v prostoru vytvořit perzistentní komplex, je více. Některé jsou vhodnější pro rychlejší běh algoritmu, některé méně náročné na množství dat, které si musíme uložit.

V tomto textu popíšeme konstrukci pomocí Čechova komplexu. Ten pro metrický prostor tvoří nerv prostoru, který se objevuje ve větě o nervu, které nám říká, že za jistých předpokladů jsou homologické moduly pro nerv a prostoru izomorfní. Toto tvrzení se objevuje v práci Edelsbrunnera a Harera (Edelsbrunner

a Harer, 2010), odtud je toto tvrzení převzato.

Problém je, že nevíme, z jakého prostoru data máme. Proto nevíme, zda máme vhodnou metriku, zda máme dobře zvolený souřadnicový systém, dokonce ani není jasné, zda pro prostor musí metriku existovat. V příkladech většinou používáme Euklidovskou metriku, pokud nemáme důvod ke zvolení jiné metriky.

Definice 43. *Nechť je X množina bodů v $\mathbb{R}^n$. Abstraktní simplicialní komplex $\check{C}_\varepsilon(X)$ je **Čechův komplex pro ε a X** , pokud pro $\sigma \subset X$ platí, že $\sigma \in \check{C}_\varepsilon(X)$ právě tehdy, když $\bigcap_{v_i \in \sigma} B(v_i, \varepsilon) \neq \emptyset$, kde $B(v_i, \varepsilon)$ je koule se středem v v_i a poloměrem ε .*

Definice 44. *Nervem konečné množiny množin $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ nazveme abstraktní simplicialní komplex*

$$\text{Nrv } \mathcal{U} = \left\{ \sigma \subset I \mid \bigcap_{i \in \sigma} U_i \neq \emptyset \right\}.$$

Definice 45. *Množina V je v topologickém prostoru X **uzavřená**, pokud existuje otevřená množina U , že $V = X - U$.*

Z knihy Edelsbrunnera a Harara (Edelsbrunner a Harer, 2010) máme tuto větu.

Věta 29 (Věta o nervu). *Nechť $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ je konečná množina uzavřených, konvexních množin v Euklidovském prostoru. Potom jsou $\text{Nrv}(\mathcal{U})$ a $\bigcup_{i \in I} U_i$ homotopicky ekvivalentní, speciálně $H_n(\text{Nrv}(\mathcal{U})) \simeq H_n(\bigcup_{i \in I} U_i)$.*

Poznámka. Nechť máme množinu bodů X v $\mathbb{R}^n$ pocházejícího z topologického prostoru Y , potom Čechův komplex $\check{C}_\varepsilon(X)$ je nerv množiny koulí o poloměru ε se středem v bodech z X . Neplatí, že je vždy sjednocení koulí homotopicky ekvivalentní prostoru. Pokud zvolíme ε moc malé nepokryjeme prostor. Dalším z důvodů může být, že používáme metriku, která nemusí prostoru odpovídat. Například mezi všemi body uvažujeme konečnou vzdálenost, tedy pokud zvolíme ε dost velké, vznikne mezi nimi simplex, ale může se jednat o prostor, kde tyto body leží v různých komponentách. Ale potvrzuje nám, že myšlenka perzistentní homologie je správná, že pokud máme dostatečný počet bodů dobře rozmístěné po prostoru, že pak pro vhodně zvolené ε budou homologické moduly komplexu odpovídat homologickým modulům prostoru.

2.3 Vizualizace

Když již víme, kdy všechny třídy homologických modulů vznikly a zanikly, tak bychom chtěli tento výsledek nějakým způsobem vizualizovat, aby bylo jednodušší nahlédnout, jak se perzistentní p -homologické moduly vyvíjí. Jednoduchým způsobem je znázornit pomocí perzistentního diagramu nebo čárového kódu. Tato část je inspirována z textů od Edelsbrunnera a Harara (Edelsbrunner a Harer, 2010) a od Carlssona (Carlsson, 2009).

Definice 46. *Uspořádanou dvojici (i, j) nazveme **$\mathcal{P}$ -intervalem**, pokud $0 \leq i \leq j$ a $i, j \in \mathbb{N} \cup \infty$. Množina všech $\mathcal{P}$ -intervalů asociovaných s $\mathcal{H}_p$ je množina $S = \{(a_i, \infty)\} \cup \{(b_j, c_j)\}$, kde a_i, b_j, c_k jsou exponenty z rozkladu perzistentního modulu v tvrzení 28. V $\mathcal{H}_p$ se mohou některé uspořádané dvojice objevit vícekrát, proto pracujeme s S jako s multimnožinou.*

Definice 47. *Mějme multigraf na $(\mathbb{N} \cup \infty)^2$ takový, že bod (i, j) je v tomto grafu s násobností k právě tehdy, když je $(i, j) \in S$ z minulé definice právě k -krát. Potom tento multigraf nazýváme **perzistentní diagram** $\mathcal{H}_p$.*

Příklad vizualizace perzistentního diagramu lze nalézt na obrázku 2.4.

Tvrzení 30. *Označme násobnost bodu (i, j) v perzistentním diagramu $\mathcal{H}_k$ jako $\gamma_k^{i,j}$. Potom platí*

$$\gamma_p^{i,j} = (\beta_p^{i,j-1} - \beta_p^{i,j}) - (\beta_p^{i-1,j-1} - \beta_p^{i-1,j}).$$

Důkaz. V první závorce máme počet cyklů, které vznikly před nebo v čase i a zaniknou v čase j . V druhé závorce máme počet cyklů, které vzniknou před nebo v čase $i-1$ a zaniknou v čase i . Jejich rozdíl nám dává právě cykly, které vzniknou v čase i a zaniknou v j , což je definice $\gamma_p^{i,j}$. $\square$

Lemma 31 (Základní lemma perzistentní homologie). *Mějme perzistentní modul $\mathcal{H}_p$ a jemu odpovídající perzistentní diagram. Pro každý pár (i, j) , kde $i, j \in \mathbb{N}$, $i < j$ a $p \in N$ platí*

$$\beta_p^{i,j} = \sum_{p \leq i} \sum_{l > j} \gamma_p^{k,l}.$$

Důkaz.

$$\sum_{k \leq i} \sum_{l > j} \gamma_p^{k,l} = \sum_{k \leq i} \sum_{l > j} (\beta_p^{k,l-1} - \beta_p^{k,l}) - (\beta_p^{k-1,l-1} - \beta_p^{k-1,l}) = \sum_{k \leq i} (\beta_p^{k,j} - \beta_p^{k-1,j}) = \beta_p^{i,j}.$$

$\square$

Význam posledního lemmatu tkví v tom, že perzistentní diagram nese všechny informace o $\beta_p^{i,j}$ pro všechny (i, j) . Tedy lze z diagramu rekonstruovat všechny informace o homologických modulech.

2.4 Algoritmus

K výpočtu budeme používat redukční algoritmus, který je převzat z práce Edelsbrunnera a Harera (Edelsbrunner a Harer, 2010). Vysvětlíme, jak algoritmus funguje, poté dokážeme jeho správnost.

Nejdříve si vytvoříme pro množinu bodů X perzistentní komplex. Postupně chceme zvětšovat ε a v každém kroku spočítat Čechův komplex pro dané ε a X . Typicky budeme ε rovnoměrně zvětšovat, tedy zvolíme si nějaké $\delta > 0$ a v i . kroku vytvoříme abstraktní simplicialní komplex, že položíme $K_i = \check{C}_\varepsilon(X)$ pro $\varepsilon = i \cdot \delta$. Platí, že v každém kroku bude Čechův obsahovat všechny simplex, které obsahoval pro menší ε , proto máme vlastnost $K_i \subset K_{i+1}$. Pro algoritmus si potřebujeme simplex seřadit následujícím způsobem. Pokud $i < j$, potom pro

simplexy σ_i, σ_j platí, že $\sigma_j \in K_l \Rightarrow \sigma_i \in K_l$ a pokud je σ_i stěna σ_j , potom $i < j$.

Mějme již vytvořené komplexy $K_0, \dots, K_n$ a seřazené simplexy $\sigma_1, \dots, \sigma_N$. Pro výpočet $\beta_p^{l,i+k}$ pro všechny $l, k, p \in \mathbb{N}$ si vytvoříme matici hraničního zobrazení $\partial \in \{0, 1\}^{N \times N}$, kde prvek na místě i, j je definován jako

$$\partial = (a_{i,j})_{N \times N} = \begin{cases} 1 & \text{pokud je } \sigma_i \text{ stěna } \sigma_j \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Pro σ_j platí, že jeho hranice je součet simplexů σ_i , že $\partial_{i,j} = 1$.

Definujeme si funkci $low(i)$, která nám vrátí index posledního nenulového prvku v i . sloupci. Pokud je nulový vrátí 0.

Inicializujeme si matici $R = \partial$. Poté postupně procházíme simplexy podle jejich uspořádání a provádíme následující operace. V i . kroku upravujeme i . sloupec. Dokud je $low(i) > 0$ hledáme $0 < j < i$, že $low(j) = low(i)$. Pokud takový sloupec existuje, tak ho přičteme k i . sloupci. Tím se nutně sníží $low(i)$ a opakujeme tento krok dokud žádný sloupec s $low(j) = low(i)$ nenajdeme.

Pseudokód pro algoritmus, kde R_i značí i . sloupec v matici R .

```
R=∂
for i=1 to N do
  while low(i)>0
    for j=0 to i-1
      if low(j)=low(i) do
        R_i=R_i+R_m
        break
      endif
    endfor
  endwhile
endfor
```

Po skončení dostaneme matici R , z které dokážeme zjistit $\beta_p^{i,i+k}$ pro libovolné i, k . Tyto informace jsou uloženy v matici následujícím způsobem. Postupně procházíme přes všechny sloupce, které jsou v matici R nulové. Pokud máme l . sloupec nulový, přidáním p -simplexu σ_l vznikla nová třída. Podíváme se do l . řádku, pokud existuje sloupec m , který má $low(m) = l$, platí, že přidáním $(p+1)$ -simplexu σ_m třída zanikla v čase, kdy se tento simplex přidal. Pokud takový sloupec neexistuje, tak řekneme, že tato třída zanikla v čase ∞ . Tedy dokážeme pro každou třídu určit vznik a zánik.

2.5 Korektnost algoritmu

Označme sloupce, které jsou po úpravě nulové jako pozitivní, ostatní jako negativní. Budeme postupovat jako v algoritmu, úpravu i . sloupce můžeme považovat za „přidání“ σ_i do komplexu, pro který počítáme homologický modul.

Algoritmus se zastaví v konečném čase: Pro i . sloupec máme jen konečně mnoho $j < i$, proto i konečně mnoho sloupců, které mohou mít $low(j) = low(i)$. Pokud takový najdeme, přičtením j . sloupce k i . sloupci se $low(i)$ sníží minimálně o 1. Pokud žádný takový sloupec není, již i . sloupec neupravujeme. Tedy pro každý sloupec se maticové úpravy provedou v konečně mnoha krocích. Simplexů je také konečně mnoho, protože z N bodů můžeme dostat maximálně 2^N simplexů, proto se algoritmus zastaví v konečném čase.

Prázdné sloupce odpovídají vzniku nové homologické třídy: Z definice cyklu máme, že jeho hranice je rovna $\mathbf{0}$. To můžeme interpretovat, že lze netriviálně vyjádřit $\mathbf{0}$ pomocí hranic jeho simplexů. V matici provádíme pouze operace, kdy přičteme j . sloupec k i . sloupci, kde $j < i$, ale to nemění lineární obal prvních i sloupců. Pokud leží i . sloupec v lineárním obalu prvních $i - 1$ sloupců, dostaneme nulový sloupec, proto i nový cyklus. Tento cyklus nemůže ležet v již vzniklé třídě. Kdyby se lišil s prvkem z nějaké třídy pouze o hranici, tak by simplex σ_i musel být stěna nějakého jiného simplexu. Víme, že třídy vzniklé před přidáním σ_i nutně obsahují cyklus, který neobsahuje σ_i . Ale simplex, který má σ_i jako stěnu, musí mít index větší než i , proto jsme ho ještě nepřidali. Ze stejného důvodu nemůže být tento cyklus ani hranice jiného řetězce. Přidáním σ_i musela vzniknout nová homologická třída. Vyberme cyklus z této třídy a označme ho, že reprezentuje tuto třídu, tento cyklus obsahuje simplex s indexy $j \leq i$.

Homologická třída, která vznikla přidáním simplexu σ_i , zanikne přidáním simplexu σ_j , kde j . sloupec má $low(j) = i$: Dokážeme indukcí podle počtu negativních sloupců. Pro první negativní sloupec tvrzení zřejmě platí, protože přidáváme 1-simplex, který spojuje dva body. Neexistuje žádný sloupec, který bychom mohli k j . sloupci přičíst. Měla by zaniknout třída pozdější bodu. To platí, protože druhý bod lze vyjádřit jako součet prvního a hranice simplexu odpovídajícího tomuto sloupci.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n - 1$ negativních sloupců. Přidáváme další negativní sloupec. Nechť tento sloupec odpovídá j . sloupci v matici. Přidáním σ_j nevznikne cyklus a jeho hranice je cyklus. Tento cyklus máme reprezentován v matici v j . sloupci. Uvažujme, že tento cyklus ještě není hranice a podíváme se, jaká homologická třída s ním zanikne. Protože sloupce odpovídají hranicím, přičtením i . sloupce k j . sloupci, kde $i < j$, změníme cyklus jen o hranici, proto neměníme jeho homologickou třídu. Nechť již žádný takový sloupec neexistuje, to se stane, protože se každou úpravou $low(j)$ zmenší.

Označme $i := low(j)$. Tvrdíme, že třída vzniklá při přidání simplexu σ_i , zanikne s přidáním σ_j . Z indukčního předpokladu máme, že ještě nezanikla. Sloupec i je nulový. Víme, že třída vznikla nejpozději s σ_i , protože cyklus v sloupci j obsahuje pouze simplex s indexem $k \leq i$, proto již po přidání σ_i musel existovat. Dále pro tuto třídu neexistuje reprezentant, který by obsahoval pouze simplex s indexem menším než i .

Ukážeme, že tento cyklus lze vyjádřit pomocí předchozích cyklů a hranice. Uvažujme, cyklus c z j . sloupce. Vždy vezmeme největší index k simplexu obsa-

ženého v tomto cyklu. Pro třídu, která vznikla s tímto simplexem, máme reprezentující cyklus c_k . Ten obsahuje v hranici simplex s největším indexem k . Součet cyklů je také cyklus. Když tento cyklus přičteme k c , snížíme tím největší index simplexu v hranici. Přidáme si toto k do množiny M a opakujeme. Máme nové k . Z argumentu výše víme, že se simplexem σ_k vznikla nová homologická třída, proto existuje nějaký reprezentující cyklus. Opakujeme, dokud nedostaneme cyklus rovný 0 . Z toho plyne $c = \sum_{k \in M} c_k$, kde c_k jsou reprezentující cykly třídy vzniklé přidáním σ_k . Tyto cykly mohou být již hranice, protože cykly mohly již zaniknout. Z toho odvodíme

$$c_i = \sum_{k \neq i, k \in M} c_k + c.$$

Vyjádřili jsme reprezentující cyklus pomocí cyklů, co vznikly již dříve, a hranice. Z definice zániku pak plyne, že tato třída zanikla.

Nezáleží na pořadí volby pořadí simplexů v K^i , pokud je zachováno, že stěna předchází simplex, jehož je stěna: Z předchozích odstavců plyne, že pro postupné přidávání algoritmus funguje správně a opravdu popisuje homologické moduly pro již přidané simplex, jelikož po přidání všech simplexů z K_i budeme mít nakonec přidané stejné simplex, musí být proto i homologické moduly izomorfní a proto nezáleží na pořadí u simplexů, kde je možno volit z více možností.

2.6 Příklad

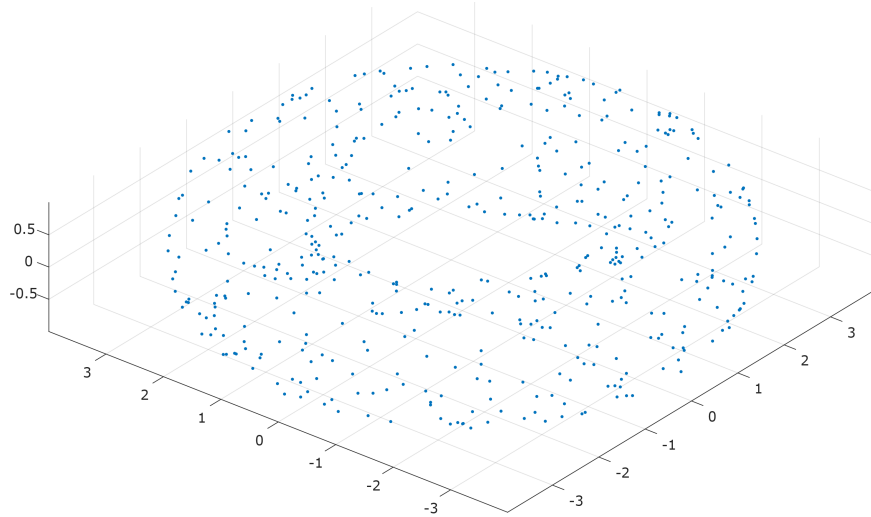
Ukážeme, jak funguje implementovaný algoritmus na množině náhodně zvolených bodů z toru. Výsledek srovnáme s výsledkem, který máme z příkladu 1.1 v sekci o simplicialní homologii.

V implementacích se namísto Čechova komplexu typicky setkáváme s Rips-Viesovo komplexem, který je v jistém smyslu zjednodušený Čechova komplexu.

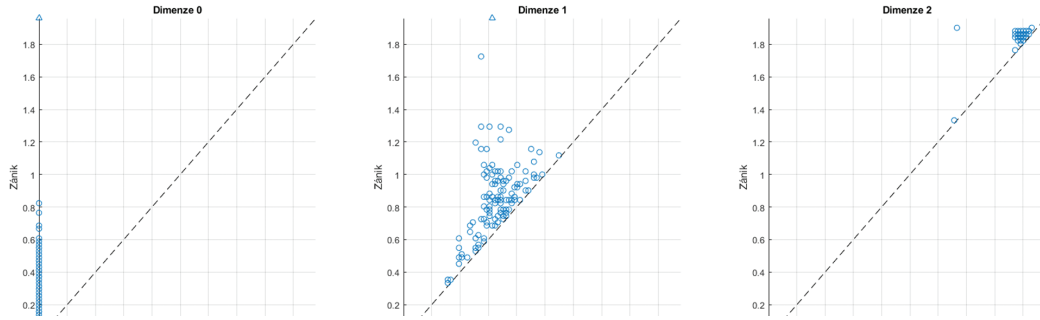
Definice 48. *Mějme množinu bodů X v $\mathbb{R}^n$. Abstraktní simplicialní komplex $VR_\varepsilon(X)$ nazveme **Rips-Viesův komplex**, pokud pro každý $\sigma \subset X$ platí, že $\forall v_i, v_j \in \sigma$ je $B(v_i, \varepsilon) \cap B(v_j, \varepsilon) \neq \emptyset$, kde $B(v_i, \varepsilon)$ je koule se středem v v_i a poloměrem ε .*

Negenerujeme si náhodné body z toru, kde použijeme metodu podle práce od Diaconise a kol. (Diaconis a kol., 2012), která generuje rovnoměrně rozdělené body na povrchu toru. Pokud bychom brali pouze náhodné u, v v intervalu $(0, 2\pi)$, tak by docházelo k hromadění bodů okolo středu toru.

Z těchto bodů vytvoříme perzistentní komplex pomocí knihovny JavaPlex od Tausze a kol. (Tausz a kol., 2014), která právě používá zmíněný Rips-Viesovo komplex.



Obrázek 2.3: Náhodný vzorek 500 bodů z toru T



Obrázek 2.4: Perzistentní diagram pro torus T

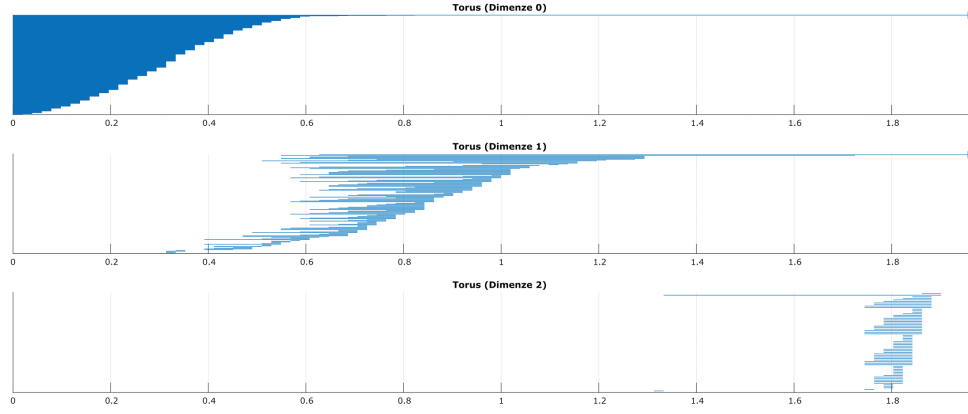
Pro samotný výpočet jsem použil 500 bodů z toru

$$T = \begin{cases} x(u,v) = (3 + \cos(u)) \cdot \cos(v) \\ y(u,v) = (3 + \cos(u)) \cdot (\sin(v)) \\ z(u,v) = \sin(u) \end{cases} \quad u, v \in (0, 2\pi],$$

které můžeme vidět na obrázku 2.3. Z těchto bodů jsem vytvořili filtraci o 100 krocích s maximálním $\varepsilon = 1,96$, kde jsme v každém kroku rovnoměrně zvětšili ε o $\frac{1,96}{100}$. Volba maximálního $\varepsilon_{\max}$ byla založena na testování, kdy kolem této hranice nezačaly vznikat žádné nové třídy, které by dlouho vydržely. Navíc při velkém ε začne přibývat v komplexu velké množství simplexů. Vznik těchto simplexů lze nahlédnout z toho, že nad touto hranicí již dochází k častému spojování bodů na protějších stranách toru. Maximální dimenze simplexů byla omezená na 3, abychom mohli správně počítat homologické grupy pro dimenze 0, 1 a 2. Rips-Viesovo komplex pro $\varepsilon = 1,96$ obsahoval přes milion a půl simplexů.

Po spuštění redukčního algoritmu na tento perzistentní komplex dostáváme následující perzistentní diagram na obrázku 2.4 a čárový kód na obrázku 2.5.

Z diagramu nebo čárového kódu lze nahlédnout, že $\beta_0(T)$ je velmi pravděpodobně 1, pro $\beta_1(T)$ není úplně jasné, ale lze předpokládat, že je rovná dvěma,



Obrázek 2.5: Čárový kód perzistentního diagramu pro torus T

protože máme jeden cyklus, co vznikl poměrně brzo a nestihl zaniknout a jeden, který vydrží znatelně déle než ostatní. Pro $\beta_2(T)$ máme jeden cyklus, který vznikl dříve než ostatní a na rozdíl od ostatních vydrží dlouho. Proto dává smysl si myslet, že pro prostor T , z kterého data pochází, platí $\beta_0(T) = 1$, $\beta_1(T) = 2$ a $\beta_2(T) = 1$. Z příkladu 1.1 víme, že jeho homologické grupy nad $\mathbb{Z}$ jsou všechny volné a mají přesně tyto dimenze. Z tvrzení 32 máme, že dimenze homologických grup toru nad $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}_2$ jsou stejné, protože jeho homologické grupy nad $\mathbb{Z}$ jsou jen volné. Podařilo se nám podařilo pomocí perzistentní homologie správně rekonstruovat homologické grupy prostoru.

Tvrzení 32. Označme $H_n(X, G)$ homologickou grupou s koeficienty z grupy G . Pokud jsou $H_n(X; \mathbb{Z})$ a $H_{n-1}(X; \mathbb{Z})$ konečně generované, tak pro p prvočíslo platí, že $H_n(X; \mathbb{Z}_p)$ se skládá z:

- sčítance $\mathbb{Z}_p$ za každý sčítanec $\mathbb{Z}$ v $H_n(X; \mathbb{Z})$
- sčítance $\mathbb{Z}_p$ za každý sčítanec $\mathbb{Z}_{p^k}$ v $H_n(X; \mathbb{Z})$, $k \geq 1$
- sčítance $\mathbb{Z}_p$ za každý sčítanec $\mathbb{Z}_{p^k}$ v $H_{n-1}(X; \mathbb{Z})$, $k \geq 1$,

kde grupa za pomlčkou značí nad jakou grupou jsou koeficienty homologických grup.

Důkaz. Lze nalézt v knize Hatchera (Hatcher, 2002, Strana 266). □

Závěr

Cílem práce bylo čtenáři představit, co je perzistentní homologie. Nejdříve jsme začali s algebraickou topologií, speciálně právě homologií, kde jsme se seznámili s simplicialní a singulární homologií, poté jsme si dokázali důležité výsledky, které opodstatňují, proč vůbec perzistentní homologii využít. Mezi tyto vlastnosti homologie patří nezávislost simplicialních homologických grup na zvoleném Δ -komplexu a izomorfismus těchto grup pro homeomorfní prostory.

V druhé části jsme představili čtenáři základy perzistentní homologie. Část kapitoly byla věnována jejímu algebraickému popisu. Ukázali jsme si tvrzení, že za určitých předpokladů jsou nerv a prostor homotopicky ekvivalentní. Představili jsme jeden ze způsobů vizualizace, perzistentní diagram, a ukázali, že nese veškeré informace o perzistentním modulu. Ukázali jsem základní algoritmus, kterým lze vypočítat množinu všech $\mathcal{P}$ -intervalů asociovaných perzistentnímu modulu, pomocí kterých lze určit $\beta_p^{i,j}$. Dokázali jsme správnost algoritmu. Nakonec jsme vše ilustrovali na příkladě.

Seznam použité literatury

- CARLSSON, G. (2009). Topology and data. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **46**(2), 255–308.
- DIACONIS, P., HOLMES, S. a SHAHSHAHANI, M. (2012). Sampling from a manifold.
- DUMMIT, D. S. a FOOTE, R. M. (1999). *Abstract algebra*. Wiley, 2nd edition.
- EDELSBRUNNER, H. a HARER, J. (2010). *Computational Topology: An Introduction*. ISBN 978-0-8218-4925-5. doi: 10.1007/978-3-540-33259-6_7.
- HATCHER, A. (2002). *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge. ISBN 0-521-79160-X; 0-521-79540-0.
- MUNKRES, J. R. (1975). *Topology: a first course*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.
- TAUSZ, A., VEJDEMO-JOHANSSON, M. a ADAMS, H. (2014). JavaPlex: A research software package for persistent (co)homology. In HONG, H. a YAP, C., editors, *Proceedings of ICMS 2014*, Lecture Notes in Computer Science 8592, pages 129–136. Software available at <http://appliedtopology.github.io/javaplex/>.
- WANG, K. G. (2012). The basic theory of persistent homology. URL <http://math.uchicago.edu/~may/REU2012/REUPapers/WangK.pdf>.
- ZOMORODIAN, A. a CARLSSON, G. (2005). Computing persistent homology. *Discrete & Computational Geometry*, **33**(2), 249–274.