Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Adam Ivánek

Algoritmický přístup k resolventám v teorii reprezentací

Katedra algebry

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jan Šťovíček, Ph.D., Katedra algebry

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Matematické metody informační bezpečnosti

Praha 2016

Ďakujem doc. RNDr. Janovi Šťovíčkovi, Ph.D. za vedenie diplomovej práce, všetky konzultácie počas vypracovania práce a pomoc pri ladení zdrojového kódu.

Taktiež ďakujem svojej rodine za podporu počas celého štúdia.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Algoritmický přístup k resolventám v teorii reprezentací

Autor: Adam Ivánek

Katedra: Katedra algebry

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jan Šťovíček, Ph.D., Katedra algebry

Abstrakt: V této práci popisujeme algoritmus na hledání projektivní resolventy a minimální projektivní resolventy v teorie reprezentací konečně-dimenzionálních algeber. V našem případě konečně-dimenzionální algebrou je KQ/I, kde KQ je algebra cest a I je připustný ideál. Práce obsahuje implementaci minimalní projektivní resolventy v balíku QPA. Používáme teorii Gröbnerových bazí pro KQ-moduly a článek Minimal Projective Resolutions autorů Green, Solberg a Zacharia [5]. Prvním krokem je vyjádření $\oplus_{i\in T_n} f_i^{n*}\,\mathrm{KQ} = \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1}\,\mathrm{KQ} \cap \oplus_{i\in T_{n-2}} f_i^{n-2} I$. Druhým krokem pro nalezení minimalní projektivní resolventy je z množiny prvků f_i^{n*} odebrat všecky netriviálni K-lineární kombinace, které leží v $\oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I + \oplus_{i\in T_n} f_i^{n^*} J$. Výsledné moduly minimální projektivní resolventy jsou $\oplus_{i\in T_n} f_i^n\,\mathrm{KQ}\,/\oplus_{i\in T_n} f_i^n I$.

Klíčová slova: minimální projektivní resolventa, toulec, reprezentace konečně-dimenzionálních algeber

Title: An algorithmic approach to resolutions in representation theory

Author: Adam Ivánek

Department: Department of Algebra

Supervisor: doc. RNDr. Jan Šťovíček, Ph.D., Department of Algebra

Abstract: In this thesis we describe an algorithm and implement a construction of a projective resolution and minimal projective resolution in the representation theory of finite-dimensional algebras. In this thesis finite-dimensional algebras are KQ/I where KQ is a path algebra and I is an admissible ideal. To implement the algorithm we use the package QPA [9] for GAP [2]. We use the theory of Gröbners basis of KQ-modules and the theory described in article Minimal Projective Resolutions written by Green, Solberg a Zacharia [5]. First step is find a direct sum such that $\oplus_{i\in T_n} f_i^{n*}\,\mathrm{KQ} = \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1}\,\mathrm{KQ} \cap \oplus_{i\in T_{n-2}} f_i^{n-2} I$. Next important step to construct the minimal projective resolution is separate nontrivial K-linear combinations in $\oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I + \oplus_{i\in T_n} f_i^{n^*} J$ from f_i^{n*}. The Modules of the minimal projective elements are $\oplus_{i\in T_n} f_i^n\,\mathrm{KQ}\,/\oplus_{i\in T_n} f_i^n I$.

Keywords: minimal projective resolution, quiver, representation of finite-dimensional algebras

Obsah

Úvod

Cieľom práce je popísať a implementovať algoritmus na hľadanie minimálnej projektívnej rezolventy pre moduly nad konečne dimenzionálnymi algebrami. Vychádzame z článku autorov Greena, Solberga a Zacharia [5].

Pre reprezentáciu modulov používame tulec, kde za vrcholy zvolíme vektorové priestory a za šípky homomorfizmy. Algoritmus je implementovaný v balíku QPA (*Quivers and Path Algebras*) [9]. Tento balík je rozšírením matematického prostredia GAP (*Groups, Algorithms and Programming*). QPA obsahuje už funkcie pre prácu s modulmi, reprezentáciami, výpočet Gröbnerovej báze pre algebry ciest KQ, výpočet pravej Gröbnerovej báze pre moduly, projektívne pokrytie.

V QPA je už implementovaný algoritmus projetívneho pokrytia, pomocou neho sa dá jednoducho nájsť minimálna projektívna rezolventa. Implementácia uvedená v práci má vhodnejšie vlastnosti, ktoré sa využívajú pre pokročilé výpočty s Ext-algebrami. Viď článok *Minimal projective resolutions* [5].

V prvej kapitole uvedieme základné definície a tvrdenia z teórie modulov a algebier ciest. Popíšeme Gröbnerove báze pre K-algebry, KQ-moduly a príslušné algoritmy. V druhej kapitole skonštruujeme prvky f_i^n pre projektívnu rezolventu. V tretej kapitole skonštruujeme minimálnu projektívnu rezolventu na základe výsledkov z predchádzajúcej kapitoly. V závere kapitoly uvádzame spočítané príklady pomocou našej implementácie, ktoré sme overili pomocou projektívnych pokrytí z QPA.

Na záver poznamenajme, že projektívne rezolventy sú dôležitým nástrojom v homologickej algebre, viď napríklad literatúra homologickej algebry [7].

1. Úvodné definície a tvrdenia

1.1 Moduly a $\mathbb{KQ}$-algebry

Definícia 1. Trojicu $(R, +, \cdot)$ nazveme *okruhom*, kde $+$ a $\cdot$ sú binárne operácie na množine R. Dvojica $(R, +)$ je ábelovská grupa a násobenie $\cdot$ spĺňa, že pre každé a, b, $c \in R$ platí:

- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- existuje prvok $1_R \in R$ taký, že $a \cdot 1_R = 1_R \cdot a = a$
- $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
- $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

Skrátene píšeme len R.

Telesom K rozumieme okruh, pre ktorý naviac platí, že pre každé $a \in R$, $a \neq 0$ existuje inverzný prvok $b \in R$ taký, že $ab = 1$ a násobenie $\cdot$ je komutatívne tj. $a \cdot b = b \cdot a$ pre každé a, $b \in K$. V celom texte budeme predpokladať, že teleso K je algebraicky uzavreté.

Pravý ideál $I \subseteq R$ definujeme ako podgrupu vzhľadom na sčítanie $+$ a pre každé $a \in I$, $r \in R$ platí, že $ar \in I$ (ak $ra \in I$ hovoríme o ľavom ideále). Ak naviac pre každé $p \in R$ je $par \in I$, potom I nazývame *obojstranným ideálom.*

Pravý (resp. obojstranný) ideál generovaný množinou G značíme $\langle G \rangle_R$ (resp. ${}_R\langle G \rangle_R$).

Ideál $I \subsetneq R$ nazveme *maximálnym*, ak neexistuje ideál $J \subsetneq R$ taký, že $I \subsetneq J$.

Definícia 2. Nech K je teleso. Okruh A nazveme K*-algebrou*, ak A má štruktúru vektorového priestoru nad telesom K a zároveň násobenie spĺňa pre každé $\lambda \in K$, $a, b \in A$ rovnosť

- $\lambda(ab) = (a\lambda)b = a(\lambda b)$.

Podokruh $B \subseteq A$ nazývame K*-podalgebrou*, ak pre každé $\lambda \in K$, $b \in B$ je $\lambda b \in B$.

Nech A, B sú dve K-algebry. Zobrazenie $f : A \to B$ nazveme K-algebrovým homomorfizmov, ak f je okruhový homomorfizmus a zároveň homomorfizmom vektorových priestorov A a B.

Nech A je K-algebra a $I \subseteq A$ je obojstranný ideál. Potom faktorový okruh A/I má štruktúru K-algebry. Pretože okruhové operácie A/I spĺňa, stačí dokázať, že A/I má štruktúru K-vektorového priestoru, a teda stačí overiť násobenie skalárom $\lambda \in K$, ktoré definujeme $\lambda(a + I) = \lambda a + I$. Nech $a + I = b + I$, potom chceme, aby $\lambda(a + I) = \lambda(b + I)$. To plynie z toho, že $a - b \in I$, a teda z definície obojstraného ideálu dostaneme $\lambda a - \lambda b \in I$.

Poznamenajme, že každá K-algebra obsahuje ako podmnožinu teleso K.

Definícia 3. Nech R je okruh s jednotkou 1_R. Abelovskú grupu M vzhľadom na sčítanie $+$ nazveme *pravým* R*-modulom* spolu s násobením $\cdot : M \times R \to M$ spĺňajúcim nasledujúce axiómy. Pre ľubovoľné r, $s \in R$ a x, $y \in M$ platí, že

- $(x + y) \cdot r = x \cdot r + y \cdot r$
- $x \cdot (r + s) = x \cdot r + x \cdot s$
- $x \cdot (rs) = (x \cdot r) \cdot s$
- $x \cdot 1_R = x$.

Nech $\{g_i\}_{i \in I}$ je množina prvkov z M, kde I je nejaká indexová množina. Potom R-modul generovaným týmito prvkami, značíme

$$\langle \{g_i\}_{i \in I} \rangle_R = \left\{ \sum_{i \in I} g_i r_i \quad | \quad r_i \in R, r_i \neq 0 \text{ pre konečne mnoho } i \in I \right\}.$$

Ak je indexová množina konečná, potom povieme, že je *konečne generovaný*.

Podmodul $N \subseteq M$ nazveme *maximálnym*, ak neexistuje podmodul $K \subsetneq R$ taký, že $N \subsetneq K$.

Direktnú sumu R-modulov značíme $\oplus_{i \in I} M_i$. Štruktúru R-modulu definujeme po prvkoch. Nech $(m_i)_{i \in I}$, $(n_i)_{i \in I} \in \oplus_{i \in I} M_i$ a $r \in R$ potom

- $(m_i)_{i \in I} + (n_i)_{i \in I} = (m_i + n_i)_{i \in I}$
- $(m_i)_{i \in I} r = (m_i r)_{i \in I}$

Nech $N \subseteq M$ je R-podmodul, potom faktorgrupa M/N s násobením $(m + N)r = (mr + N)$ je R-modul.

Nech $P \subseteq R$, potom MP značí množinu $\{mp : m \in M, p \in P\}$. Nech N, M sú dva R-moduly. Zobrazenie $h : N \to M$ je R-modulový homomorfizmus, ak pre každé a, $b \in N$ a $r \in R$ platí

- $h(a + b) = h(a) + h(b)$
- $h(ar) = h(a)h(r)$.

Poznamenajme, že každý okruh R je prirodzeným spôsobom modulom samým nad sebou R.

Lema 4. *Nech M je pravý R-modul a I je obojstranný ideál okruhu R. Predpokladajme, že $MI = 0$. Potom M je pravý R/I-modul so skalarným súčinom $a(r + I) = ar$.*

Dôkaz. Overíme, že skalárne násobenie je dobre definované. Nech $p + I = q + I$ pre nejaké prvky p, $q \in R$. Vieme, že $p - q \in I$. Z podmienky $MI = 0$ dostaneme $ap - aq = a(p - q) = 0$. Teda platí rovnosť $a(p + I) = ap = aq = a(q + I)$ pre každé $a \in M$. □

Teraz definujeme kľúčové pojmy ako projektívny modul, projektívna rezolventa a minimálna projektívna rezolventa.

Definícia 5. Nech R je okruh, potom R-modul P nazveme *projektívnym*, ak pre každý epimorfizmus $h : M \twoheadrightarrow N$ a homomorfizmus $f : P \to N$ existuje homomorfizmus $f' : P \to M$ taký, že $hf' = f$ ako je znázornené komutatívnym diagramom.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "f'"'] \arrow[d, "f"] \\
M \arrow[r, two heads, "h"'] & N
\end{tikzcd}$$

Z definície vidíme, že každý voľný R-modul je projektívny.

Iná ekvivalentná definícia projektívneho modulu je, že modul je projektívny práve vtedy, keď je sumandom nejakého voľného modulu [8]. Z tohto pohľadu sa o projektívnou module hovorí ako zovšeobecnením voľného modulu. V nasledujúcom tvrdení ukážeme len jednu implikáciu.

Lema 6. *Nech P je R-modul. Nech P je sumandom nejakého voľného R-modulu F tj. $F = P \oplus W$, potom P je projektívny.*

Zrejme direktná suma projektívnych modulov je projektívny modul.

Dôkaz. Pre epimorfizmus $h : M \to N$ a homomorfizmus $f : P \to N$ chceme nájsť homomorfizmus $f' : P \to M$ tak, že $h \circ f' = f$. Uvažujme homomorfizmy $\alpha : F \to P$ a inklúziu $\beta : P \to F$ tak, že $\alpha \circ \beta = id_P$. Definujme $\alpha(p + w) = p$ pre $p \in P$, $w \in W$.

Z projektivity modulu F plynie existencia $\alpha' : F \to M$ takého, že $h \circ \alpha' = f \circ \alpha$.

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[ddl, bend right, "\alpha'"'] \arrow[d, bend left, "\alpha"] \\
 & P \arrow[u, bend left, "\beta"] \arrow[dl, dashed, "\exists f'"'] \arrow[d, "f"] \\
M \arrow[r, two heads, "h"'] & N
\end{tikzcd}$$

Stačí jednoducho nahliadnuť, že za hľadané f' môžeme zvoliť $\alpha' \circ \beta$. □

Definícia 7. Nech M je R-modul a K je jeho R-podmodul, potom K nazveme *nadbytočným*, ak pre každý R-podmodul X modulu M platí, že rovnosť $K + X = M$ implikuje $X = M$.

Nech $f : M \to N$ je R-epimomorfizmus, potom f nazveme *minimálnym*, ak $\mathrm{Ker}(f)$ je nadbytočným v M.

Projektívnym pokrytím R-modulu M rozumieme minimálny R-epimorfizmus $f : P \to M$, kde P je projektívny R-modul.

Lema 8. *Nech $f : M \to N$ je homomorfizmus a* $\mathrm{Ker}(f)$ *je nadbytočný. Potom pre každý R-podmodul $A \subsetneq M$ je $f(A) \neq N$.*

Dôkaz. Predpokladajme, že existuje R-podmodul A, pre ktorý platí, že $f(A) = N$. Keďže $\mathrm{Ker}(f)$ je nadbytočné a $A \neq M$, potom $\mathrm{Ker}(f) + A \neq M$. Nech $x \in M \setminus (\mathrm{Ker}(f) + A)$. Z rovnosti $f(A) = N$ plynie existencia $y \in M$ s vlastnosťou $f(y) = f(x)$. Položme $k = y - x$, vidíme, že $k = y - x \in \mathrm{Ker}(f)$. Máme $x = y - k \in \mathrm{Ker}(f) + A$ a to je spor s výberom x. □

Z predchádzajúceho plynie, ak chceme podmodul modulu M, ktorého obraz f „pokryje“ celé N, musíme vziať až celé M.

Lema 9. *Nech $f : P \to M$ a $h : Q \to M$ sú dve projektívne pokrytia R-modulu M. Potom existuje izomorfizmus $g : P \to Q$.*

Dôkaz. Nech f, h sú ako v prepoklade. Z projektivity Q plynie existencia homomorfizmu $g : Q \to P$ takého, že $h = f \circ g$. Máme $g(Q) \subseteq P$ a $h(Q) = f(g(Q)) = M$. Jadro $\mathrm{Ker}(f)$ je nadbytočné. Ak by $g(Q) \neq P$, potom podľa predchádzajúcej Lemy 8 by sme mali $f(g(Q)) \neq M$, a to by bol spor. Nutne g je na, pretože $g(Q) = P$.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, equal, "id"] \arrow[dr, "s"'] & P \arrow[r, two heads, "f"] & M \arrow[d, equal, "id"] \\
 & Q \arrow[u, dashed, two heads, "g"] \arrow[r, two heads, "h"'] & M
\end{tikzcd}$$

Uvažujme identický homomorfizmus $id : P \to P$. Potom z projektivity P plynie existencia homomorfizmu $s : P \to Q$ takého, že $g \circ s = id$. Keďže g je na, potom s je prosté. Predpokladajme, že $\mathrm{Im}(s) + \mathrm{Ker}(h) = Q$. Potom z nadbytočnosti $\mathrm{Ker}(h)$ plynie, že $\mathrm{Im}(s) = Q$, a teda s je na. Dokázali sme, že $s : P \to Q$ izomorfizmus.

Dokážme, že $\mathrm{Im}(s) + \mathrm{Ker}(h) = Q$. Inkluzia je $\subseteq$ je zrejmá. Nech $q \in Q$, potom $q = s(g(q)) + (q - s(g(q)))$, kde $s(g(q)) \in \mathrm{Im}(s)$. Použitím $h = f \circ g$ a $g \circ s = id$ dostaneme

$$\begin{aligned}
h(q - s(g(q))) = h(q) - h(s(g(q))) = h(q) - f(g(s(g(q)))) = \\
= h(q) - f(g(q)) = h(q) - h(q) = 0.
\end{aligned}$$

Teda $q - s(g(q)) \in \mathrm{Ker}(h)$ a dôkaz dokončený. ☐

Definícia 10. Postupnosť R-modulov $\{M_i\}_{i=0}^{m}$, kde $m \in \mathbb{N} \cup \infty$, spolu s R-homomorfizmi $f_i : M_i \to M_{i-1}$

$$\ldots \xrightarrow{f_3} M_2 \xrightarrow{f_2} M_1 \xrightarrow{f_1} M_0$$

nazveme *exaktnou*, ak pre každé $i = 1, 2, \ldots$ platí, že $\mathrm{Ker}(f_{i-1}) = \mathrm{Im}(f_i)$.

Definícia 11. Nech P_1, P_2 a M sú pravé R-moduly. Exaktnú postupnosť

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \to 0$$

nazveme *minimálnou projektívnou prezentáciou* modulu M, ak R-modulové homomorfizmy $p_0 : P_0 \to M$ a $p_1 : P_1 \to \mathrm{Ker}(p_0)$ sú projektívne pokrytia.

Definícia 12. *Projektívnou rezolventou* pravého R-modulu M rozumieme exaktnú postupnosť pravých projektívnych R-modulov $\{P_i\}_{i=0}^{\infty}$ spolu s R-homomorfizmi $f_m : P_m \to P_{m-1}$

$$\ldots \to P_m \xrightarrow{h_m} P_{m-1} \to \ldots \to P_1 \xrightarrow{h_1} P_0 \xrightarrow{h_0} M \to 0.$$

Exaktnú postupnosť

$$... \to P_m \xrightarrow{h_m} P_{m-1} \to ... \to P_1 \xrightarrow{h_1} P_0 \xrightarrow{h_0} M \to 0$$

nazveme *minimálnou projektívnou rezolventou*, ak pre $j = 1, 2, \ldots$ R-homomorfizmi $h_j : P_j \to \mathrm{Im}(h_j)$ a $h_0 : P_0 \to M$ sú projektívne pokrytia.

Teraz uvedieme postupne definície tulca, algebry ciest KQ a prípustného ideálu I. Algoritmus na hľadanie projektívnej rezolventy budeme hľadať práve pre moduly nad faktorovou K-algebrou KQ $/I$.

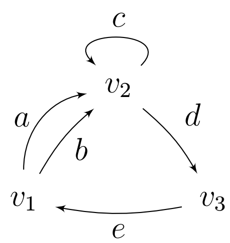
Definícia 13 (Definition II.1.1 [1])**.** *Tulcom* nazveme štvoricu $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$, kde Q_0 je konečná množina *vrcholov*, Q_1 je konečná množina *šípiek* a s, $t : Q_1 \to Q_0$ sú zobrazenia, ktoré každej šípke $\alpha \in Q_1$ priradia začiatok šípky $s(\alpha) \in Q_0$ a jej koniec $t(\alpha) \in Q_0$.

Cestou v Q rozumieme postupnosť hrán $(\alpha_i)_{i=1}^n = \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ takých, že $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$, pre $i = 1, ..., n-1$.

Dĺžka cesty $(\alpha_i)_{i=0}^n$ je n. Naviac dodefinujeme pre každý vrchol dĺžku ako 0. Pre cestu α dĺžky 0 dodefinujeme $t(\alpha) = s(\alpha) = \alpha$.

Poznamenajme, že tulec je prekladom z anglického slova *quiver*. V prípade keď hovoríme o orientovanom grafe tak nie vždy je zrejmé, či uvažujeme viacnásobné hrany a slučky, preto pre Q bol zvolený pojem tulec.

Príklad 14. Na nasledovnom obrázku vidíme príklad tulca.



Definícia 15. Nech Q je tulec a K je teleso. *Algebrou ciest* KQ rozumieme K-algebru skonštruovanú nasledovne. Za bázu vektorového priestoru KQ nad K vezmeme všetky cesty z Q vrátane ciest dĺžky 0.

Dodefinujeme násobenie medzi prvkami báze. Súčin dvoch ciest $(\alpha_i)_{i=1}^n$ a $(\beta_i)_{i=1}^m$ definujeme v prípade, že $t(\alpha_n) = s(\beta_1)$ ako novú cestu

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_m).$$

v opačnom prípade ako 0. Násobenie distributívne rozšírime na K-lineárne kombinácie bázovych vektorov z KQ.

Vyššie uvedená definícia algebry ciest KQ splňuje definíciu K-algebry.

Definícia 16. Nech Q je tulec a KQ je algebra ciest. Označme obojstranný ideál J v KQ generovaný všetkými šípkami tulca Q. Tento špeciálny ideál nazývame *šípkovým ideálom*. Obojstranný ideál $I \subseteq$ KQ nazveme *prípustným*, ak existuje $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ také, že $J^n \subseteq I \subseteq J^2$.

Šipkový ideál umocnený na n, tj. J^n, obsahuje všetky cesty v Q dĺžky aspoň n.

Ukážme, že v Príklade 14 je ideál $I = (c^2, acd - bd, ea, eb)$ prípustný. Zrejme $I \subseteq J^2$. Inklúzia $J^5 \subseteq I$ plynie z toho, že všetky cesty dĺžky aspoň 5 ležia v I. Môžeme dokázať rozborom všetkých ciest podľa začiatočného vrcholu. Uvažujme cesty dĺžky aspoň 5. Nech cesta začína vo vrchole v_1. Ak prechádza aspoň dvakrát hranou c, potom zrejme leží v I, pretože $c^2 \in I$. Ak neprechádza aspoň dvakrát c, potom musí obsahovať dvojicu hrán ea alebo eb, takže opäť leží v I.

Teraz nech cesta začína vo vrchole v_2. Ak prechádza aspoň dvakrát c, potom leží v I. Inak musí prechádzať ea alebo eb, a teda leží v I.

Analogicky pre cestu začínajúcu vo vrchole v_3.

Lema 17. *Nech* KQ *je algebra ciest a I je prípustný ideál, potom K-algebra* KQ/I *je konečne dimenzionálna.*

Dôkaz. Nech B množina všetkých ciest v Q tj. báza KQ. Nech n je také, že $J^n \subseteq I$. Ideál J^n obsahuje všetky cesty dĺžky aspoň n. Potom faktorizáciou podľa J^n zostanú len bázové cesty, ktoré majú dĺžku menšiu ako n. Vzhľadom na konečnosť Q vidíme, že KQ/J^n má konečnú bázu. $\square$

Do konca kapitoly predpokladáme, že A je konečne dimenzionálna K-algebra.

Lema 18. *Nech* KQ *je algebra ciest a $I \subseteq$* KQ *je prípustný ideál. Potom platí, že* $\mathrm{KQ}/I = \oplus_{v \in Q_0} v(\mathrm{KQ}/I)$ *ako* KQ/I*-modul.*

Pre každý vrchol $v \in Q_0$ platí, že $v(\mathrm{KQ}/I) \cong v\,\mathrm{KQ}/vI$ *je pravý projektívny* KQ/I*-modul.*

Dôkaz. Suma $\mathrm{KQ}/I = \sum_{v \in Q_0} v(\mathrm{KQ}/I)$ je zrejmá. Pre dva rôzne vrcholy u, $v \in Q_0$ určite platí, že $u\,\mathrm{KQ} \cap v\,\mathrm{KQ} = 0$. Máme $u(\mathrm{KQ}/I) \cap v(\mathrm{KQ}/I) = 0$, a teda platí, že suma je direktná suma.

Uvažujme homomorfizmus $f : v\,\mathrm{KQ} \to v(\mathrm{KQ}/I)$,

$$f : vx \mapsto v(x + I) = vx + I.$$

Zrejme f je dobre definované. Dokážme, že $\mathrm{Ker}(f) = vI$. Potom z Vety o izomorfizme plynie izomorfizmus z tvrdenia. Poznamenajme, že z vlastnosti $vx \in I$ všeobecne neplynie, že $x \in I$. Ak $vx \in I$, potom $v^2 x \in vI$, a teda $vx = v^2 x \in vI$. Dokázali sme inklúziu $\mathrm{Ker}(f) \subseteq vI$. Opačná inklúzia $vI \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ plynie priamo z definície f. $\square$

Definícia 19. *Jacobsonov radikál K*-algebry A značíme $\mathrm{rad}(A)$ a definujeme ho ako prienik všetkých maximálnych pravých ideálov v A.

Jacobsonov radikál R-modulu M značíme $\mathrm{rad}(M)$ a definujeme ho ako prienik všetkých maximálnych R-podmodulov M.

Pre jednoduchosť hovoríme len o radikále bez prívlastku Jacobsonov. Nech A je K-algebra, M je A-modul, KQ je algebra ciest a $I \subseteq$ KQ je prípustný ideál. Cieľom nasledujúcich tvrdení je dokázať, že $\mathrm{rad}(A)$ je obojstranný ideál, $\mathrm{rad}(A/\mathrm{rad}(A)) = 0$, $\mathrm{rad}(KQ/I) = J/I$ a $\mathrm{rad}(M) = M\,\mathrm{rad}(A)$.

Lema 20 (Lemma I.1.3 [1])**.** *Nech $x \in A$. Potom x leží v* $\mathrm{rad}(A)$*, prieniku všetkých pravých maximálnych ideálov A, práve vtedy, keď pre každé $b \in A$ existuje y také, že $(1 - xb)y = 1$ a $y(1 - xb) = 1$.*

Dôkaz. Začne predpokladom existencie inverzov. Pre spor predpokladajme, že $x \notin \operatorname{rad}(A)$. Potom existuje maximálný pravý ideál I, ktorý neobsahuje x. Z maximality ideálu I plynie rovnosť $A = I + xA$. Potom existujú prvky $i \in I$ a $a \in A$také, že $1 = i + xa$. Ďalej $i = 1 - xa \in I$, a teda ak by existoval pravý inverz k $i = 1 - xa$, potom $I = A$ a to by bol spor s predpokladom.

Pri opačnej implikácii predpokladáme, že $x \in \operatorname{rad}(A)$ a chceme dokázať existenciu pravého a zároveň ľavého inverzu. Predpokladajme, že pre nejaké $b \in A$ neexistuje pravý inverz $1 - xb$. Potom existuje maximálny pravý ideál I, ktorý obsahuje $1 - xb$. Máme $x \in \operatorname{rad}(A) \subseteq I$, potom $xb \in I$, a teda $1 \in I$ a to je spor s maximalitou ideálu I. Dokázali sme existenciu pravého inverzu.

Máme pravý inverz $(1 - xb)y = 1$. Z predpokladu existencie pravých inverzov plynie, že pre $y = 1 - x(-by)$ existuje pravý inverz r tj. $1 = yr = r - x(-by)r = r + xbyr = r + xb$, a teda $r = 1 - xb$. Vidíme, že ľavý inverz k $1 - xb$ je podľa predchadzajúcich rovností y. Tým je lema dokázané. $\square$

Lema 21. *Nech $x \in A$. Potom x leží v prieniku všetkých ľavých maximálných ideálov A práve vtedy, keď pre každé $b \in A$ existuje y také, že $(1 - bx)y = 1$ a $y(1 - bx) = 1$.*

Dôkaz. Analogicky ako v predchádzajúcom dôkaze. $\square$

Aby sme mohli faktorizovať K-algebru podľa radikálu, musíme dokázať, že $\operatorname{rad}(A)$ je obojstranný ideál.

Dôsledok 22 (Lemma I.1.3 [1]). *Nech A je K-algebra, potom*

(a) $\operatorname{rad}(A)$ *je obojstranný ideál*

(b) $\operatorname{rad}(A/\operatorname{rad}(A)) = 0$.

Dôkaz. (a) Dokážeme, že podmienka na existenciu y z Lemy 20 je ekvivalentná podmienke z Lemy 21. Potom $\operatorname{rad}(A)$ je rovný prieniky všetkých maximálných ľavých ideálov, a teda $\operatorname{rad}(A)$ je obojstranný ideál. Ekvilencia podmienok plynie z nasledovných implikácií. Ak existuje obojstranný inverz y pre $(1 - cd)$, potom existuje pre $(1 - dc)$:

$$(1 - cd)y = 1 \Rightarrow (1 - dc)(1 + dyc) = 1$$

$$y(1 - cd) = 1 \Rightarrow (1 + dyc)(1 - dc) = 1.$$

(b) Nech $M \subseteq A$ je maximálny pravý ideál, potom $M/\operatorname{rad}(A)$ je maximálny pravý ideál v $A/\operatorname{rad}(A)$. Ak by $M/\operatorname{rad}(A)$ nebol maximálny, potom by existoval pravý ideál $M/\operatorname{rad}(A) \subsetneq N/\operatorname{rad}(A) \neq A/\operatorname{rad}(A)$. Máme $M \subsetneq N \subsetneq A$, a to je spor s voľbou M.

Podobne, ak $M/\operatorname{rad}(A)$ je maximálny ideál, potom M je maximálny pravý ideál v A. Vidíme, že máme bijekciu medzi maximálnymi pravými ideálmi v $A/\operatorname{rad}(A)$ a A. Z toho plynie, že $\operatorname{rad}(A/\operatorname{rad}(A)) = 0$.

To znamená, ža ak si vezmeme $(x + \operatorname{rad}(A)) \in \operatorname{rad}(A/\operatorname{rad}(A))$, potom $x \in \operatorname{rad}(A)$. Teda $\operatorname{rad}(A/\operatorname{rad}(A)) = 0$.

. $\square$

Lema 23 (Lemma I.1.4 [1])**.** *Nech A je K-algebra a $I \subseteq A$ je obojstranný nilpotentný ideál. Ak K-algebra A/I je izomorfná $K \times K \times \cdots \times K$, potom*

$$I = \mathrm{rad}(A).$$

Dôkaz. Nilpotentnosť ideálu I znamená, že existuje $m > 0$ také, že $I^m = 0$. Ukážeme, že $I \subseteq \mathrm{rad}(A)$. Nech $x \in I$ a $a \in A$, podľa Lemy 20 stačí ukázať, že $1 - xa$ má pravý inverz. Skutočne $(1 - xa)(1 + ax + (ax)^2 + \cdots + (ax)^{(m-1)}) = 1$, a teda $x \in \mathrm{rad}(A)$.

Opačná inklúzia $\mathrm{rad}(A) \subseteq I$. Nech π je prirodzený K-algebrový homomorfizmus $\pi : A \to A/I$. Zrejme $\mathrm{Ker}(\pi) = I$, stačí dokázať, že $\mathrm{rad}(A) \subseteq \mathrm{Ker}(\pi)$. Poznamenajme, že teleso K má len jeden maximálný ideál a to 0. Podľa predpokladu máme $A/I \cong K \times K \times \cdots \times K$, a preto $\mathrm{rad}(A/I) = 0$.

Cieľom je inklúzia $\pi(\mathrm{rad}(A)) \subseteq \mathrm{rad}(A/I)$. Nech $x \in \mathrm{rad}(A)$, $b \in A$. Podľa Lemy 20 existuje pravý inverz y k $1-xb$ tj. $(1-xb)y = 1$. Potom $1 = \pi((1-xb)y) = (1 - \pi(x)\pi(b))\pi(y)$. Našli sme pravý inverz $\pi(y)$ k $1 - \pi(x)\pi(b)$. Opäť podľa Lemy 20 $\pi(x) \in \mathrm{rad}(A/I)$. Dôkaz je dokončený. $\square$

Lema 24 (Lemma II.1.10 [1])**.** *Nech* KQ *je algebra ciest a $J \subseteq$* KQ *je šípkový ideál, potom*

$$\mathrm{KQ}\,/J \cong K \times K \times \cdots \times K.$$

Dôkaz. Máme následovné rovnosti

$$\mathrm{KQ}\,/J = \oplus_{a\in Q_0} \oplus_{b\in Q_0} (e_a + J)(\mathrm{KQ}\,/J)(e_b + J) = \oplus_{a\in Q_0}(e_a + J)(\mathrm{KQ}\,/J)(e_a + J),$$

kde e_a, e_b sú cesty z KQ dĺžky 0 resp. vrcholy z Q_0. Prvá rovnosť plynie z úvah použitých v Leme 18. Neformálne, cesty rozdelíme podľa toho, kde začínajú a končia. Druhá rovnosť platí, pretože šípkový ideál J obsahuje všetky cesty dĺžky aspoň 1. Generátormi faktoralgebry $\mathrm{KQ}\,/J$ sú práve cestu dĺžky nula. Z toho istého argumentu plynie, že $(e_a + J)(\mathrm{KQ}\,/J)(e_a + J) \cong K$. $\square$

Tvrdenie 25 (Lemma II.2.10 [1])**.** *Nech* KQ *je algebra ciest a $I \subseteq$* KQ *je prípustný ideál. Potom*

$$\mathrm{rad}(\mathrm{KQ}\,/I) = J/I.$$

Dôkaz. Použijeme Lema 23. Obojstraný ideál J/I je nilpotentný. To plynie z toho, že existuje $m \geq 2$ také, že $I^m \subseteq J$. Potom $(J/I)^m = 0$. Stačí ukázať, že $(\mathrm{KQ}\,/I)/(J/I) \cong K \times K \times \cdots \times K$. Podľa 3. vety o izomorfizme máme $(\mathrm{KQ}\,/I)/(J/I) \cong \mathrm{KQ}\,/J$ a použijeme Lema 24. Tým je lema dokázaná. $\square$

Definícia 26. *Nech M je pravý A-modul. Potom M nazývame jednoduchý, ak $M \neq 0$ a obsahuje len podmoduly* 0 *a M.*

Modul N nazývame totálne rozložiteľným, ak $N \cong \oplus_{i\in I} M_i$, kde M_i sú jednoduché A-moduly.

Priamo z definície Jacobsonova radikálu máme $\mathrm{rad}(M) = 0$ pre každý jednoduchý modul M.

Veta 27 (Theorem I.3.4 [1])**.** *Nech A je konečne dimenzionálna K-algebra, kde K je algebraicky uzavreté teleso. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné*

- *A ako pravý A-modul je totálne rozložiteľný*
- *každý pravý A-modul je totálne rozložiteľný*
- $\operatorname{rad}(A) = 0$

Dôkaz. Pretože dôkaz vety je zložitejší, tak odkážeme len na literatúru [1]. $\square$

Lema 28. *Nech M, N sú A-moduly. Potom platí, že*

(a) Nech $f : M \to N$ je homomorfizmus, potom $f(\operatorname{rad} M) \subseteq \operatorname{rad}(N)$

(b) $\operatorname{rad}(M \oplus N) = \operatorname{rad}(M) \oplus \operatorname{rad}(N)$.

Dôkaz. (a) Ak $K \subseteq N$ je maximálny podmodul, potom $f^{-1}(K)$ je buď M alebo maximálny podmodul v M. Z toho plynie požadovaná inklúzia.

(b) Zrejme $M \oplus 0 \subseteq M \oplus N$, $0 \oplus N \subseteq M \oplus N$, a teda podľa b) platí inkluzia $\operatorname{rad}(M) \oplus \operatorname{rad}(N) \subseteq \operatorname{rad}(M \oplus N)$. Uvažujme projekcie $\pi_1 : M \oplus N \twoheadrightarrow M$ a $\pi_2 : M \oplus N \twoheadrightarrow N$, potom z c) plynie, že $\pi_1(\operatorname{rad}(M \oplus N)) \subseteq \operatorname{rad}(M)$ a analogicky $\pi_2(\operatorname{rad}(M \oplus N)) \subseteq \operatorname{rad}(N)$.

Tým je dôkaz dokončený. $\square$

Tvrdenie 29 (Proposition I.3.7 d) [1]). *Nech A je konečne dimenzionálna K-algebra a M je A-modul, potom*

$$\operatorname{rad}(M) = M \operatorname{rad}(A).$$

Dôkaz. Najprv dokážeme inklúziu $M \operatorname{rad}(A) \subseteq \operatorname{rad}(M)$. Nech $m \in M$ a definujme A-moduový homomorfizmus $f_m : A \to M$ tak, že $f_m(a) = ma$ pre každé $a \in A$. Z Lemy 28 plynie, že $M \operatorname{rad}(A) = f_m(\operatorname{rad}(A)) \subset \operatorname{rad}(M)$.

Dokážme inkluziu $\operatorname{rad}(M) \subseteq M \operatorname{rad}(A)$. Pre každé $m \in M$ platí rovnosť $(m + M \operatorname{rad}(A)) \cdot \operatorname{rad}(A) = 0 + M \operatorname{rad}(A)$, potom máme $(M/(M \operatorname{rad}(A))) \operatorname{rad}(A) = 0$. Preto A-modul $M/(M \operatorname{rad}(A))$ je tiež $A/\operatorname{rad}(A)$-modulom podľa Lemy 4.

Podľa Dôsledku 22 je $\operatorname{rad}(A/\operatorname{rad}(A)) = 0$. Potom podľa Vety 27 je K-algebra $A/\operatorname{rad}(A)$ totálne rozložiteľná a $M/(M \operatorname{rad}(A))$ je totálne rozložiteľný, a teda je direktnou sumou jednoduchých modulov. Radikál jednoduchého modulu je nula, potom podľa Lemy 28 máme $\operatorname{rad}(M/(M \operatorname{rad}(A))) = 0$.

Definujme kanonický A-modulový epimorfizmus $\pi : M \to M/(M \operatorname{rad}(A))$. Znovu použitím Lemy 28 dostaneme $\pi(\operatorname{rad}(M)) \subseteq \operatorname{rad}(M/(M \operatorname{rad}(A))) = 0$. Teda $\operatorname{rad}(M) \subseteq M \operatorname{rad}(M)$. $\square$

1.2 Reprezentácie (KQ/I)-modulov

Každý konečne dimenzionálny KQ/I-modul môžeme reprezentovať pomocou tulca, kde za vrcholy vezmeme vektorové priestory a za šípky vezmeme homomorfizmy. Aké vektorové priestory, homomorfizmy definujeme v tejto kapitole spolu so základnými tvrdeniami.

Definícia 30. Nech $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ je tulec. *Reprezentáciou* (presnejšie *K-lineárnou reprezentáciou*) tulca Q rozumieme postupnosť vektorových priestor a linenárných zobrazení $M = (M_v, \varphi_\alpha)_{v \in Q_0, \alpha \in Q_1}$. Ku každému vrcholu v z Q_0 priradíme K-vektorový priestor M_v a každej šípke $\alpha : a \to b$ K-homomorfizmus $\varphi_\alpha : M_a \to M_b$.

Nech $w = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ je cesta v Q z vrcholu a do vrcholu b, potom definujeme zobrazenie $\varphi_w = \varphi_{\alpha_n} \cdots \varphi_{\alpha_1}$.

Nech $\rho \in$ KQ a $\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i$, kde $\lambda_i \in K$ a w_i sú cesty z vrcholu a do vrcholu b v tulci Q. Inak povedané $a\rho = \rho$ a $\rho b = \rho$. Potom definujeme zobrazenie $\varphi_\rho = \sum_{i=1}^{m} \varphi_{w_i} \lambda_i$.

Nech I je generovaný množinou $\{\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n\} \subseteq$ KQ a je prípustný ideál. Naviac nech existujú vrcholy a_1, a_2, $\ldots$, a_n a b_1, b_2, $\ldots$, b_n také, že $a_i \rho_i = \rho_i$ a $\rho_i b_i = \rho_i$.

Reprezentáciu $M = (M_v, \varphi_\alpha)_{v \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ nazveme *obmedzenou ideálom I*, ak pre každé $\rho \in I$ platí, že $\varphi_\rho = 0$. V celom texte budeme pracovať len s reprezentáciami, ktoré sú obmedzené prípustným ideálom.

Naďalej budeme predpokladať len konečne dimenzionálne vektorové priestory M_v pre každý vrchol $a \in Q_0$.

Príklad 31.

$$\begin{tikzcd} & v_2 \arrow[loop above, "c"] \arrow[dr, "d"] & \\ v_1 \arrow[ur, bend left, "a"] \arrow[ur, "b"'] & & v_3 \arrow[ll, bend left, "e"] \end{tikzcd}$$

Homomorfizmy sú zadané maticami:

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Násobením matíc overíme, že KQ je obmedzené ideálom $I = (c^2, acd - bd, ea, eb)$.

Definícia 32. Nech $M = (M_v, \varphi_\alpha)_{v \in Q_0, \alpha \in Q_1}$, $N = (N_v, \psi_\alpha)_{v \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ a $L = (L_v, \phi_\alpha)_{v \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ sú reprezentácie tulca $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$. *Morfizmus* $f : M \to N$ z reprezentácie M do N definujeme ako postupnosť K-homomorfizmov $f = (f_a)_{a \in Q_0}$, kde $f_a : M_a \to N_a$ a naviac platí pre každú šípku $\alpha : a \to b$ rovnosť $\psi_\alpha f_a = f_b \varphi_\alpha$.

$$\begin{tikzcd} M_a \arrow[r, "\varphi_\alpha", "\alpha"'] \arrow[d, "f_a"'] & M_b \arrow[d, "f_b"] \\ N_a \arrow[r, "\psi_\alpha", "\alpha"'] & N_b \end{tikzcd}$$

Nech $f : M \to N$ a $g : N \to L$ sú dva morfizmy reprezentácií, kde $f = (f_a)_{a \in Q_0}$ a $g = (g_a)_{a \in Q_0}$. *Zloženie* morfizmov f a g definujeme ako morfizmus $gf : M \to L$, kde $gf = (g_a f_a)_{a \in Q_0}$.

Z nasledujúceho komutatívneho diagramu je vidieť, že zloženie morfizmov f a g je morfizmus reprezentacii z M do L, pretože $\phi_\alpha g_a f_a = g_b f_b \varphi_\alpha$.

$$\begin{tikzcd}
M_a \arrow[r, "\varphi_\alpha", "\alpha"'] \arrow[d, "f_a"'] & M_b \arrow[d, "f_b"] \\
N_a \arrow[r, "\psi_\alpha", "\alpha"'] \arrow[d, "g_a"'] & N_b \arrow[d, "g_b"] \\
L_a \arrow[r, "\phi_\alpha", "\alpha"'] & L_b
\end{tikzcd}$$

Bez toho, aby sme definovali pojem „kategória“ poznamenajme, že kategória $Rep(Q, I)$ všetkých K-reprezentácií obmedzených ideálom I tulca $Q = (Q_0, Q_1)$ a kategória všetkých $\mathrm{KQ}\,/I$-modulov $Mod(\mathrm{KQ}\,/I)$ sú kategoriálne ekvivalentné. Na korektnejšie vysvetlenie odkážeme na kapitolu *Chapter III Representation and Modules* [1].

Nasledujúce konštrukcie dávajú do súvislosti $\mathrm{KQ}\,/I$-moduly a K-lineárne reprezentácie tulca Q. Poznamenajme, že touto konštrukciou popíšeme funktory na objektoch $Rep(Q, I)$ a $Mod(\mathrm{KQ}\,/I)$.

Modul ako reprezentácia

Nech $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ je tulec, kde $Q_0 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a $I \subseteq \mathrm{KQ}$ je prípustný ideál algebry ciest KQ. Predpokladajme, že M je $\mathrm{KQ}\,/I$-modul, kde I je prípustný ideál. Jednoducho overeníme, že v $\mathrm{KQ}\,/I$ je jednička $1 = \sum_{v \in Q_0}(v + I)$. Modul M má taktiež štruktúru K-vektorového priestoru. Pre M ako vektorový priestor platí, že

$$M1 = M(v_1 + v_2 + \cdots + v_n + I) = M(v_1 + I) \oplus M(v_2 + I) \oplus \cdots \oplus M(v_n + I),$$

kde $M(v_i + I)$ sú K-vektorové priestory. Každému vrcholu v_i priradíme vektorový priestor $M(v_i + I)$. Teraz stačí hranám priradiť lineárne zobrazenia.

Pre šípku $\alpha : v_i \to v_j$ definujeme lineárne zobrazenie $\varphi_\alpha : M(v_i + I) \to M(v_j + I)$ tak, že

$$\varphi_\alpha(x) = x(\alpha + I).$$

Overme ešte, že takto definovaná reprezentácia je obmedzená ideálom I. Nech $\rho \in I$ a $\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i$, kde $w_i = (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,m_i})$. Máme

$$\begin{aligned}
\varphi_\rho(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_{\alpha_{i,1}}(\cdots \varphi_{\alpha_{i,1}}(x)) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_{\alpha_{i,1}}(\cdots \varphi_{\alpha_{i,2}}(x\alpha_{i,1})) = \\
= \sum_{i=1}^{m} x(\lambda_i \alpha_{i,1} \cdots \alpha_{i,m_i} + I) = x \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i \alpha_{i,1} \cdots \alpha_{i,m_i} + I) = \\
= x(\rho + I) = x(0 + I) = 0.
\end{aligned}$$

Reprezentácia ako modul

Opačný postup. Nech máme reprezentáciu $M = (M_v, \varphi_\alpha)_{v \in Q_0, \alpha \in Q_1}$, potom asociujeme k tejto reprezentácii nasledovne $(\mathrm{KQ}\,/I)$-modul G. Položíme $G = \oplus_{a \in Q_0} M_a$ a dodefinujeme násobenie zprava prvkami z KQ. Potom ukážeme, že násobenie je kompatiblné s násobením $\mathrm{KQ}\,/I$ čím získame štruktúru $(\mathrm{KQ}\,/I)$-modulu.

Nech $w = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l$ je cesta z a do b a označme homomorfizmu

$$\varphi_w = \varphi_{\alpha_l}\cdots\varphi_{\alpha_1} : M_a \to M_b.$$

Nech $x = (x_a)_{a\in Q_0} \in G$. Ak w je vrchol a, potom definujeme $(xw)_a = x_a$ a $(xw)_c = 0$ pre $c \neq a$. Nech $w = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ je cesta dĺžky aspoň 1. Potom definujeme

$$(xw)_b = \varphi_w(x_a), \qquad (xw)_c = 0$$

pre $c \neq b$. Násobenie sme definovali len pre cesty w, a teda stačí prirodzeným spôsobom dodefinovať pre ľubovoľnú K-lineárnu kombináciu ciest.

Teraz ukážeme štruktúru KQ/I-modulu. Z predpokladu reprezentácie obmedzenej ideálom I máme pre $q \in I$ rovnosť $xq = 0$. Definujeme $x(v + I) = xv$ pre $x \in G$ a $v \in \mathrm{KQ}$. Správnosť definície plynie z Lemy 4.

Pozorovanie 33. Nech $M = (M_v, \varphi_\alpha)_{v\in Q_0,\alpha\in Q_1}$, $N = (N_v, \vartheta_\alpha)_{v\in Q_0,\alpha\in Q_1}$ sú dve reprezentacie tulca $Q = (Q_0, Q_1)$.

Direktná suma dvoch reprezentácií M a N je

$$M \oplus N = \left(M_v \oplus N_v, \begin{bmatrix}\varphi_\alpha & 0\\ 0 & \vartheta_\alpha\end{bmatrix}\right)_{v\in Q_0,\alpha\in Q_1}$$

Nech $f : M \to N$, $f = (f_v)_{v\in Q_0}$, je morfizmus dvoch reprezentácií. *Jadrom* $\mathrm{Ker}(f)$ definujeme ako reprezentácií tulca Q následovne $\mathrm{Ker}(f) = (K_v, \delta_\alpha)_{v\in Q_0,\alpha\in Q_1}$, kde $K_v = \mathrm{Ker}(f_v)$

Morfizmus $f = (f_a)$ je *monomorfizmus* práve vtedy, keď každé K-lineárne zobrazenie f_a je monomorfizmus. Analogicky $f = (f_a)$ je *epimorfizmus* práve vtedy, keď každý f_a je epimorfizmus.

Definícia 34. Nech $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ je tulec. Potom definujeme jednoduchú reprezentáciu $S(a) = (S(a)_v, \varphi_\alpha)_{v\in Q_0,\alpha\in Q_1}$ k vrcholu $a \in Q_0$, kde

$$S(a)_b = \begin{cases} 0 & b \neq a \\ K & b = a \end{cases}$$

$$\varphi_\alpha = 0 \textit{ pre každé } \alpha \in Q_1.$$

Tvrdenie 35. *Nech* KQ/I *je* K*-algebra pre nejaký tulec* $Q = (Q_0, Q_1)$*. Oznamčme reprezentáciu* $P(a) = (P(a)_b, \varphi_\beta)$ *pre* KQ/I*-modul*

$$P(a) = e_a(\mathrm{KQ}/I),$$

kde $a \in Q_0$ *a* $e_a = \varepsilon_a + I$ *(*ε_a *je cesta dĺžky nula začínajúca vo vrchole* a*). Potom*

- $P(a)_b$ *je* K*-vektorový priestor generovaný množinou* $\{\bar{w} = w+I | w \textit{ je cesta z } a \textit{ do } b\}$
- *pre šípku* $\beta : b \to c$ *definujeme* K*-homomorfizmus* $\varphi_\beta : P(a)_b \to P(a)_c$ *ako* $\varphi_\beta(\bar{w}) = \bar{w}\bar{\beta}$ *pre* $w \in P(a)_b$*, kde* $\bar{\beta} = \beta + I$*.*

Dôkaz. Podľa konštrukcie reprerezentácie z modulu vrcholu $b \in Q_0$ priradíme vektorový priestor

$$P(a)_b = P(a)e_b = e_a(\mathrm{KQ}/I)e_b = (\varepsilon_a + I)(\mathrm{KQ}/I)(\varepsilon_b + I) = (\varepsilon_a \mathrm{KQ}\, \varepsilon_b)/(\varepsilon_a I \varepsilon_b).$$

Z tejto rovnosti vidíme, že $P(a)_b$ je vektorový priestor generovaný

$$\{\bar{w} = w + I | w \text{ je cesta z } a \text{ do } b\}.$$

Nech $\beta : b \to c$ je šípka z Q_1. Homomorfizmus

$$\varphi_\beta : e_a(\mathrm{KQ}/I)e_b \to e_a(\mathrm{KQ}/I)e_c$$

sme definovali ako $\varphi_\beta(\bar{w}) = \bar{w}\bar{\beta}$ pre $\bar{\beta} = \beta + I$. □

Tvrdenie 36 (Lemma III.2.2(c) [1]). *Nech M je KQ/I-modul a jeho reprezentácie je (M_a, φ_α). Potom $\mathrm{rad}(M)$ má reprezentáciu (J_a, γ_α), kde*

$$J_a = \sum_{\alpha : b \to a} \mathrm{Im}(\varphi_\alpha : M_b \to M_a)$$

$$\gamma_\alpha = \varphi_\alpha|_{J_a} \text{ pre každú šípku } \alpha \text{ z vrcholu } a.$$

Dôkaz. Podľa Tvrdení 29 a 25 máme

$$\mathrm{rad}(M) = M \,\mathrm{rad}(\mathrm{KQ}/I) = M(J/I) = \sum_{\alpha \in Q_1} M(\alpha + I),$$

kde $J \subseteq \mathrm{KQ}$ je šípkový ideál. Z toho plynie rovnosť $J_a = \sum_{\alpha \in Q_1, t(\alpha) = a} M(\alpha + I)$. Máme $M(\alpha + I) = Me_b(\alpha + I) = M_b(\alpha + I) = \varphi_\alpha(M_b) = \mathrm{Im}(\varphi_\alpha)$. Zrejme $\gamma_\alpha = \varphi_\alpha|_{J_a}$ je len zúženie na podmodul J. □

Definícia 37. *Nech A je K-algebra a M je A-modul, potom definujeme pravý $A/\mathrm{rad}(A)$-modul $\mathrm{top}(M) = M/\mathrm{rad}(M)$.*

Dôsledok 38 (Lemma III.2.2(d) [1]). *Nech M je KQ/I-modul. Uvažujme $A/\mathrm{rad}(A)$-modul $\mathrm{top}(M)$ a označme jeho reprezentáciu ako $L = (L_a, \psi_\alpha)$, kde*

$$L_a = \begin{cases} M_a & \nexists \beta \in Q_1, \text{ že } t(\beta) = a \\ M_a / \sum_{\alpha : b \to a} Im(\varphi_\alpha : M_b \to M_a) & \text{inak} \end{cases}$$

$$\psi_\alpha = 0 \text{ pre každú šípku z vrcholua.}$$

Dôkaz. Plynie z definície $\mathrm{top}(M) = M/\mathrm{rad}(M)$ a predchádzajúceho Tvrdenia 36. □

Dôsledok 39. *Nech KQ/I-modul M je konečne dimenzionálny, kde I je prípustný ideál. Potom pre reprezentáciu modulu $\mathrm{top}(M)$ platí, že*

$$\mathrm{top}(M) \cong \oplus_{a \in Q_0} S(a)^{s_a},$$

kde $s_a \geq 0$ pre $a \in Q_0$.

Dôkaz. Plynie z predchádzajúceho Dôsledku 38, kde s_a je dimenzia vektorového priestoru v vrchole a. □

1.3 Gröbnerova báza pre K-algebry

Cieľom je pracovať s prvkami faktorovej algebry KQ/I. Najprv zavedieme pojem *usporiadanej báze* a na to nadväzujúcu definíciu *tipu* pre prvky a množiny aj *nontip*. Gröbnerovu bázu G pre ideál I definujeme tak, že $\mathrm{Tip}(I) = \mathrm{Tip}(G)$. Pre K-vektorový priestor KQ platí, že $\mathrm{KQ} = I \oplus \langle \mathrm{NonTip}(I)\rangle_K$. Potom za reprezentanty tried faktorovej algebry KQ/I zvolíme práve prvky z $\langle \mathrm{NonTip}(I)\rangle_K$. Začneme definíciami a nakoniec dokážeme vyššie spomenuté tvrdenia. V ďalšej kapitole budeme pokračovať v Gröbnerových bázach pre moduly.

Definícia 40. Usporiadanie $\leq$ na množine M nazveme *dobrým*, ak pre každé a, b, $c \in M$ platí, že

- $a \leq a$
- $a \leq b,\, b \leq a \Rightarrow a = b$ (antisymetria)
- $a \leq b,\, b \leq c \Rightarrow a < c$ (tranzitivita)
- $a < b$ alebo $b < a$ alebo $a = b$ (úplnosť)
- každá neprázdna podmnožina M má najmenší prvok.

Poznamenajme, že tretia podmienka plynie priamo zo štvrtej.

Definícia 41 ([4])**.** Nech B je množinou všetkých ciest K-algebry KQ. Potom B je K-bázou KQ. Dvojicu $(B, >)$ nazveme *usporiadanou bázou*, ak pre každé p, q, $r \in B$ platí, že:

- $>$ je dobré usporiadanie
- $p > q \Rightarrow pr > qr$, ak $pr \neq 0$ a $qr \neq 0$
- $p > q \Rightarrow rp > rq$, ak $rp \neq 0$ a $rq \neq 0$
- ak $p = qr$, potom $p > q$, $p > r$

Nech $x \in \mathrm{KQ}$ a $x = \sum_{p \in B} \alpha_p p$, potom definujeme

$$\mathrm{tip}(x) = p, \quad \mathrm{ctip}(x) = \alpha_p,$$

ak $\alpha_p \neq 0$ a $p > b$ pre každé $b \in B$, $\alpha_b \neq 0$.

Pre množinu $X \subseteq \mathrm{KQ}$ definujeme množinu tipov a jej komplement netipov

$$\mathrm{Tip}(X) = \{\mathrm{tip}(x) : x \in X\}, \quad \mathrm{NonTip}(X) = B \setminus \mathrm{Tip}(X).$$

Nech $I \subseteq \mathrm{KQ}$ je obojstranný ideál. Potom podmnožinu $G \subseteq I$ nazveme *obojstranou Gröbnerovou bázou* I, ak $\mathrm{Tip}(G)$ a $\mathrm{Tip}(I)$ generujú rovnaké obojstrané ideály

$${}_{\mathrm{KQ}}\langle \mathrm{Tip}(G)\rangle_{\mathrm{KQ}} = {}_{\mathrm{KQ}}\langle \mathrm{Tip}(I)\rangle_{\mathrm{KQ}}.$$

Nech p, $q \in \mathrm{KQ}$. Povieme, že p *delí* (*zľava/zprava*) q, ak existujú a, $b \in B$ také, že $q = apb$ ($q = pb$ resp. $q = ap$). Zapisujeme $p|q$ ($p|_l q$ resp. $p|_r q$).

Množina $X \subseteq \mathrm{KQ}$ je *tip-redukovaná*, ak pre každé $x \neq y \in \mathrm{KQ}$ platí, že $\mathrm{tip}(x) \nmid \mathrm{tip}(y)$.

Prvok $p \in \mathrm{KQ}$ nazveme *zprava uniformným*, ak existuje vrchol $v \in Q_0$ taký, že $p = pv$. Analogicky *zľava uniformný* prvok, ak existuje $u \in Q_0$ taký, že $p = up$.

Prvok $p \in \mathrm{KQ}$ nazveme *uniformným*, ak je zľava a zprava uniformný. Ak množina obsahuje len (zľava/zprava) uniformné prvky, potom ju nazývame (zľava/zprava) *uniformnou.*

Tvrdenie 42 (Example 2.1 [3])**.** *Nech* KQ *je algebra ciest a B je množina všetkých ciest v Q. Potom existuje $(B, >)$ usporiadaná báza.*

Dôkaz. Zrejme B je bázou KQ. Nech tulec $Q = (Q_0, Q_1)$, označme vrcholy $Q_0 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a hrany $Q_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$. Definujeme usporiadanie $>$ na vrcholoch a hranách nasledovne:

$$v_1 < v_2 < \cdots < v_n < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m.$$

Nech a, b sú dve rôzne cesty z Q, potom $a < b$, ak platí jedna z možností

- a má kratšiu dĺžku ako b
- $a = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$, $b = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ nech i je najmenší index taký, že $\alpha_i \neq \beta_i$, ak $\alpha_i < \beta_i$, potom $a < b$.

. □

Ďalej, ak hovoríme o usporiadanej báze algebry ciest KQ, myslíme práve usporiadanie $>$ definované v predošlom dôkaze Tvrdenia 42. Poznamenajme už teraz, že toto usporiadanie je jediným využívaným v balíku QPA.

Tvrdenie 43 (Theorem 2.1 [3])**.** *Pre každý obojstranný ideál $I \subseteq \mathrm{KQ}$ platí, že*

$$\mathrm{KQ} = I \oplus {}_K\langle \mathrm{NonTip}(I)\rangle$$

ako vektoré priestory.

Dôkaz. Nech $x \in I \cap {}_K\langle \mathrm{NonTip}(I)\rangle$ je nenulové. Zrejme $\mathrm{tip}(x) \in \mathrm{Tip}(I)$ a $\mathrm{tip}(x) \in \mathrm{Tip}({}_K\langle \mathrm{NonTip}(I)\rangle) = \mathrm{NonTip}(I)$. Dostali sme spor, a teda prienik obsahuje len nulu.

Teraz stačí dokázať rovnosť $I + {}_K\langle \mathrm{NonTip}(I)\rangle = \mathrm{KQ}$. Pre spor predpokladajme, že existuje $v \in \mathrm{KQ} \setminus (I + {}_K\langle \mathrm{NonTip}(I)\rangle)$. Prvok v zvolíme tak, aby $\mathrm{tip}(v)$ bol najmenší vzhľadom na usporiadanie $>$

$$\mathrm{tip}(v) = \min_{>}\{\mathrm{tip}(x) : x \in KQ \setminus (I + {}_K\langle \mathrm{NonTip}(I)\rangle)\}.$$

Existencia $\min_{>}$ plynie z toho, že $>$ je dobré usporiadanie. Rozlíšime dva prípady kedy $\mathrm{tip}(v) \in \mathrm{NonTip}(I)$ a $\mathrm{tip}(v) \notin \mathrm{NonTip}(I)$.

Nech $\mathrm{tip}(v) \in \mathrm{NonTip}(I)$. Platí, že $\mathrm{tip}(v) > \mathrm{tip}(v - \mathrm{ctip}(v)\,\mathrm{tip}(v))$. Z minimality plynie, že $v - \mathrm{ctip}(v)\,\mathrm{tip}(v) \in I + {}_K\langle \mathrm{NonTip}(I)\rangle$. Teda existuje $w \in I$ a $z \in {}_K\langle \mathrm{NonTip}(I)\rangle$ také, že $v - \mathrm{ctip}(v)\,\mathrm{tip}(v) = w + z$. Potom $v = w + (z + \mathrm{ctip}(v)\,\mathrm{tip}(v)) \in I + {}_K\langle \mathrm{NonTip}(I)\rangle$. Spor s volbou v.

Nech $\mathrm{tip}(v) \notin \mathrm{NonTip}(I)$, a teda $\mathrm{tip}(v) \in \mathrm{tip}(I)$. Vyberme $y \in I$ s vlastnosťou $\mathrm{tip}(y) = \mathrm{tip}(v)$. Potom

$$\mathrm{tip}(v) > \mathrm{tip}(v - \mathrm{ctip}(v)/\,\mathrm{ctip}(y)y).$$

Opäť z dôvodu minimality máme $v - \mathrm{ctip}(v)/\,\mathrm{ctip}(y)y = w' + z'$, kde $w' \in I$ a $z' \in {}_K\langle \mathrm{NonTip}(I)\rangle$. Potom $v = ((\mathrm{ctip}(v)/\,\mathrm{ctip}(y)y + w') + z' \in I + {}_K\langle \mathrm{NonTip}(I)\rangle$. Dostali sme spor s volbou v. □

Definícia 44. Nech $I \subseteq \mathrm{KQ}$ je ideál, potom podľa Tvrdenia 43 máme

$$\mathrm{KQ} = I \oplus {}_K\langle \mathrm{NonTip}(I)\rangle.$$

Potom pre $x \in \mathrm{KQ}$ máme $x = y + \mathrm{N}(x)$, kde $y \in I$ a $\mathrm{N}(x) \in {}_K\langle \mathrm{NonTip}(I)\rangle$. Prvon $\mathrm{N}(x)$ nazývame normálnou formou x.

Pri hľadaní Gröbnerovej bázi G obojstraného ideálu I budeme potrebovať nasledovný algoritmus delenia. Vstupom je množina prvkov $g_1, g_2, \ldots, g_n$ a prvok y z KQ. Výstupom sú prvky $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{N}_0$, $u_{i,j}$, $v_{i,j} \in B$, $\alpha_{i,j} \in K$ a $z \in \mathrm{KQ}$ také, že

$$y = z + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{i,j} u_{i,j} g_i v_{i,j}.$$

Nech máme vyjadrenie $z = \sum_{b\in B} \alpha_b b$, kde b sú cesty. Naviac požadujeme, aby $\mathrm{tip}(g_i) \not| \mathrm{tip}(b)$ pre žiadne $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\alpha_b \neq 0$ a $\mathrm{tip}(y) \geq \mathrm{tip}(u_{i,j} g_i v_{i,j})$.

Algoritmus 45. *Delenie, upravený The Division Algorithm [4]*

$m_1 = 0$, $m_2 = 0$, …, $m_n = 0$, $z = y$, $i = 1$
while $(i \leq n \quad \& \quad z \neq 0)$ **do**
  if $(\mathrm{tip}(z) = u\,\mathrm{tip}(g_i)v)$ pre nejaké u, $v \in B$ **then**
    $m_i = m_i + 1$
    $i = 1$
    $u_{i,m_i} = u$
    $\alpha_{i,j} = \mathrm{ctip}(z)/\,\mathrm{ctip}(g_i)$
    $v_{i,m_i} = v$
    $z = z - \alpha_{i,j} u_{i,m_i} g_i v_{i,m_i}$
  else
    $i = i + 1$

Tvrdenie 46 (Algoritmus, strana 38 [3])**.** *Algoritmus 45 funguje.*

Dôkaz. Postupne skúšame deliť $\mathrm{tip}(z)$ prvkami $\mathrm{tip}(g_i)$. Z definície usporiadanej bázy resp. usporiadania $>$ plynie, že algoritmus po konečnom počte krokov sa zastaví. Zbytok je zrejmý. □

Definícia 47. *Nech $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subseteq \mathrm{KQ}$ a $x \in \mathrm{KQ}$. Výsledok zvyšok z Algoritmusu 45 so vstupom G a x symbolicky zapisujeme ako $y \Rightarrow_G z$.*

Teraz dokážeme, že $\mathrm{N}(x)$ a zvyšok $y \Rightarrow_G z$ sa rovnajú.

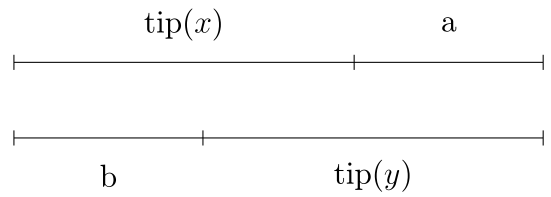
Lema 48 (Proposition 2.7, [3])**.** *Ak vstupná množina $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ Algoritmusu 45 je obojstraná Gröbnerova báza ideálu I a nech $x \Rightarrow_G z$, potom*

$$\mathrm{N}(x) = z.$$

Dôkaz. Ukážeme, že $z \in {}_K\langle \mathrm{NonTip}(I)\rangle$, potom zvyšok plynie z Tvrdenia 43 o direktnej sume. Podľa predpokladu ${}_{\mathrm{KQ}}\langle \mathrm{Tip}(I)\rangle_{\mathrm{KQ}} = {}_{\mathrm{KQ}}\langle \mathrm{Tip}(G)\rangle_{\mathrm{KQ}}$. Nech máme vyjadrenie $z = \sum_{b\in B} \alpha_b b$ voči usporiadanej bázi B, množina všetkých ciest. $\alpha_b \neq 0$. Chceme dokázať, že žiaden $\mathrm{tip}(g_i)$ nedelí $\mathrm{tip}(b)$. To plynie z definície výstupu samotného Algoritmusu 45. □

Definícia 49. Nech x, $y \in \mathrm{KQ}$ a a, $b \in B$ (B je množina všetkých ciest v Q, viď Tvrdenie 42) sú také, že

- $\mathrm{tip}(x)a = b\,\mathrm{tip}(y)$
- $\mathrm{tip}(x) \nmid_l b$
- $\mathrm{tip}(y) \nmid_r a$



Potom definujeme *prekryv*

$$\mathrm{o}(x, y, a, b) = (1/\,\mathrm{ctip}(x))xa - (1/\,\mathrm{ctip}(y))by$$

Nasledujúca vlastnosť sa používa pri hľadaní Gröbnerovej báze. Množinu generátorov budeme upravovať pokiaľ nebude platiť pre všetky x, y z výstupnej množiny $\mathrm{o}(x, y, a, b) = (1/\,\mathrm{ctip}(x))xa - (1/\,\mathrm{ctip}(y))by \Rightarrow_G 0$. Veta dokazuje ekvivalentnú podmienku na obojstranú Gröbnerovu bázu.

Veta 50 (Theorem 2.3, [3])**.** *Nech* KQ *je algebra ciest,* B *sú všetky cesty tulca* Q *a* $(B, >)$ *je usporiadaná báza. Predpokladajme, že* $G \subseteq \mathrm{KQ}$ *je uniformná a tip-redukovaná.*

Potom G *je Gröbnerova báza pre obojstranný ideál* ${}_{\mathrm{KQ}}\langle G\rangle_{\mathrm{KQ}}$ *práve vtedy, keď pre každé* g_1, $g_2 \in G$

$$\mathrm{o}(g_1, g_2, a, b) \Rightarrow_G 0.$$

Dôkaz. Predpokladajme, že pre nejaký prekryv $\mathrm{o}(g_1, g_2, a, b) \Rightarrow_G z \neq 0$. Z definície Algoritmu 45 máme $\mathrm{tip}(g) \nmid \mathrm{tip}(z)$ pre každé $g \in G$. A teda G nie je Gröbnerovou bázou.

Nech je pre každú dvojicu g_1, $g_2 \in G$ splnená podmienka $\mathrm{o}(g_1, g_2, a, b) \Rightarrow_G 0$. Označme obojstranný ideál $I = {}_{\mathrm{KQ}}\langle G\rangle_{\mathrm{KQ}}$. Dokážeme rovnosť ${}_{\mathrm{KQ}}\langle \mathrm{Tip}(G)\rangle_{\mathrm{KQ}} = {}_{\mathrm{KQ}}\langle \mathrm{Tip}(I)\rangle_{\mathrm{KQ}}$ teda, že G je Gröbnerova báza. Pre spor predpokladajme, že $x \in I$ a zároveň $\mathrm{tip}(g)$ nedelí $\mathrm{tip}(x)$, kde $g \in G$.

BÚNO x je uniformný, a pretože G generuje I, môžeme x vyjadriť v tvare $\sum_{i,j} \alpha_{i,j} p_{i,j} g_i q_{i,j}$, kde $p_{i,j}$, $q_{i,j}$ sú cesty, $g_i \in G$ a $\alpha_{i,j} \in K$. Poznamenajme, že toto vyjadrenie nie je jednoznačné. Nech $g_i = \sum_l \beta_{l,i} b_{l,i}$, kde $b_{l,i}$ sú rôzne cesty a $\beta_{l,i} \neq 0 \in K$. Máme

$$\sum_{i,j} \alpha_{i,j} p_{i,j} g_i q_{i,j} = \sum_{i,j,l} \alpha_{i,j} \beta_{l,i} p_{i,j} b_{l,i} q_{i,j}. \tag{1.1}$$

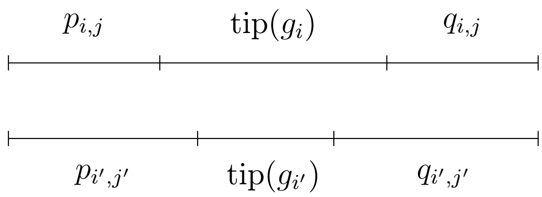
Označme p najväčšiu cestu vzhľadom k $>$ medzi cestami $p_{i,j} b_{l,i} q_{i,j}$. Uvažujme všetky možné vyjadrenia (1.1). Pre každé toto vyjadrenie máme definovanú cestu p. Vyberme vyjadrenie také, ktoré zo všetkých vyjadrení má najmenšie p vzhľadom k $>$. Týchto vyjadrení môže existovať viac, a preto zvolme nejaké, ktoré má najmenší počet výskytov p vo vyjadrení.

Žiadne $\mathrm{tip}(g)$ nedelí $\mathrm{tip}(x)$, potom nutne $\mathrm{tip}(x) < \mathrm{tip}(g)$. To spolu s uniformitou množiny G implikuje nutne existenciu rovnosti

$$p = p_{i,j}\,\mathrm{tip}(g_i)q_{i,j} = p_{i',j'}\,\mathrm{tip}(g_{i'})q_{i',j'}.$$

Predpokladajme, že dĺžka$(p_{i,j}) <$ dĺžka$(p_{i',j'})$.

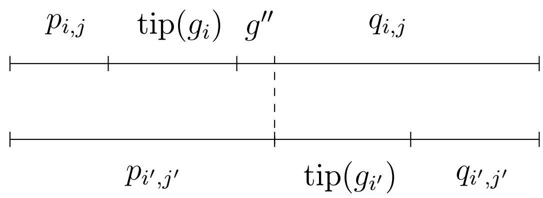
Ak dĺžka$(q_{i,j}) <$ dĺžka$(q_{i',j'})$, potom ako naznačuje obrázok $\mathrm{tip}(g_{i'})$ delí $\mathrm{tip}(g_i)$ a to je spor, pretože G je tip-redukovaná.



Ak dĺžka$(q_{i,j}) \geq$ dĺžka$(q_{i',j'})$, uvažujme dva podprípady:

- ak dĺžka$(p_{i',j'}) \geq$ dĺžka$(p_{i,j}\,\mathrm{tip}(g_i))$, potom existuje cesta g'' taká, že

$$p = p_{i,j}\,\mathrm{tip}(g_i)g''\,\mathrm{tip}(g_{i'})q_{i',j'}.$$



Nech $g_i = \gamma\,\mathrm{tip}(g_i) + \sum_s \gamma_s p_s$ a $g_{i'} = \delta\,\mathrm{tip}(g_{i'}) + \sum_t \delta_t p_t$, kde p_s, $\mathrm{tip}(g_i)$ sú podvoch rôzne cesty, p_t, $\mathrm{tip}(g_{i'})$ sú podvoch rôzne cesty a γ_s, γ, δ_t, $\delta \in K$. Potom

$$g_{i'} - \delta\,\mathrm{tip}(g_{i'}) = \sum_t \delta_t p_t \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} p_{i,j}g_iq_{i,j} &= p_{i,j}g_ig''\,\mathrm{tip}(g_{i'})q_{i',j'} = \\ &= p_{i,j}g_ig''(1/\delta)g_{i'}q_{i',j'} - p_{i,j}g_ig''(1/\delta)(g_{i'} - \delta\,\mathrm{tip}(g_{i'}))q_{i',j'} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Do prvého sumandu za g_i dosadíme $\gamma\,\mathrm{tip}(g_i) + \sum_s \gamma_s p_s$ a na druhý sumand použijeme rovnosť (1.2)

$$\begin{aligned} &= (\gamma/\delta)p_{i,j}\,\mathrm{tip}(g_i)g''\boldsymbol{g_{i'}}q_{i',j'} + \\ &\quad + \sum_s(\gamma_s/\delta)p_{i,j}p_sg''\boldsymbol{g_{i'}}q_{i',j'} - \sum_t(\delta_t/\delta)p_{i,j}\boldsymbol{g_i}g''p_tq_{i',j'} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Na miesto $p_{i,j}g_iq_{i,j}$ napíšeme vyjadrenie, ktoré sme odvodili vyššie. Dostali sme spor s volbou p, pretože

$$\mathrm{tip}(p_{i,j}p_sg''\boldsymbol{g_{i'}}q_{i',j'}) < \mathrm{tip}(p),$$

$$\mathrm{tip}(p_{i,j}\boldsymbol{g_i}g''p_tq_{i',j'}) < \mathrm{tip}(p)$$

a

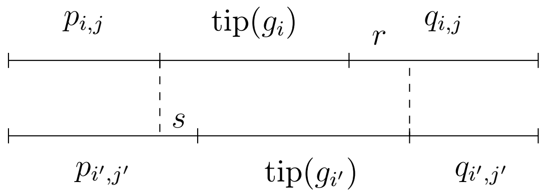
$$p_{i,j}\,\mathrm{tip}(g_i)g''\boldsymbol{g_{i'}}q_{i',j'} = p_{i',j'}g_{i'}q_{i',j'},$$

a teda toto vyjadrenie má menší počet výskytov p a p je stále vo vyjadrení najväčšie vzhľadom na $>$.

- dĺžka$(p_{i',j'}) <$ dĺžka$(p_{i,j}\operatorname{tip}(g_i))$. Uvažujme

  $$o(g_i, g_{i'}, s, r) = 1/\operatorname{ctip}(g_i) g_i r - 1/\operatorname{ctip}(g_{i'}) s g_{i'}$$

  prekryv g a g', kde $\operatorname{tip}(g_i) r = s \operatorname{tip}(g_{i'})$ a r, s sú cesty.

  Máme

  $$p = p_{i,j}\operatorname{tip}(g_i) r q_{i',j'} = p_{i,j} s \operatorname{tip}(g_{i'}) q_{i',j'}$$
  $$q_{i,j} = r q_{i',j'}$$
  $$p_{i,j} s = p_{i',j'}.$$

  Potom

  $$\begin{aligned} p_{i,j} g_i q_{i,j} &= p_{i,j} g_i r q_{i',j'} - \frac{\operatorname{ctip}(g_i)}{\operatorname{ctip}(g_{i'})} p_{i,j} s g_{i'} q_{i',j'} + \frac{\operatorname{ctip}(g_i)}{\operatorname{ctip}(g_{i'})} p_{i',j'} g_{i'} q_{i',j'} = \\ &= \operatorname{ctip}(g_i) p_{i,j} \left(\frac{1}{\operatorname{ctip}(g_i)} g_i r - \frac{1}{\operatorname{ctip}(g_{i'})} s g_{i'} \right) q_{i',j'} + \frac{\operatorname{ctip}(g_i)}{\operatorname{ctip}(g_{i'})} p_{i',j'} g_{i'} q_{i',j'} = \\ &= \operatorname{ctip}(g_i) p_{i,j}\, o(g_i, g_{i'}, s, r) q_{i',j'} + \frac{\operatorname{ctip}(g_i)}{\operatorname{ctip}(g_{i'})} p_{i',j'} g_{i'} q_{i',j'}. \end{aligned}$$

  Z predpokladu vety $o(g_i, g_{i'}, s, r) \Rightarrow_G 0$. To znamená, že prekryv sa dá zapísať ako K-lineárna kombinácia ciest v tvare xgy, kde $g \in G$ a x, y sú cesty. Naviac platí, že $\operatorname{tip}(xgy) < \operatorname{tip}(g_i) r = s \operatorname{tip}(g_{i'})$, to plynie z Algoritmu45. Nahradíme $p_{i,j} g_i q_{i,j}$ za vyšie odvodenú rovnosť a koeficient $\alpha_{i,j}$ nahradíme za $\alpha_{i,j} + \frac{\operatorname{ctip}(g_i)}{\operatorname{ctip}(g_{i'})}$. Dostaneme nové vyjadrenie, ktoré má menší výskyt ciest p a p je stálen najväčšia vzhľadom k $>$, a to je spor s predpokladom.

Ak dĺžka$(p_{i,j}) =$ dĺžka$(p_{i',j'})$, potom nutne $\operatorname{tip}(g_i)$ delí $\operatorname{tip}(g_{i'})$ alebo naopak a to je spor s tip-redukovanosťou G. Ak dĺžka$(p_{i,j}) >$ dĺžka$(p_{i',j'})$, potom postupujeme analogicky ako v provom prípade, len čiarkované vymeníme za bezčiarkované. □

Nasledujúci algoritmus dostane na vstupe generátory obojstraného ideálu $I \subseteq KQ$ a vrátí Gröbnerovu bázu. Myšlienka vychýdza z predchádzajúcej Vety 50, ak sa najde prekryv, ktorý nemá nulový zvyšok po delení množinou, tak sa pridá do množiny. Tento proces sa opakuje, kým všetky prekryvy po delení nemajú nulový zvyšok.

Poznamenajme, že pojem algoritmus nie je správny, pretože nemáme zaručené, že postup skončí po konečnom počte krokov. V prípade, že ideál I je prípustný algoritmus je konečný [3].

Algoritmus 51. *Hľadanie Gröbnerovej báze*

1: **vstup:** $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ uniformná a tip-redukovaná, generuje ideál I
2: **výstup:** Gröbnerova báza G ideálu I

$i = n$

for $x \neq y \in G$ **do**

  for $\mathrm{o}(x, y, a, b)$, kde a, $b \in B$ **do** (sú to cesty v Q)

    if $\mathrm{o}(x, y, a, b) \Rightarrow r \quad \& \quad r \neq 0$ **then**

      $i = i + 1$

      $g_i = r$

      $G = G \cup \{g_i\}$

Dôkaz. Dôkaz plynie z Vety 50. □

Pre prácu s prvkami faktorovej algebry $\mathrm{KQ}\,/I$ v počítačí používame normu $\mathrm{N}(f)$ ako reprezentanta triedy. To je zhrnuté v nasledovnom tvrdení.

Tvrdenie 52. *Nech $I \subseteq \mathrm{KQ}$ je obojstranný ideál a G je Gröbnerova báza ideálu I. Potom platí*

- $f + I = \mathrm{N}(f) + I$
- $f + I = g + I \Leftrightarrow \mathrm{N}(f) = \mathrm{N}(g)$
- $(f + I) \cdot (g + I) = \mathrm{N}(f)\,\mathrm{N}(g) + I = \mathrm{N}(\mathrm{N}(f)\,\mathrm{N}(g)) + I$

Dôkaz. Plynie priamo z Tvrdenia 43. □

Teraz definujeme pravú Gröbnerovu bázu pre obojstranný ideál v KQ.

Definícia 53. Nech $I \subseteq \mathrm{KQ}$ je ideál. Potom $G \subseteq \mathrm{KQ}$ nazveme *pravou Gröbnerovou bázou*, ak sa rovnajú pravé ideály generované tipami tj.

$$\langle \mathrm{Tip}(I) \rangle_{\mathrm{KQ}} = \langle \mathrm{Tip}(G) \rangle_{\mathrm{KQ}}.$$

Nech p, p_1 a p_2 sú cesty z B. Ak $p = p_1 p_2$, potom hovoríme, že p_1 je *prefixom* p, ak navyše p_2 nie je vrchol z Q_0, potom hovoríme o *vlastnom prefixe.*

Tvrdenie 54 (Proposition 7.1 [4])**.** *Nech $I \subseteq \mathrm{KQ}$ je obojstranný ideál a $G \subseteq \mathrm{KQ}$ je uniformná tip-redukovaná Gröbnerova báza. Potom množina*

$$X = \{pg | p \in \mathrm{NonTip}(I), g \in G, \\ \textit{žiadny vlastný prefix prvku } \mathrm{tip}(pg) \in {}_{\mathrm{KQ}}\langle \mathrm{Tip}(I) \rangle_{\mathrm{KQ}}\}$$

je zprava tip-redukovaná zprava uniformná pravá Gröbnerova báza pre I.

Dôkaz. Množina X je zprava uniformná, pretože G je uniformná. Tip-redukovanosť plynie z časti, kde žiadny vlastný prefix prvku $\mathrm{Tip}(pg) \in {}_{\mathrm{KQ}}\langle Tip(I) \rangle_{\mathrm{KQ}}$.

Inkluzia $\langle X \rangle_{\mathrm{KQ}} \subseteq I$ je zrejmá. Stačí dokázať, že každý prvok z $x \in I$ leží v pravom ideály generovanom množinou X. Z toho plynie, že X je Gröbnerova báza.

Nech $x \in I$, $x \notin \langle X \rangle_{\mathrm{KQ}}$ a naviac $\mathrm{tip}(x)$ je čo najmenšie. Napišme si $\mathrm{tip}(x) = p\,\mathrm{tip}(g)q$, kde $g \in G$ a p, q sú cesty, existencia plynie z toho, že G je Gröbnerova báza. Naviac nech máme vyjadrenie také, kde p má čo najkratšiu dĺžku. Potom žiaden vlastný prefix cesty $p\,\mathrm{tip}(g)$ neleží v ${}_{\mathrm{KQ}}\langle \mathrm{Tip}(I) \rangle_{\mathrm{KQ}}$. Ak by ležalo vzali by sme iné $g \in G$. Vidíme, že $pg \in X$.

Z $pg \in X$ plynie, že $\alpha pgq \in \langle X \rangle_{\mathrm{KQ}}$, kde $\alpha \in K$. Prvok $x - \mathrm{ctip}(x)/\,\mathrm{ctip}(g)pgq$ má menší tip ako $\mathrm{tip}(x)$, preto z minimality $\mathrm{tip}(x)$ máme $x - \mathrm{ctip}(x)/\,\mathrm{ctip}(g)pgq \in \langle X \rangle_{\mathrm{KQ}}$. Ale to spolu s tvrdením zo začiatku odstavca znamená, že aj $x \in \langle X \rangle_{\mathrm{KQ}}$, ale to je spor s voľbou x. □

1.4 Pravá Gröbnerova báza pre KQ-moduly

V tejto sekcii M značí pravý KQ-modul. Poznamenajme, že $K \subseteq \mathrm{KQ}$, a teda M je zároveň K-vektorovým priestorom. Motivovaný predchádzajúcou kapitolou definujeme pravú Gröbnerovu bázu pre KQ-moduly a uvedieme algoritmus.

Definícia 55. Dvojicu $(B_M, \succ)$ nazveme *usporiadanou* K-bázou pre M, ak B_M je K-báza a pre každé $m \in B_M$ existuje vrchol $v \in Q_0$ taký, že $mv = m$ a $\succ$ je *zprava prípustné* usporiadanie na M:

- $\succ$ je dobré usporiadanie
- pre m_1, $m_2 \in B_M$, $b \in B$, $m_1 b \neq 0$, $m_2 b \neq 0$ platí, že
$$m_1 \succ m_2 \Rightarrow m_1 b \succ m_2 b$$
- pre $m \in B_M$, b_1, $b_2 \in B$, $mb_1 \neq 0$, $mb_2 \neq 0$ platí, že
$$b_1 \geq b_2 \Rightarrow mb_1 \succ mb_2.$$

Nasledujúca definícia obsahuje pojmy pre KQ-moduly analogické pre algebru ciest KQ z predošlej kapitoly.

Definícia 56. Nech $x = \sum_{i=1}^{r} m_i \alpha_i \in M$, kde $m_i \in B_M$ sú podvoch rôzne a $\alpha_i \in K^*$. Potom definujeme $\mathrm{tip}(x) = m_i$, kde $m_i \succ m_j$ pre $j = 1, 2, \ldots, r$ a $i \neq j$. Pre množinu $X \subseteq M$ definujeme

$$\mathrm{Tip}(X) = \{\mathrm{tip}(x) | x \in X\}$$

$$\mathrm{NonTip}(X) = B_M \setminus \mathrm{Tip}(X).$$

Nech m, $m' \in B_M$, potom povieme, že m *delí zľava* m', ak existuje $b \in B_M$ také, že $m' = mb$. Zapisujeme $m \mid_l m'$.

Nech $N \subseteq M$ je pravý KQ-podmodul. Množinu $G \subseteq N$ nazveme *zprava Gröbnerovou bázou* pre N vzhľadom k $\succ$, ak množiny $\mathrm{Tip}(G)$ a $\mathrm{Tip}(N)$ generujú rovnaké pravé KQ-moduly

$$\langle \mathrm{Tip}(G) \rangle_{\mathrm{KQ}} = \langle \mathrm{Tip}(N) \rangle_{\mathrm{KQ}}.$$

Množinu $H \subseteq M$ nazveme *zprava tip-redukovanou*, ak pre každé $g \neq g' \in H$ platí, že ak $\mathrm{Tip}(g)$ zľava delí $\mathrm{Tip}(g')$, potom $g = g'$.

Definícia 57. *Pre pravý* KQ*-modul* $v\,\mathrm{KQ}$*, kde* $v \in Q_0$*, definujeme usporiadanú* K*-bázu* $(B_v, >_v)$*. Položíme* $B_v = vB = \{vb \mid b \in B\}$*, kde* B *množina všetkých ciest v* Q*, a teda je to usporiadaná báza* KQ.

Pre $P = \oplus_{i \in I} v_i \mathrm{KQ}$ *definujeme usporiadanú* K*-bázu*

$$B_P = \bigcup_{i \in I} \{(0, \ldots, x_i, \ldots, 0) \mid x_i \in v_i B\} \setminus \{0\}.$$

Na B_P *definujeme zprava prípustné usporiadanie* $\succ$ *nasledovne. Najprv zvolíme dobré usporiadanie* $>_I$ *na* I*.*

Nech $a = (0, \ldots, x_i, \ldots, 0)$ *a* $b = (0, \ldots, x_j, \ldots, 0) \in B_P$*, kde* i*,* $j \in I$*. Potom* $a \succ b$*, ak* $i > j$ *alebo ak* $i = j$ *a* $x_i >_{v_i} x_j$*, kde* $x_i \in v_i\,\mathrm{KQ}$.

Lema 58. *Nech $x \in \mathrm{KQ}\setminus\{0\}$ a $v \in Q_0$ sú také, že $xv = x$. Ak $r \in \mathrm{KQ}\setminus\{0\}$ má vlastnosťou $vr = r$, potom*

$$\mathrm{tip}(xr) = \mathrm{tip}(x)\,\mathrm{tip}(r).$$

Dôkaz. Máme $\mathrm{tip}(x) = \mathrm{tip}(x)v$ a $\mathrm{tip}(r) = v\,\mathrm{tip}(r)$. To znamená, že násobok ciest $\mathrm{tip}(x)\,\mathrm{tip}(r)$ je nenulová cesta. Nech $x = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$ je jednoznačné vyjadrenie voči bázy B množine všetkých ciest z Q. Potom $\mathrm{tip}(x) = b_i$ pre nejaké $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a $\mathrm{tip}(x) > b_j$ pre $j \neq i$. Z pripustného usporiadanie $>$ plynie, že $\mathrm{tip}(x)\,\mathrm{tip}(r) > b_j\,\mathrm{tip}(r)$ pre každé $j \neq i$. Teda $\mathrm{tip}(xr) = \mathrm{tip}(x)\,\mathrm{tip}(r)$. ☐

Veta 59 (Theorem 5.2 [4])**.** *Nech $P = \oplus_{i\in I} v_i\,\mathrm{KQ}$ je KQ-modul, kde $v_i \in Q_0$, a nech množina $G \subseteq P$ je zprava tip-redukovaná a zprava uniformná. Potom*

$$\langle G\rangle_{\mathrm{KQ}} = \oplus_{g\in G}\, g\,\mathrm{KQ}\,.$$

Dôkaz. Zrejme $\langle G\rangle_{\mathrm{KQ}} = \sum_{g\in G} g\,\mathrm{KQ}$. Nech $x' = \sum_{g\in G} gr_g = 0$, potom ukážeme, že $gr_g = 0$ pre každé $g \in G$. Pre spor predpokladajme, že aspoň jedno $gr_g \neq 0$ a nech $v \in Q_0$ je také, že $r_g v \neq 0$. Z predchádzajúceho plynie, že $x'v = 0$

$$x'v = \sum_{g\in G} gr_g v \neq 0.$$

Z uniformity každého prvku $g \in G$ plynie existencia vrcholu v_g takého, že $gv_g = g$. Máme $gr_g = gv_g r_g$, a teda BÚNO bude predpokladať, že $r_g = v_g r_g$ pre každé $g \in G$. Z predchádzajúcej Lemy 58 plynie, že pre každé $g \in G$ je $\mathrm{tip}(gr_g) = \mathrm{tip}(g)\,\mathrm{tip}(r_g)$.

Množina $\{gr_g \neq 0 | g \in G\}$ je konečná a neprázdna, preto existuje

$$t := \max_{>}\{\mathrm{tip}(gr_g) | gr_g \neq 0 \text{ pre } g \in G\}.$$

Pripomeňme, že $(B_P, \succ)$ značí usporiadanú bázu KQ-modulu P viď Definícia 57. Z definícii B_P a tip() plynie, že $t \in \oplus_{i\in I} v_i R$ má všetky komponenty nulové okrem jednej, ktorú označme $i_0 \in I$ a označme príslušnú cestu $p_0 = \mathrm{tippath}(g_0 r_{g_0})$. Označme $g_0 r_{g_0}$ associované s t.

Pretože $\sum_{g\in G} gr_g v = 0$, musí existovať nejaké $h \in G$ rôzne od g také, že $\mathrm{tip}(hg_h)$ má v i_0-tej komponente cestu p_0. Z maximality t plynie, že $\mathrm{tip}(hr_h) = \mathrm{tip}(g_0 r_{g_0})$. Podľa Lemy 58 platí, že

$$\mathrm{tip}(h)\,\mathrm{tip}(r_h) = \mathrm{tip}(hr_h) = \mathrm{tip}(g_0 r_{g_0}) = \mathrm{tip}(g_0)\,\mathrm{tip}(r_{g_0}).$$

Vidíme, že buď $\mathrm{tip}(h)$ delí zprava $\mathrm{tip}(g_0)$ alebo naopak. To je spor s tým, že G je zprava tip-redukovaná. ☐

Z Lemy 18 vidíme, že modul $\langle G\rangle_{\mathrm{KQ}}$ vo Vete 59 je projektívny.

Tvrdenie 60 (Theorem 6.1 [4])**.** *Nech $G \subseteq P = \oplus_{i\in I} v_i\,\mathrm{KQ}$, kde $v_i \in Q_0$. Predpokladajme, že G je uniformná tip-redukovaná množina. Potom G je pravá Gröbnerova báza pre $\langle G\rangle_{\mathrm{KQ}}$ vzhľadom $k \succ$. Tj.*

$$\langle \mathrm{Tip}(G)\rangle_{\mathrm{KQ}} = \langle \mathrm{Tip}(\langle G\rangle_{\mathrm{KQ}})\rangle_{\mathrm{KQ}}.$$

Dôkaz. Keďže inklúzia $\langle \mathrm{Tip}(G)\rangle_{\mathrm{KQ}} \subseteq \langle \mathrm{Tip}(\langle G\rangle_{\mathrm{KQ}})\rangle_{KQ}$ je zrejmá, stačí dokázať opačnú. Podľa predchádzajúcej Vety 59 je $\langle G\rangle_R = \oplus_{g\in G} gR$. Nech $x \in \oplus_{g\in G} gR$ je tvaru $x = \sum_{g\in G} gr_g$, kde $r_g \in \mathrm{KQ}$. Prvky g sú zprava uniformné, a teda existuje vrchol v_g taký, že $gv_g = g$. Z tohto dôvodu môžeme vybrať prvky r_g tak, aby platilo $v_g r_g = r_g$ (tj. zľava uniformita). Uvažujme $\mathrm{tip}(x)$. Z Lemy 58 plynie, že $\mathrm{tip}(gr_g) = \mathrm{tip}(g)\,\mathrm{tip}(r_g)$.

Z tip-redukovanosti množiny G plynie, že $\mathrm{tip}(x) = \mathrm{tip}(gr_g) = \mathrm{tip}(g)\,\mathrm{tip}(r_g)$ pre nejaké $g \in G$. To ukážeme v nasledujúcom odstavci. Teda $\mathrm{tip}(x) \in \langle \mathrm{Tip}(G)\rangle_{\mathrm{KQ}}$.

Predpokladajme, že $\mathrm{tip}(x) \neq \mathrm{tip}(gr_g)$ pre $g \in G$ a označme $u \in G$, pre ktoré je $\mathrm{tip}(ur_u)$ najväčšie. Potom nutne existuje $v \in G \setminus \{u\}$ také, že

$$\mathrm{tip}(v)\,\mathrm{tip}(r_u) = \mathrm{tip}(vr_u) = \mathrm{tip}(ur_u) = \mathrm{tip}(u)\,\mathrm{tip}(r_u).$$

Vidíme, že $\mathrm{tip}(v)|_l\,\mathrm{tip}(u)$ alebo $\mathrm{tip}(u)|_l\,\mathrm{tip}(v)$ a to je spor, pretože G je tip-redukovaná. □

Podobne ako v Tvrdení 43, platí tvrdenie aj pre KQ-moduly, preto ho uvedieme bez dôkazu.

Tvrdenie 61. *Nech $M = \oplus_{i\in I} v_i\,\mathrm{KQ}$ je KQ-modul a $N \subseteq M$ je podmodul. Potom pre vektorové priestorý platí, že*

$$M = N \oplus \langle \mathrm{NonTip}(N)\rangle_K.$$

Dôkaz. Odkážeme len na dôkaz Tvrdenia 43, keďže je dôkaz analogický. □

Definícia 62. *Nech M je KQ-modul, $N \subseteq M$ je podmodul a*

$$M = N \oplus \langle \mathrm{NonTip}(N)\rangle_K.$$

Potom pre $x \in M$ definujeme normu $\mathrm{N}(x)$ tak, že $x = n + \mathrm{N}(x)$, kde $n \in N$ a $\mathrm{N}(x) \in \langle \mathrm{NonTip}(N)\rangle_K$.

Odpoveď na otázku ako nájsť normu prvku je Algoritmus 45. Algoritmus pre KQ-moduly je analogický, preto ho vynecháme. Ako nájsť tip-redukovanú pravú Gröbnerovu bázu pre KQ-moduly popisuje nasledovný algoritmus. Zdroj viď [4].

Algoritmus 63. Nech G je KQ-podmodsul $P := \oplus_{i\in I} v_i\,\mathrm{KQ}$, kde $v_i \in Q_0$.
Vstup: $\{g_1, g_2, \dots, g_m\} \subseteq P$ množina, ktorá generuje G
Výstup: X … zprava uniformná zprava tip-redukovaná Gröbnerova báza G

$X \leftarrow \{g_i v \;:\; v \in Q_0,\; i = 1, 2, \dots, m\} \setminus \{0\}$,
pozn. teraz X obsahuje uniformné prvky
repeat
  $X \leftarrow X \setminus \{0\}$, $n \leftarrow |X|$
  $T_G = \{\mathrm{tip}(g) \;:\; g \in G,\; \forall g' \in G \setminus \{g\} \Rightarrow \mathrm{tip}(g') \nmid_l \mathrm{tip}(g)\}$
  pre každé $t \in T_G$ nájdi $g_i \in G$ také, že $\mathrm{tip}(g_i) = t$
  tieto najdené g preznačíme ako g_1, g_2, …, g_s
  zvyšné označíme g_{s+1}, g_{s+1}, …, g_n
  if $s = n$ **then**
    koniec algoritmu
  else prípad $s < n$

12: **for** $i \in \{s, s+1, \dots, n\}$
13: $g_i = q_i + \mathrm{N}(g_i)$, kde
14: $q_i \in Q = \langle g_1, g_2, \dots, g_s \rangle_{\mathrm{KQ}}$
15: $P = Q \oplus \langle \mathrm{NonTip}(Q) \rangle_K$
16: $P \leftarrow \{g_1,\, g_2,\, \dots,\, g_s,\, \mathrm{N}(g_{s+1}),\, \mathrm{N}(g_{s+2}),\, \dots,\, \mathrm{N}(g_n)\}$
17: **until** $s = n$
18: **return** X

Krok 3 zaručí, že v množine X sú zprava uniformné prvky, zrejme takto definovaná množina generuje ten istý pravý modul ako pred tým než všetky prenásobime vrcholmi zprava. Správnosť algoritmu nahliadneme tak, že postupne vyberieme z množiny prvky, ktorého tip žiaden iný prvok nedelí. Zvyšné prvky tip redukujeme pomocou týchto vybraných prvkov. Konečnosť plynie z definície usporiadanej báze.

Značenie $x\mathrm{div}_{\mathrm{tip}}y$ v nasledujúcom algoritme používama v dvoch významoch. V podmienke **if** zápis $x\mathrm{div}_{\mathrm{tip}}y$ značí hodnotu *true*, ak $\mathrm{tip}(y) \mid_l \mathrm{tip}(x)$, v inom prípade *false*.

Na ďalšom riadku zápis $x\mathrm{div}_{\mathrm{tip}}y$ značí cestu p takú, že $\mathrm{tip}(x) = \mathrm{tip}(y)p$. Algoritmus využijeme neskôr pri hľadaní minimálnej projektívne rezolventy. Poznamenajme, že program QPA obsahuje implementáciu predchádzajúceho algoritmy tak aj nasledovného.

Algoritmus 64. Nech f_1, $f_2, \dots, f_m$ sú zprava uniformné a zprava tip-redukované a $v \in \oplus_{i=1}^m f_i\,\mathrm{KQ}$. Chceme $r_i \in \mathrm{KQ}$ také, že $v = \sum_{i=1}^m f_i r_i$.
Vstup: f_1, $f_2, \dots, f_m$ sú zprava uniformné a zprava tip-redukované, $v \in \oplus_{i=1}^m f_i\,\mathrm{KQ}$
Výstup: $r_i \in \mathrm{KQ}$ také, že $v = \sum_{i=1}^m f_i r_i$

$r_1 = 0$, $r_2 = 0, \dots, r_m = 0$
$tmp := v$
while $tmp \neq 0$ **do**
  for $i = 1, 2, \dots, m$ **do**
    if $tmp \neq 0$ AND $tmp\ \mathrm{div}_{\mathrm{tip}}\ f_i$ **then**
      $r_i := r_i + \mathrm{ctip}(tmp)/\,\mathrm{ctip}(f_i) \cdot (tmp\ \mathrm{div}_{\mathrm{tip}}\ f_i)$
      $tmp := tmp - \mathrm{ctip}(tmp)/\,\mathrm{ctip}(f_i) \cdot f_i \cdot (tmp\ \mathrm{div}_{\mathrm{tip}}\ f_i)$
return r_1, r_2, …, r_m

Dôkaz. Dôkaz správnosti a konečnosti vyššie popísaného algoritmusu plynie z toho, že prvky $\{f_i\}_{i=1}^m$ sú zprava uniformní, zprava tip-redukované a generujú direktnú sumu $\oplus_{i=1}^m f_i\,\mathrm{KQ}$. □

2. Konštrukcia projektívnej rezolventy

Nech Q je tulec, KQ značí algebru ciest a $I \subseteq \mathrm{KQ}$ je prípustný ideál, potom $\Lambda := \mathrm{KQ}\,/I$ je konečne dimenzionála K-algebra. Označme M nejaký Λ-modul, ktorý je konečne dimenzionálny. V celej kapitole predpokladáme, že pracujeme len s konečne dimenzionálnymi modulmi.

Projektívnu rezolventu pre $\mathrm{KQ}\,/I$-modul M budeme hľadať v nasledujúcom tvare

$$\cdots \xrightarrow{\delta^3} \oplus_{i\in T_2} f_i^2\,\mathrm{KQ}\,/\,\oplus_{i\in T_2} f_i^2 I \xrightarrow{\delta^2} \oplus_{i\in T_1} f_i^1\,\mathrm{KQ}\,/\,\oplus_{i\in T_1} f_i^1 I \xrightarrow{\delta^1}$$
$$\xrightarrow{\delta^1} \oplus_{i\in T_0} f_i^0\,\mathrm{KQ}\,/\,\oplus_{i\in T_0} f_i^0 I \xrightarrow{\delta^0} M \to 0,$$

kde $\{f_i^j\}_{i\in T_j}$ sú zprava uniformné, tip-redukované a δ^i sú inklúzie. Pre $n=0$ prvky $f_i^n \in \mathrm{KQ}$ sú vrcholy, potom $\oplus_{i\in T_0} f_i^0\,\mathrm{KQ}$ berieme ako vonkajšiu direktnú sumu. Pre $n \geq 1$ prvky $f_i^n \in \oplus_{i\in T_0} f_i^0\,\mathrm{KQ}$ berieme vnútornú direktnú sumu

$$\oplus_{i\in T_n} f_i^n\,\mathrm{KQ} \subseteq \oplus_{i\in T_0} f_i^0\,\mathrm{KQ}\,.$$

Najprv dokážeme, že projektívna rezolventa, dokonca minimálna, vždy existuje.

Prvky množiny $\{f_i^0\}_{i\in T_0}$ zvolíme tak, že nájdeme $p : \oplus_{i\in T_0} f_i^0\,\mathrm{KQ} \to M$ projektívne pokrytie pre M. Potom nájdeme $\{f_i^1\}_{i\in T_1}$ tak, že vyjadríme jadro ako direktnú sumu $\mathrm{Ker}(p) = \oplus_{i\in T_1} f_i^1\,\mathrm{KQ}$.

Pre $n \geq 2$ nájdeme najprv f_i^{n*} také, že

$$(\oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1}\,\mathrm{KQ}) \cap (\oplus_{i\in T_{n-2}} f_i^{n-2} I) = \oplus_{i\in I_n} f_i^{n*}\,\mathrm{KQ}$$

Potom množinu $\{f_i^{n*}\}_{i\in I_n}$ rozdelíme na dve disjunktné množiny $\{f_i^n\}_{i\in T_n}$ a $\{f_i^{n'}\}_{i\in U_n}$. Tým získame požadované f_i^n.

Označme Ω^1_Λ jadro $\mathrm{Ker}(p)$. Pre $n \geq 2$ dokážeme, že $\{f_i^n\}_{i\in T_n}$, $\{f_i^{n'}\}_{i\in U_n} \subseteq \oplus_{i\in T_0} f_i^0\,\mathrm{KQ}$ sú také, že

$$0 \to (\oplus_{i\in T_n} f_i^n\,\mathrm{KQ}) \oplus (\oplus_{i\in U_n} f_i^{n'}\,\mathrm{KQ}) \to \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1}\,\mathrm{KQ} \to \Omega^{n-1}_\Lambda(M) \to 0$$

je exaktná postupnosť, kde KQ-modulom $\Omega^{n-1}_\Lambda(M)$ rozumieme jadro homomorfizmu

$$\oplus_{i\in T_{n-2}} f_i^{n-2}\,\mathrm{KQ}\,/\,\oplus_{i\in T_{n-2}} f_i^{n-2} I \to \Omega^{n-2}_\Lambda(M).$$

Prvky označené čiarkami sú také, že $f_i^{n'} \in \oplus_{j\in T_n} f_j^{n-1} I$ a naopak bez čiarky $f_i^n \notin \oplus_{j\in T_n} f_j^{n-1} I$.

Nakoniec dokážeme, že takto skonštruované moduly tvoria projektívnu rezolventu.

2.1 Projektívne pokrytie

Lema 65 (Lemma I.3.7 e) [1]). *Nech N je Λ-modul a L a M sú podmoduly N. Ak $L \subseteq \mathrm{rad}(N)$ a $L + M = N$, potom $M = N$. Špeciálne $\mathrm{rad}(N)$ je nadbytočný.*

Dôkaz. Predpokladajme pre spor, že $M \neq N$. Modul N je konečne dimenzionálny a obsahuje M, preto existuje maximálny modul $X \subsetneq N$, ktorý obsahuje M. Potom platí, že $L \subseteq \mathrm{rad}(N) \subseteq X$. Dostali sme spor, pretože $N = L + M \subseteq X + M = X$ a zároveň $X \subsetneq N$. ☐

Lema 66. *Nech máme exaktnú postupnosť Λ-modulov*

$$0 \to K \to P \xrightarrow{p} X \to 0.$$

Naviac nech P je konečne dimenzionálny projektívny modul. Potom p je projektívne pokrytie, práve vtedy keď $K \subseteq \mathrm{rad}(P)$.

Dôkaz. Nech p je projektívne pokrytie, potom $K = \mathrm{Ker}(p)$ je nadbytočný v P. Pre spor predpokladajme, že existuje maximálny modul $V \subseteq P$, ktorý neobsahuje K. Potom $K + V = P$ a z nadbytočnosti K plynie, že $V = P$. To je ale spor s maximalitou V. Teda K je v každom maximálnou podmodule P, a teda $K \subseteq \mathrm{rad}(P)$.

Opačná implikácia plynie z predchádzajúcej Lemy 65. ☐

Tvrdenie 67. *Nech $I \subseteq \mathrm{KQ}$ je prípustný ideál, P_1, P_0 a M sú Λ-moduly. Nech P_0 a P_1 sú projektívne, konečne generované a máme exaktnú postupnosť*

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0.$$

Potom p_0 je projektívne pokrytie práve vtedy, keď $\mathrm{Im}(p_1) \subseteq \mathrm{rad}(P_0) = P_0(J/I)$, kde $J \subseteq \mathrm{KQ}$ je šípkový ideál.

Dôkaz. Podľa Tvrdenia 29 a Tvrdenia 25 máme $\mathrm{rad}(P_0) = P_0 \,\mathrm{rad}(\Lambda) = P_0(J/I)$. Z exaktnosti postupnosti máme $\mathrm{Im}(p_1) = \mathrm{Ker}(p_0)$. Z predchádzajúcej Lemy 66 plynie ekvivaletná podmienka $\mathrm{Im}(p_1) \subseteq P_0(J/I)$. ☐

Lema 68 (Nakayma Lemma I.2.2 [1])**.** *Nech A je K-algebra, M je konečne generovaný pravý A-modul a $I \subseteq \mathrm{rad}(A)$ je obojstranný ideál. Potom $MI = M$ implikuje $M = 0$.*

Dôkaz. Lema dokážeme indukciou podľa počtu generátorov $m_1, m_2, \ldots, m_n$ modulu M.

Nech $n = 1$, potom pre nejaké m_1 platí, že $m_1 I = m_1 A$. Nech $x \in I \subseteq \mathrm{rad}(A)$ je také, že $m_1 = m_1 x$. Z Lemy 20 plynie, že existuje inverz y k $(1 - x)$ tj. $(1 - x)y = 1$. Potom $m_1 = m_1(1 - x)y = (m_1 - m_1 x)y = 0$.

Nech $n > 1$. Z rovnosti $M = MI$ plynie existencia $x_1, x_2, \ldots, m_n$ takých, že $m_1 = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$. Úpravou dostaneme $m_1(1 - x_1) = \sum_{i=2}^{n} m_i x_i$. Z Lemy 20 plynie existencia pravého inverzu y k prvku $(1 - x_1)$. Prenásobením sprava y dostaneme $m_1 = \sum_{i=2}^{n} m_i x_i y$, a teda M je generované $n-1$ prvkami. Z indukčného predpokladu plynie správnosť lemy. ☐

Tvrdenie 69 (Theorem I.5.8 [1], zdrojový kód projpathalgmodule.gi z QPA)**.** *Nech* KQ *je algebra ciest a $I \subseteq \mathrm{KQ}$ je prípustný ideál. Potom pre každý konečne generovaný Λ-modul M existuje projektívne pokrytie*

$$P(M) \xrightarrow{h} M \to 0.$$

Dôkaz. Z Dôsledku 39 máme, že

$$\operatorname{top}(M) \cong \oplus_{a\in Q_0} S(a)^{s_a}.$$

Reprezentácia $S(a)$ má len v jednom vrchole nenulový vektorový priestor, konkrétne K. Máme $dim(S(a)) = 1$, bázový vektor označme b_a. Prvky báze $\operatorname{top}(M)$ označme b_1, b_2, …, b_m.

Máme prirodzený epimorfizmus $g : M \to \operatorname{top}(M)$. Vezmime prvky $g_i \in M$ také, že $g(g_i) = b_i$ pre $i = 1, 2, \ldots, m$. Bázový vektor b_i odpovedá nejakému $b_a \in S(a)$. Naviac chceme, aby každé g_i bolo zprava uniformné tj. existuje vrchol $v_i \in Q_0$ taký, že $g_i v_i = g_i$. Vrchol v_i je práve vrchol a. Ak $g_i v_i \neq g_i$, potom za g_i vezmeme $g_i v_i$.

Označme Λ-podmodul N generovaný množinou $\{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$. Dokážeme, že $N = M$. Zobrazenie g zúžené na podmodul N je stále na. Potom $M = N + \operatorname{rad}(M)$. Z toho plynie, že

$$M/N = (N + \operatorname{rad}(M))/N = (N + M \operatorname{rad}(\Lambda))/N = (M/N) \operatorname{rad}(\Lambda).$$

Použili sme rovnosť $\operatorname{rad}(M) = M \operatorname{rad}(\Lambda)$ viď Tvrdenie 29. Podľa Nakaymovej lemy je $M/N = 0$, a teda $g_1, g_2, \ldots, g_m$ generuje M.

Máme izomorfizmus $g_i \operatorname{KQ}/g_i I \cong v_i\Lambda$, potom $\oplus_{i=1}^m g_i \operatorname{KQ}/\oplus_{i=1}^m g_i I \cong \oplus_{i=1}^m v_i(\Lambda)$.

Podľa Lemy 38 platí, že $S(a) \cong \operatorname{top}(a\Lambda)$. Za $P(M)$ zvolíme $\oplus_{i=1}^m v_i(\Lambda)$. Podľa Lemy 28 máme $\operatorname{top}(P(M)) \cong \oplus_{i=1}^m \operatorname{top}(v_i(\Lambda)) \cong \oplus_{i=1}^m S(v_i)$. Dostaneme nasledovný komutatívny diagrame

$$\begin{tikzcd} P(M) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "t"] & M \arrow[d, "g"] \\ \operatorname{top}(P(M)) \arrow[r, "\cong"] & \operatorname{top}(M) \end{tikzcd}$$

Homomorfizmus h je definovaný ako $h : v_i \mapsto g_i \in M$, a teda je na. Zrejme $\operatorname{Ker}(h) \subseteq \operatorname{Ker}(t) = \oplus_{i=1}^m \operatorname{rad}(v_i(\Lambda))$. Podľa Lemy 65 $\operatorname{rad}(P(M))$ je nadbytočný v $P(M)$, a teda $\operatorname{Ker}(h)$ je nadbytočný. □

Predchádzajúci dôkaz dáva algoritmus ako nájsť pre M zadaný ako reprezentácia projektívne pokrytie. A podľa nasledujúceho dôsledku minimálnu projektívnu rezolventu.

Dôsledok 70 (Corollary I.5.10 [1])**.** *Nech M je vyššie Λ-modul. Potom existuje minimálna projektívna rezolventa pre M.*

Dôkaz. Podľa predchadzajúceho Tvrdenia 69 existuje projketívne pokrytie $P(M) \xrightarrow{h} M \to 0$. Jadro $\operatorname{Ker} h$, je konečne generovaný modul a opäť podľa Tvrdenia 69 existuje jeho porejktívne pokrytie $P_1 \xrightarrow{r_1} \operatorname{Ker} h$. Označme inklúziu $i_1 : \operatorname{Ker} h \to P(M)$. Potom položíme $p_1 = i_1 \circ r_1$. Induktívne konštruujeme P_n a homomorfizmus $p_n : P_n \to P_{n-1}$. Kde $r_n : P_n \to \operatorname{Ker} p_{n-1}$ je projektívne pokrytie jadra. Analogicky označme vnorenie $i_n : \operatorname{Ker} p_{n-1} \hookrightarrow P_{n-1}$. Položíme $p_n := i_n \circ r_n$. Priamo z definície plynie, že sme skonštruovali minimálnu projektívnu rezolventu tvorenú homomorfizmami p_n a h

$$\begin{tikzcd}
\cdots & P_2 \arrow[rr, "p_2"] \arrow[dr, "r_2"'] & & P_1 \arrow[rr, "p_1"] \arrow[dr, "r_1"'] & & P(M) \arrow[r, "h"] & M \arrow[r] & 0 \\
{} \arrow[ur, "i_3"'] & & \mathrm{Ker}(p_1) \arrow[ur, hook, "i_2"'] & & \mathrm{Ker}(h) \arrow[ur, hook, "i_1"'] & & &
\end{tikzcd}$$

□

2.2 Konštrukcia f_i^0 a f_i^1

Začneme tým, že nájdeme minimálnu Λ-prezentáciu modulu M.

$$\oplus_{j=1}^{t_1} w_j \,\mathrm{KQ} \,/\, \oplus_{j=1}^{t_1} w_j I \xrightarrow{\pi_1} \oplus_{i=1}^{t_0} v_i \,\mathrm{KQ} \,/\, \oplus_{i=1}^{t_0} v_i I \xrightarrow{\pi_0} M \to 0, \tag{2.1}$$

kde w_i, $v_j \in Q_0$. Položíme $f_i^0 := v_i$ a nájdeme f_i^1, $f_i^{1'}$ také, že

$$0 \to (\oplus_{i \in T_1} f_i^1 \,\mathrm{KQ}) \oplus (\oplus_{i \in U_1} f_i^{1'} \,\mathrm{KQ}) \hookrightarrow \oplus_{i \in T_0} f_i^0 \,\mathrm{KQ} \xrightarrow{\pi} M \to 0 \tag{2.2}$$

je exaktná postupnosť KQ-modulov s vlasnosťmi:

- $f_i^0 \in Q_0$ (vrcholy)
- f_i^1, $f_i^{1'} \in \oplus_{i \in T_0} f_i^0 \,\mathrm{KQ}$ sú zprava uniformné
- $f_i^{1'} \in \oplus_{i \in T_0} f_i^0 I$ pre $i \in U_1$
- $f_i^1 \notin \oplus_{i \in T_0} f_i^0 I$ pre $i \in T_1$
- $\{f_i^1\}_{i \in T_1}$ je konečná zprava tip-redukovaná uniformná množina.

Lema 71. *Minimálna Λ-prezentácia* (2.1) *existuje.*

Dôkaz. Podľa Tvrdenia 69 nájdeme projektívne pokrytie Λ-modulu M

$$\pi : \oplus_{i=1}^{t_0} v_i \,\mathrm{KQ} \,/\, \oplus_{i=1}^{t_0} v_i I \to M.$$

Nech $g : \mathrm{Ker}(\pi) \to \oplus_{i=1}^{t_0} v_i \,\mathrm{KQ} \,/\, \oplus_{i=1}^{t_0} v_i I$ je homomorfizmus definovaný inklúziou. Opäť podľa Tvrdenia 69 nájdeme projektívne pokrytie pre $\mathrm{Ker}(\pi)$

$$\pi' : \oplus_{j=1}^{t_1} w_j \,\mathrm{KQ} \,/\, \oplus_{j=1}^{t_1} w_j I \to \mathrm{Ker}(\pi).$$

Položíme $\pi_1 = g \circ \pi'$. Overením Definície 11 dostaneme požadovanú minimálnu Λ-prezentáciu:

$$\begin{tikzcd}
\oplus_{j=1}^{t_1} w_j \,\mathrm{KQ} \,/\, \oplus_{j=1}^{t_1} w_j I \arrow[rr, dashed, "\pi_1 = g \circ \pi'"] \arrow[dr, "\pi'"] & & \oplus_{i=1}^{t_0} v_i \,\mathrm{KQ} \,/\, \oplus_{i=1}^{t_0} v_i I \arrow[r, "\pi"] & M \arrow[r] & 0 \\
& \mathrm{Ker}(\pi) \arrow[ur, "g"] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

□

Lema 72 (Proposition 16 [6]). *Exakatná postupnosť* (2.2)

$$0 \to (\oplus_{i\in T_1} f_i^1 \,\mathrm{KQ}) \oplus (\oplus_{i\in U_1} f_i^{1'} \,\mathrm{KQ}) \xrightarrow{H^1} \oplus_{i\in T_0} f_i^0 \,\mathrm{KQ} \xrightarrow{\pi} M \to 0$$

z úvodu kapitoly existuje.

Dôkaz. Podľa predchádzajúcej lemy máme exaktnú postupnosť

$$\oplus_{j=1}^{t_1} w_j \,\mathrm{KQ} \,/\, \oplus_{j=1}^{t_1} w_j I \xrightarrow{\pi_1} \oplus_{i=1}^{t_0} v_i \,\mathrm{KQ} \,/\, \oplus_{i=1}^{t_0} v_i I \xrightarrow{\pi_0} M \to 0$$

Položíme $f_i^0 = v_i^0$ pre $i = 1, 2, \ldots, t_0$. Prirodzene rozšírme homomorfizmus π_0 na homomorzimus $\pi : \oplus_{i=1}^{t_0} f_i^0 \,\mathrm{KQ} \to M$. Máme exaktnú postupnosť

$$0 \to \mathrm{Ker}(\pi) \to \oplus_{i=1}^{t_0} f_i^0 \,\mathrm{KQ} \xrightarrow{\pi} M \to 0.$$

Stačí nájsť $\{f_i^{1*}\}_{i=1}^d$ zprava tip-redukovanú a zprava uniformnú množinu, ktorá generuje $\mathrm{Ker}(\pi)$. Potom podľa Vety 59 platí, že $\mathrm{Ker}(\pi) \cong \oplus_{i=1}^d f_i^{1*} \,\mathrm{KQ}$. A tým bude lema dokázané.

Z exaktnosti máme $\mathrm{Im}(\pi_1) = \mathrm{Ker}(\pi_0)$, potom

$$\mathrm{Ker}(\pi) = \langle (x_1, \ldots, x_{t_0}) + y : (x_1 + I, \ldots, x_{t_0} + I) \in \mathrm{Im}(\pi_1), y \in \oplus_{i=1}^{t_0} v_i I \rangle_{\mathrm{KQ}}.$$

Pre každé $\pi_1(w_j + I) = (\bar{x}_{j,1}, \bar{x}_{j,2}, \ldots, \bar{x}_{j,t_0}) \in \oplus_{i=1}^{t_0} v_i \,\mathrm{KQ} \,/\, \oplus_{i=1}^{t_0} v_i I$, zvolme reprezentanty $x_{j,i} \in \mathrm{KQ}$ v jednotlivých komponentách tak, že $\bar{x}_{j,i} = x_{j,i} + I$ a $x_{j,i}$ sú zprava uniformné.

Pravú Gröbnerovu bázu zprava uniformných a zprava tip-redukovaných prvkov pre I označme $\mathrm{rtGB}(I)$. Potom množina generátorov pre $\oplus_{i=1}^{t_0} v_i I$ je

$$L = \bigcup_{l=1}^{t_0} \{(\ldots, 0, x_l, 0, \ldots) : x_l \in (f_l \,\mathrm{rtGB}(I))\}.$$

Množina $L \cup \{x_{j,i}\}_{j=1,i=1}^{t_1,t_0}$ je zprava uniformná, konečná a generuje $\mathrm{Ker}(\pi)$.

Túto množinu zprava tip-redukujeme tak, aby prvky zostali uniformné, dostaneme $\{f_i^*\}_{i=1}^d$. Teraz stačí vybrať z $\{f_i^*\}_{i=1}^d$ prvky $f_i^1 \notin \oplus_{i\in T_0} f_i^0 I$. Lema je dokázaná. □

2.3 Konštrukcia f_i^n pre $n \geq 2$

Začneme popisom konštrukcie pre $n = 2$, potom ukážeme ako tento postup použiť pre $n > 3$. Vskutočnosti pre $n > 3$ ide len o iteráciu konštrukcie pre $n = 2$.

Hlavným krokom je z exaktnej postupnosti KQ-modulov z prechádzajúcej kapitoly

$$0 \to (\oplus_{i\in T_1} f_i^1 \,\mathrm{KQ}) \oplus (\oplus_{i\in U_1} f_i^{1'} \,\mathrm{KQ}) \xrightarrow{H^1} (\oplus_{i\in T_0} f_i^0 \,\mathrm{KQ}) \xrightarrow{\pi} M \to 0,$$

kde $f_i^1, {f'}_i^1 \in \oplus_{i\in T_0} f_i^0 \,\mathrm{KQ}$, $f_i^1 \notin \oplus_{i\in T_0} f_i^0 I$ a $f_i^{1'} \in \oplus_{i\in T_0} f_i^0 I$ dostať exaktnú postupnosť KQ-modulov

$$0 \to (\oplus_{i\in T_2} f_i^2 \,\mathrm{KQ}) \oplus (\oplus_{i\in U_2} f_i^{2'} \,\mathrm{KQ}) \xrightarrow{H^2} \oplus_{i\in T_1} f_i^1 \,\mathrm{KQ} \to \Omega_\Lambda^1(M) \to 0$$

kde $\Omega^1_\Lambda(M) = \mathrm{Ker}(\pi_0)$, homomorfizmus π_0 je z predchádzajúcej kapitoly a $\{f_i^2\}_{i\in T_1} \notin \oplus_{i\in T_0} f_i^1 I$ sú zprava tip-redukované, zprava uniformné a $\{f_i^{2'}\}_{i\in U_1} \in \oplus_{i\in T_0} f_i^1 I$.

Teraz dokážeme, že

$$0 \to \big(\oplus_{i\in T_1} f_i^1\,\mathrm{KQ}\big) \cap \big(\oplus_{i\in T_0} f_i^0 I\big) \to \oplus_{i\in T_1} f_i^1\,\mathrm{KQ} \to \Omega^1_\Lambda(M) \to 0$$

je exaktná postupnosť. Potom prienik vyjadríme ako direktnú sumu

$$\big(\oplus_{i\in T_1} f_i^1\,\mathrm{KQ}\big) \cap \big(\oplus_{i\in T_0} f_i^0 I\big) = \oplus_{i\in I_2} f_i^{2*}\,\mathrm{KQ}\,.$$

Množinu $\{f_i^{2*}\}_{i\in I_2}$ nájdeme tak, že nájdeme nejaké generátory prieniku. Túto množinu generátorov tip-redukujeme tak, aby bola zprava uniformná podľa Algoritmu 63, výslednú množinu označíme $\{f_i^{2*}\}_{i\in I_2}$. Podľa Vety 59 platí, že táto množina generuje $\oplus_{i\in I_2} f_i^{2*}\,\mathrm{KQ}$, a teda stačí označiť $\{f_i^2\}_{i\in T_2}$ prvky z $\{f_i^{2*}\}_{i\in I_2}$, ktoré neležia v $\oplus_{i\in T_0} f_i^1 I$ a naopak $\{f_i^{2'}\}_{i\in U_2}$, ktoré ležia v $\oplus_{i\in T_0} f_i^1 I$.

Nasledujúci komutatívny diagram má zrejme exaktné postupnosti v riadkoch

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & \oplus_{i\in T_0} f_i^0 I \arrow[r, equal] \arrow[d, "\alpha_1"] & \oplus_{i\in T_0} f_i^0 I \arrow[d, "\beta_1"] & & \\
0 \arrow[r] & \Omega^1_R(M) \arrow[r, "H^1"] \arrow[d, "\alpha_2"] & \oplus_{i\in T_0} f_i^0\,\mathrm{KQ} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta_2"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega^1_\Lambda(M) \arrow[r, "H'"] \arrow[d] & \oplus_{i\in T_0} f_i^0\,\mathrm{KQ} \,/\, \oplus_{i\in T_0} f_i^0 I \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

taktiež je zrejmé, že pravý stĺpec je exaktná postupnosť. Dokážme, že aj ľavý stĺpec je exaktná postupnosť.

Definujeme $\alpha_1(x) = \beta_1(x)$ pre každé $x \in \oplus_{i\in T_0} f_i^0 I$. Korektnosť definície plynie z toho, že

$$\oplus_{i\in T_0} f_i^0 I \subseteq \Omega^1_R(M) = (\oplus_{i\in T_1} f_i^1\,\mathrm{KQ}) \oplus (\oplus_{i\in U_1} f_i^{1'}\,\mathrm{KQ}).$$

Táto inklázia plynie z dôkazu Lemy 72. Tým sme ukázali, že α_1 je prosté.

Analogicky pre α_2, definujeme $\alpha_2(x) = \beta_2(x)$ pre každé $x \in \Omega^1_R(M)$. Správnosť plynie z faktu, že ak $x \in \mathrm{Ker}(\pi)$, potom $x + \oplus_{i\in T_0} f_i^0 I \in \mathrm{Ker}(\pi_0)$. Zároveň vidíme, že α_2 je na.

Lema 73. *Ľavý stĺpec v predchádzajúcom diagrame je exaktná postupnosť.*

Dôkaz. Podľa predchádzajúcich úvah stačí dokázať rovnosť $\mathrm{Im}(\alpha_1) = \mathrm{Ker}(\alpha_2)$. To plynie priamo z exaktnosti druhého stĺpca. $\square$

Lema 74. *Z vyššie komutatívneho diagramu plynie exaktná postupnosť*

$$0 \to \big(\oplus_{i\in T_1} f_i^1\,\mathrm{KQ}\big) \cap \big(\oplus_{i\in T_0} f_i^0 I\big) \to \oplus_{i\in T_1} f_i^1\,\mathrm{KQ} \to \Omega^1_\Lambda(M) \to 0.$$

Dôkaz. Máme rovnosť $\Omega^1_R(M) = (\oplus_{i\in T_1} f_i^1 \,\mathrm{KQ}) \oplus (\oplus_{i\in U_1} f_i^{1'} \,\mathrm{KQ})$. Potom

$$\oplus_{i\in T_1} f_i^1 \,\mathrm{KQ} \cap ((\oplus_{i\in T_1} f_i^1 \,\mathrm{KQ}) \oplus (\oplus_{i\in U_1} f_i^{1'} \,\mathrm{KQ})) = \oplus_{i\in T_1} f_i^1 \,\mathrm{KQ}\,.$$

Tým je dokončený dôkaz exaktnosti postupnosti zo znenia. $\square$

Teraz nasleduju indukčný krok. Predpokladajme, že sme už skonštruovali množiny $\{f_i^k\}_{i\in T_k}$ pre $k = 1, 2, \ldots, n$ a chceme skonštruovať $\{f_i^{n+1}\}_{i\in T_{n+1}}$. Uvažujme nasledovný prienik vyjadrený ako direktnú sumu

$$(\oplus_{i\in T_n} f_i^n \,\mathrm{KQ}) \cap \big(\oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I\big) = \oplus_{i\in I_{n+1}} f_i^{n+1*} \,\mathrm{KQ}\,.$$

Opäť nájdeme množinu generátor prieniku, ktorú tip-redukujeme tak, aby výsledná množina bola zprava uniformná, použijeme Algoritmus 63. Výslednú množinu označme $\{f_i^{n+1*}\}_{i\in I_{n+1}}$. Množinu rozdelíme na dve disjunktné podmnožiny a to $\{f_i^{n+1}\}_{i\in T_{n+1}}$ prvky, ktoré neležia v $\oplus_{i\in T_n} f_i^n I$ a zbytok označíme $\{f_i^{n+1'}\}_{i\in U_{n+1}}$.

Podľa Vety 59 vieme, že prienik je rovný direktnej sume

$$\oplus_{i\in I_{n+1}} f_i^{n+1*} \,\mathrm{KQ}\,.$$

Ako v Leme 74 aj pre $n \geq 3$ platí, že

$$0 \to (\oplus_{i\in T_n} f_i^n \,\mathrm{KQ}) \cap (\oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I) \to \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} \,\mathrm{KQ} \to \Omega_\Lambda^{n-1}(M) \to 0,$$

je exaktná postupnosť, kde $\Omega_\Lambda^{n-1}(M) = \mathrm{Ker}\,\big(\oplus_{i\in T_{n-2}} f_i^{n-2} \,\mathrm{KQ} \,/\, \oplus_{i\in T_{n-2}} f_i^{n-2} I \to \Omega_\Lambda^{n-2}(M)\big)$. Dôkaz exaktnosti dostaneme obdobne ako v úvode. Najprv dokážeme exaktnosť ľavého stĺpca ako v Leme 73 a nakoniec požadovanú exaktnú postupnosť analogicky ako v dôkaze Lemy 74. Poznamenajme, že

$$\oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I \subseteq (\oplus_{i\in T_n} f_i^n \,\mathrm{KQ}) \oplus (\oplus_{i\in U_n} f_i^{n'} \,\mathrm{KQ}) = \Omega^1_R(\Omega_\Lambda^{n-1}).$$

To plynie z toho, že $\oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I \arrow[r, equal] \arrow[d] & \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \Omega^1_R(\Omega_\Lambda^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} \,\mathrm{KQ} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \Omega_\Lambda^{n-1}(M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega_\Lambda^n(M) \arrow[r] \arrow[d] & \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} \,\mathrm{KQ} \,/\, \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_\Lambda^{n-1}(M) \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Teraz sformulujeme tvrdenie, ktoré použijeme pri hľadaní generátorov prieniku. Tvrdenie uvedieme najprv všeobecne pre R-moduly, potom vysvetlíme pre náš konkrétny prípad.

Tvrdenie 75. *Nech G, M a N sú pravé R-moduly také, že*

$$N \subseteq G \subseteq M \oplus N.$$

Nech $G = \sum_{i=1}^{g} g_i R$, $M = \sum_{j=1}^{m} m_j R$ a $N = \sum_{k=1}^{n} n_k R$, kde

$$g_i = \sum_{j=1}^{m} m_j \alpha_j + \sum_{k=1}^{n} n_k \beta_k$$

pre nejaké α_j, $\beta_k \in R$. Potom prienik $G \cap M$ je generovaný prvkami $g_i - \sum_{k=1}^{n} n_k \beta_k$.

Dôkaz. Každý prvok z $G \cap M$ má vyjadrenie $\sum_{i=1}^{g} g_i \gamma_i$. Dosadíme zo znenia vety z g_i a dostaneme

$$\sum_{i=1}^{g} g_i \gamma_i = \sum_{i=1}^{g} \sum_{j=1}^{m} m_j \alpha_j \gamma_i + \sum_{i=1}^{g} \sum_{k=1}^{n} n_k \beta_k \gamma_i.$$

Z direktnej sumy $G \subseteq M \oplus N$ plynie, že $\sum_{i=1}^{g} \sum_{k=1}^{n} n_k \beta_k \gamma_i = 0$. Potom máme

$$\sum_{i=1}^{g} g_i \gamma_i = \sum_{i=1}^{g} (g_i - \sum_{k=1}^{n} n_k \beta_k) \gamma_i$$

Pre ľubovoľný prvok z prieniku $G \cap M$ sme dokázali, že je generovaný prvkami $g_i - \sum_{k=1}^{n} n_k \beta_k$. □

Predchádzajúce tvrdenie použijeme na výpočet prvkov f_i^{n+1*} takých, že

$$(\oplus_{i \in T_n} f_i^n \,\mathrm{KQ}) \cap (\oplus_{i \in T_{n-1}} f_i^{n-1} I) = \oplus_{i \in T_{n+1}} f_i^{n+1*} \,\mathrm{KQ}\,.$$

Označme $\{g_1, \ldots, g_m\}$ pravú Gröbnerovu bázu ideálu I, ktorá existuje ako sme dokázali v príslušnej kapitole o Gröbnerových bázach pre K-algebry. Potom množina $\{f_i^{n-1} g_j | i \in T_{n-1}, j = 1, 2, \ldots, m\}$ generuje modul $\oplus_{i \in T_{n-1}} f_i^{n-1} I$. Položme

$$G = \oplus_{i \in T_{n-1}} f_i^{n-1} I = \sum_{i,j} f_i^{n-1} g_j \,\mathrm{KQ}$$

$$M = \sum_{i \in T_n} f_i^n \,\mathrm{KQ}$$

$$N = \sum_{i \in U_n} f_i^{n'} \,\mathrm{KQ}$$

Podľľa tvrdenia spočítame generátory prieniku, ktoré stačí tip-redukovať tak, aby boli zprava uniformné. Tým získame $\{f_i^{n+1*}\}_{i \in T_{n+1}}$. Na tip-redukciu použijeme Algoritmus 63.

Poznamenajme, že existuje komplikovanejší algoritmus ako nájsť priamo prvky tip-redukované $\{f_i^{n+1}\}_{i \in T_{n+1}}$ a $\{f_i^{n+1'}\}_{i \in U_{n+1}}$ bez nutnosti použitia Algoritmusu 63. Viď článok autor Green a Solberg [6]. V QPA existuje táto implementácia, avšak výsledná projektívna rezolventa nemusí byť minimálna.

2.4 Projektívna rezolventa

Teraz zhrnieme celý algoritmus na hľadanie projektívnej rezolventy $\mathrm{KQ}\,/I$-modulu M

$$\cdots \xrightarrow{\delta^3} \oplus_{i\in T_2} f_i^2 \,\mathrm{KQ}\,/\oplus_{i\in T_2} f_i^2 I \xrightarrow{\delta^2} \oplus_{i\in T_1} f_i^1 \,\mathrm{KQ}\,/\oplus_{i\in T_1} f_i^1 I \xrightarrow{\delta^1}$$
$$\xrightarrow{\delta^1} \oplus_{i\in T_0} f_i^0 \,\mathrm{KQ}\,/\oplus_{i\in T_0} f_i^0 I \xrightarrow{\delta^0} M \to 0,$$

kde f_i^n sú zprava uniformné.

Začneme na vstupe s $\mathrm{KQ}\,/I$-modulom M zadaným ako reprezentácia nejakého tulca. V kapitole *Projektívna* KQ-*prezentácia* v dôkaze Lemy (71) sme popísali ako nájsť prvé dva členy projektívnej postupnosti.

$$\oplus_{i\in T_1} f_i^1 \,\mathrm{KQ}\,/\oplus_{i\in T_1} f_i^1 I \xrightarrow{\delta^1} \oplus_{i\in T_0} f_i^0 \,\mathrm{KQ}\,/\oplus_{i\in T_0} f_i^0 I \xrightarrow{\delta^0} M \to 0,$$

Predpokladajme, že sme skonštruovali množiny $\{f_i^k\}_{i\in T_k}$ pre $k = 0, 1, \ldots, n$. Potom $\{f_i^{n+1}\}_{i\in T_{n+1}}$ skonštrujeme nasledovne. Z teórie Gröbnerových bází plynie, že nasledovný prienik KQ-modulov sa dá zapísať ako direktná suma

$$\oplus_{i\in T_n} f_i^n \,\mathrm{KQ} \cap \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I = \oplus_{i\in I_{n+1}} f_i^{n+1*} \,\mathrm{KQ}\,.$$

Novú množinu $\{f_i^{n+1}\}_{i\in T_{n+1}}$ definujeme ako tie prvky z $\{f_i^{n+1*}\}_{i\in I_{n+1}}$, ktoré neležia v $\oplus_{i\in T_n} f_i^n I$. V prípade, že je prienik nulový, ďalšie prvky v rezolvente sú nulové moduly a algoritmus skončí. Homomorfizmy δ^n pre $n \geq 1$ sú indukované inklúziou podmnožín. Platí, že $f_i^n \in \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1}$. Teraz dokážeme, že takto nájdené prvky nám dávajú požadovanú rezolventu.

Veta 76 (Theorem 1.2 [5]). *Nasledujúca postupnosť* $\mathrm{KQ}\,/I$*-modulov a homomorfizmov*

$$\cdots \xrightarrow{\delta^3} \oplus_{i\in T_2} f_i^2 \,\mathrm{KQ}\,/\oplus_{i\in T_2} f_i^2 I \xrightarrow{\delta^2} \oplus_{i\in T_1} f_i^1 \,\mathrm{KQ}\,/\oplus_{i\in T_1} f_i^1 I \xrightarrow{\delta^1}$$
$$\xrightarrow{\delta^1} \oplus_{i\in T_0} f_i^0 \,\mathrm{KQ}\,/\oplus_{i\in T_0} f_i^0 I \xrightarrow{\delta^0} M \to 0.$$

je projektívna rezolventa $\mathrm{KQ}\,/I$*-modulu* M*, kde* δ^n *sú homomorfizmy indukované vnorením podmnožín a množiny* $\{f_i^n\}_{i\in T_n}$ *sú definové vyššie.*

Dôkaz. Podľa predchádzajúcej kapitoly je každý $f_i^n \,\mathrm{KQ}\,/I$ projektívny modul a direktná suma je opäť projektívny modul. Teda máme postupnosť projektívnych $\mathrm{KQ}\,/I$-modulov.

Podľa Definície 11 projektívnej rezolventy musíme pre každé $n \geq 0$ dokázať rovnosť $\mathrm{Im}(\delta^{n+1}) = \mathrm{Ker}(\delta^n)$.

Predpokladajme, že $n = 0$. Z definície f_i^1, $i \in T_1$, máme $f_i^1 \in \Omega^1_{\mathrm{KQ}}(M)$, a teda $\mathrm{Im}(\delta^1) \subseteq \mathrm{Ker}(\delta^0)$.

Homomorfizmy δ^n pre $n \geq 1$ sú vnorenia, potom označme koeficienty $r_{i,j} \in \mathrm{KQ}$, kde $\delta^n(f_i^n) = \sum_{j\in T_{n-1}} f_j^{n-1}(r_{i,j}^n + I)$.

Ostáva dokázať pre $n \geq 1$. Najprv dokážeme, že $\mathrm{Im}(\delta^{n+1}) \subseteq \mathrm{Ker}(\delta^n)$ čo je ekvivalentné $\delta^n\delta^{n+1} = 0$. Nech $i \in T_n$, potom

$$\delta^n(\delta^{n+1}(f_i^{n+1})) = \delta^n\left(\sum_{j\in T_n} f_j^n(r_{i,j}^{n+1} + I)\right) = \sum_{j\in T_n} \delta^n(f_j^n)(r_{i,j}^{n+1} + I) =$$
$$= \sum_{j\in T_n}\sum_{k\in T_{n-1}} f_k^{n-1}(r_{j,k}^n r_{i,j}^{n+1} + I).$$

Teda stačí dokázať, že $\sum_{j\in T_n}\sum_{k\in T_{n-1}} r^n_{j,k}r^{n+1}_{i,j}\in I$. Uvažujme

$$\sum_{k\in T_{n-1}} f_k^{n-1}\sum_{j\in T_n} r^n_{j,k}r^{n+1}_{i,j} = \sum_{j\in T_n}\left(\sum_{k\in T_{n-1}} f_k^{n-1}r^n_{j,k}\right) r^{n+1}_{i,j} = \sum_{j\in T_n} f_j^n r^{n+1}_{i,j} = f_i^{n+1}.$$

Zo samotnej definície prvkov máme, že $f_i^{n+1}\in\oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I$. Z direktnej sumy nutne $\sum_{j\in T_n} r^n_{j,k}r^{n+1}_{i,j}\in I$.

Stačí dokázať $\mathrm{Ker}(\delta^n)\subseteq \mathrm{Im}(\delta^{n+1})$. Nech $x=\sum_{i\in T_n} f_i^n x_i\in\mathrm{Ker}(\delta^n)$. Chceme nájsť $y\in\mathrm{Im}(\delta^{n+1})$ také, že $\delta^{n+1}(y)=x$. Definujme

$$B=\sum_{j\in T_{n-1}} f_j^{n-1}\sum_{i\in T_{n-1}} r^n_{i,j}x_i = \sum_{i\in T_{n-1}}\sum_{j\in T_{n-1}} f_j^{n-1}r^n_{i,j}x_i = \sum_{i\in T_n} f_i^n x_i.$$

Máme

$$\begin{aligned} B\in \oplus_{i\in T_n} f_i^n\,\mathrm{KQ}\cap\oplus_{i\in T_n} f_i^{n-1} I = \oplus_{i\in I_{n+1}} f_i^{n+1*}\,\mathrm{KQ} = \\ = \oplus_{i\in T_{n+1}} f_i^{n+1}\,\mathrm{KQ}\oplus\oplus_{i\in U_{n+1}} f_i^{n+1'}\,\mathrm{KQ}\,. \end{aligned}$$

Nech $B=\sum_{i\in T_{n+1}} f_i^{n+1}g_i+z$, kde $z\in\oplus_{i\in U_{n+1}} f_i^{n+1'}\,\mathrm{KQ}$, a teda $z\in\oplus_{i\in T_n} f_i^n I$.

Ukážeme, že $\delta^{n+1}(\sum_{i\in T_{n+1}} f_i^{n+1}g_i)=x$. Máme

$$\delta^{n+1}(\sum_{i\in T_{n+1}} f_i^{n+1}g_i) = \sum_{i\in T_{n+1}}\sum_{j\in T_n} f_j^n r^{n+1}_{i,j}g_i = \sum_{j\in T_n} f_j^n\sum_{i\in T_{n+1}} r^{n+1}_{i,j}g_i$$

Chceme

$$\sum_{i\in T_{n+1}} r^{n+1}_{i,j}g_i - x_i\in I$$

Máme

$$z = B-\sum_{i\in T_{n+1}} f_i^{n+1}g_i\in\oplus_{i\in T_n} f_i^n I$$

Potom

$$\sum_{i\in T_n} f_i^n x_i-\sum_{i\in T_{n+1}} f_i^{n+1}g_i = \sum_{i\in T_n} f_i^n x_i-\sum_{j\in T_n} f_j^n\sum_{i\in T_{n+1}} r^{n+1}_{i,j}g_i\in\oplus_{i\in T_n} f_i^n I$$

Vidíme, že $x_i-\sum_{i\in T_{n+1}} r^{n+1}_{i,j}g_i\in I$. Dôkaz je dokončený. □

Predchádzajúca veta nám dáva nasledovný algoritmus.

Algoritmus 77. *Prvých n členov projektívnej rezolventy*

výpočet $\{f_i^0\}_{i\in T_0}$, $\{f_i^1\}_{i\in T_1}$
for $k=1,\ldots,n-1$
  spočítaj generátory prieniku $\oplus_{i\in T_k} f_i^k\,\mathrm{KQ}\cap\oplus_{i\in T_{k-1}} f_i^{k-1} I$
  označme generátory $\{g_i\}_{i\in I_{n+1}}$
  túto množinu tip-redukujeme
  $\{f_i^{k+1*}\}_{i\in I_{k+1}}\leftarrow$ Algoritmus 63 so vstupom $\{g_i\}_{i\in I_{n+1}}$
  nájdi $\{f_i^{k+1}\}_{i\in T_{k+1}}$ a $\{f_i^{k+1'}\}_{i\in U_{k+1}}$
return $(\{f_i^{n-1}\}_{i\in T_{n-1}},\delta^{n-1}),\ldots,(\{f_i^0\}_{i\in T_0},\delta^0)$

Pretože všetky prvky f_i^n sú zprava uniformné, označme vrcholy v_i^n také, že $f_i^n v_i^n = f_i^n$. Potom máme izomorfizmus $f_i^n \mathrm{KQ}/f_i^n I \cong v_i^n \mathrm{KQ}/I$. Z prvej kapitole v Tvrdení 35 sme popísali ako vyzerá reprezentácia $v_i(\mathrm{KQ}/I)$. Teda máme výstup v podobe reprezentácie.

Veta 78. *Ak existuje konečná pravá Gröbnerova báza pre $I \subseteq \mathrm{KQ}$, potom je vyššie popísaný algoritmus je konečný*

Dôkaz. Dôkaz plynie z Tvrdenia 75, kde prienik vyjadríme pomocou konečného počtu generátorov. Následná tip-redukcia je algoritmická podľa Algoritmu 63. □

3. Konštrukcia minimálnej projektívnej rezolventy

3.1 Minimálna projektívna rezolventa

V predchádzajúces kapitole sme množinu $\{f_i^{n*}\}_{i\in I_n}$ rozdelili na dve disjunktné množiny $\{f_i^n\}_{i\in T_n}$ a $\{f_i^{n'}\}_{i\in U_n}$ podľa toho či ležia v $\oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I$ alebo nie. Cieľom tejto kapitoly je z množiny $\{f_i^n\}_{i\in T_n}$ vybrať niektoré prvky a pridať nové do $\{f_i^{n'}\}_{i\in U_n}$, tak aby výsledná projektívna rezolventa bola minimálna. Dôležitá je nasledovná veta.

Veta 79 (Theorem 2.4 [5]). *Predpokladajme, že máme*

$$\oplus_{i\in T_n} f_i^{n*}\,\mathrm{KQ} = (\oplus_{i\in T_{n-1}}\mathrm{KQ}) \cap (\oplus_{i\in T_{n-2}} I)$$

a $\{f_i^n\}_{i\in T_n}$ *a* $\{f_i^{n'}\}_{i\in U_n}$ *ako v predchádzajúcej kapitole. Teda* f_i^n *a* $f_i^{n'}$ *sú zprava uniformné,* $f_i^{n'} \in \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I$, $f_i^n \notin \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I$ *a množina* $\{f_i^n\}_{i\in T_n}$ *je zprava tip-redukovaná.*

Nech naviac žiadna netriviálna K*-lineárna kombinácia prvkov z množiny* $\{f_i^n\}_{i\in T_n}$ *neleží v* $\oplus_{j\in T_{n-1}} f_j^{n-1} I + \oplus_{i\in I_n} f_i^{n*} J$. *Potom*

$$\cdots \xrightarrow{\delta^2} \oplus_{i\in T_1} f_i^1\,\mathrm{KQ} \,/\, \oplus_{i\in T_1} f_i^1 I \xrightarrow{\delta^1} \oplus_{i\in T_0} f_i^0\,\mathrm{KQ} \,/\, \oplus_{i\in T_0} f_i^0 I \xrightarrow{\delta^0} M \to 0,$$

je minimálna projektívna rezolventa, kde δ^n *sú inklúzie.*

Dôkaz. Homomorfizmus δ^0 je projektívne pokrytie z konštrukcie. Nech $n \geq 1$ a dokazujme indukciou podľa n. Máme

$$\delta^n : \oplus_{i\in T_n} f_i^n\,\mathrm{KQ} \,/\, \oplus_{i\in T_n} f_i^n I \to \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1}\,\mathrm{KQ} \,/\, \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I$$

chceme dokázať, že

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\delta^n) \subseteq \mathrm{rad}(\oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1}\,\mathrm{KQ} \,/\, \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I) = \\ = (\oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1}\,\mathrm{KQ} \,/\, \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I)(J/I).\end{aligned}$$

Pre pevné i máme $\delta^n(f_i^n) = \sum_{j\in T_{n-1}} f_j^{n-1} r_{i,j}^n$, kde $r_{i,j}^n \in \mathrm{KQ}$. Teda stačí, aby $r_{i,j}^n \in J$ pre každé j. Položme $r_{i,j}^n = r_j + \alpha_j v_j$, kde $\alpha_j \in K$, $r_j \in J$ a $v_j \in Q_0$ je vrchol. Pre spor predpokladajme, že niektoré $r_{i,j}^n \notin J$, a teda niektoré $\alpha_j \neq 0$. Môžeme napísať

$$f_i^n = f_1^{n-1}\alpha_1 + \ldots + f_t^{n-1}\alpha_1 + f_1^{n-1} r_1 + \ldots + f_t^{n-1} r_t,$$

kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in K$ a $r_1, \ldots, r_t \in J$. Potom

$$\sum_{l=1}^{t} f_l^{n-1}\alpha_i = f_i^n - \sum_{l=1}^{t} f_l^{n-1} r_l \in \oplus_{j\in T_{n-1}} f_j^{n-1} I + \oplus_{i\in I_n} f_i^{n*} J.$$

Našli sme netriviálnu lineárnu kombináciu, a to je spor s predpokladom. Nutne platí, že $r_{i,j}^n \in J$ pre všetky j. $\square$

Dôvod prečo predpokladáme, že len množina $\{f_i^n\}_{i\in T_n}$ je zprava tip-redukovaná a nie aj $\{f_i^{n'}\}_{i\in U_n}$ je dôležité. V ďalších uvahách totiž nemáme zaručené, že $\{f_i^{n'}\}_{i\in U_n}$ je tip-redukovaná. Poznajme, že v predchádzajúcej kapitole sme mali zaručené tip-redukovanosť množiny $\{f_i^{n'}\}_{i\in U_n}$.

Teraz nasleduje séria pomocných tvrdení, pomocou ktorých dosiahneme predpokladu z predošlej vety.

Lema 80 (Theorem 2.2 [5]). *Z predchádzajúcej kapitoly máme množinu $\{f_i^{n^*}\}_{i\in I_n} = \{f_i^n\}_{i\in T_n} \cup \{f_i^{n'}\}_{i\in U_n}$. Existuje postup, ktorý z množiny $\{f_i^{n^*}\}_{i\in I_n}$ vyberie prvky $\{f_i^n\}_{i\in T_n}$ tak, že neexistuje vlastná K-lineárna kombinácia prvkov z $\{f_i^n\}_{i\in T_n}$, ktorá by ležala v $\oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I + \oplus_{i\in T_n} f_i^{n^*} J$.*

Dôkaz. Podľa kapitoly o konštrukcii $\{f_i^{n^*}\}_{i\in T_n}$ máme

$$\oplus_{i\in I_n} f_i^n \,\mathrm{KQ} = (\oplus_{i\in T_n} f_i^n \,\mathrm{KQ}) \oplus (\oplus_{i\in U_n} f_i^{n'} \,\mathrm{KQ}) = \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} \,\mathrm{KQ} \cap \oplus_{j\in T_{n-2}} f_j^{n-2} I,$$

kde $f_i^{n'} \in \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I$ a $f_i^n \notin \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I$. Nech

$$x = \alpha_1 f_1^n + \alpha_2 f_2^n + \cdots + \alpha_s f_1^s \tag{3.1}$$

je netriviálna K-lineárna kombinácia prvkov z $\{f_i^n\}_{i\in T_n}$, ktorá leží v $\oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I + \oplus_{i\in T_n} f_i^{n^*} J$. BÚNO $\alpha_1 \neq 0$. Potom máme

$$\oplus_{i=1}^t f_i^n \,\mathrm{KQ} = (x \,\mathrm{KQ}) \oplus (\oplus_{i=2}^t f_i^n \,\mathrm{KQ}).$$

Z množiny $\{f_i^n\}_{i\in T_n}$ odoberieme f_1^n a prvok x pridáme do $\{f_i^{n'}\}_{i\in U_1}$, dostaneme nasledovný rozklad

$$\oplus_{i\in I_n} f_i^{n*} = (f_2^n \oplus \cdots \oplus f_t^n \,\mathrm{KQ}) \oplus (x \,\mathrm{KQ} \oplus f_{t+1}^{n'} \oplus \cdots \oplus f_k^{n'} \,\mathrm{KQ}).$$

Keďže predpokladáme, že množina obsahujúca f_i^n je konečná a predchádzajúcim postupom sme odobrali jeden prvok, potom opakovaním postupu dostaneme požadovanú vlastnosť. □

V kapitole o konštrukcii $f_i^{n^*}$ predpokladáme, že $f_i^{n'} \in \oplus_{i\in T_{n-1}} f_j^{n-1} I$. Preto každý nový prvok x, ktorý sme pridali do $\{f_i^{n'}\}_{i\in U_n}$ v predchádzajúcom dôkaze ešte upravíme.

Lema 81 (Theorem 2.2 [5]). *Predpokladjme, že máme množinu $\{f_i^{n'}\}_{i\in U_n}$ získanú z predchádzajúcej Lemy 80. Každý nový prvok $x \in \{f_i^{n'}\}_{i\in U_n}$ z dôkazu Lemy 80 vieme nahradiť za prvok, ktorý leží v $\oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I$.*

Dôkaz. Predpokladajme, že existuje $x = f_j^{n'} \notin \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I$ pre nejaké pevné $j \in T_n$. Ak by neexistovalo, dôkaz skončil. Máme $f_j^{n'} \in \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I + \oplus_{i\in T_n} f_i^{n^*} J$, pretože tak sme definovali x v predchádzajúcom dôkaze. Potom môžeme položiť

$$f_j^{n'} = a' + b'$$

pre nejaké $a' \in \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I$ a $b' \in \oplus_{i\in T_n} f_i^{n^*} J$. Pripomeňme rovnosť

$$\oplus_{i\in T_n} f_i^{n^*} \,\mathrm{KQ} = (\oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} \,\mathrm{KQ}) \cap (\oplus_{i\in T_{n-2}} f_i^{n-2} I).$$

Máme $f_i^{n-1} \in \oplus_{i\in T_{n-2}} f_i^{n-2}\,\mathrm{KQ}$, potom $f_i^{n-1}I \subseteq \oplus_{i\in T_{n-2}} f_i^{n-2}I$. Vidíme, že a', $b' \in \oplus_{i\in T_n} f_i^{n^*}\,\mathrm{KQ} = f_j^{n'}\,\mathrm{KQ} \oplus (\oplus_{i\in T_n, i\neq j} f_i^{n^*}\,\mathrm{KQ})$. Nech

$$a' = \sum_{i\in T_n} f_i^{n^*} \cdot \alpha_i = f_j^{n'} \cdot \alpha_j + g_1,$$

$$b' = \sum_{i\in T_n} f_i^{n^*} \cdot \beta_i = f_j^{n'} \cdot \beta_j + g_2,$$

kde g_1, $g_2 \in \oplus_{i\in T_n, i\neq j} f_i^{n^*}\,\mathrm{KQ}$, $\alpha_j \in \mathrm{KQ}$ a $\beta_j \in J$. Ďalej

$$f_j^{n'} = a' + b' = f_j^{n'}(\alpha_j + \beta_j) + (g_1 + g_2) = f_j^{n'}(\alpha_j + \beta_j),$$

kde $(g_1 + g_2) \in \oplus_{i\in T_n, i\neq j} f_i^{n^*}\,\mathrm{KQ}$. Jednoznačnosť direktnej sumy implikuje rovnosť $g_1 + g_2 = 0$, a teda $g_1 = -g_2$.

Keďže prvok $f_j^{n'}$ je zprava uniformný, existuje vrchol $w \in Q_0$ taký, že $f_j^{n'} = f_j^{n'}w$. Vidíme, že $\alpha_j + \beta_j = w$. Potom

$$f_j^{n'} = f_j^{n'}w = f_j^{n'}(\alpha_j + \beta_j)w = f_j^{n'}w(\alpha_j w + \beta_j w).$$

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že α_j, $\beta_j \in w\,\mathrm{KQ}\,w$.

Máme $\alpha_j = w - \beta_j$. Definujme $z = (w + \beta_j)(w + \beta_j^2)\cdots(w + \beta_j^{2^m})$, kde m je také, že $\beta_j^{2^{m+1}} \in I$. Existencia takého m plynie z predpokladu, že I je prípustný ideál. Z rovnosti $a' = f_j^{n'}\alpha_j - g_2 \in \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1}I$ plynie, že

$$(f_j^{n'}(w - \beta_j) - g_2)z = f_j^{n'}(w - \beta_j^{2^{m+1}}) - g_2 z = f_j^{n'} - f_j^{n'}\beta_j^{2^{m+1}} - g_2 z \in \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1}I.$$

Máme $f_j^{n'}\beta_j^{2^{m+1}} \in \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1}I$, argument je analogický ako v prvom odstavci pre $f_i^{n-1}I \subseteq \oplus_{i\in T_{n-2}} f_i^{n-2}I$.

Platí, že

$$f_j^{n'} - g_2 z \in \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1}I.$$

Rovnosť $(f_j^{n'} - g_2 z)\,\mathrm{KQ} + \oplus_{i\in T_n, i\neq j} f_i^{n^*}\,\mathrm{KQ} = \oplus_{i\in T_n} f_i^{n^*}\,\mathrm{KQ}$ je zrejmá. Súčet naľavo je direktný súčet, pretože $g_2 z \in \oplus_{i\in T_n, i\neq j} f_i^{n^*}\,\mathrm{KQ}$. Stačí $f_j^{n'}$ vymeniť za $f_j^{n'} - g_2 z$ a dôkaz je dokončený. $\square$

Vyššie popisované dôkazy nám davajú návod ako upraviť skonštruované prvky, aby výsledná rezolventa bola minimálna. V dôkaze Lemy 80 sme začali K-lineárnou kombináciou prvkov z $\{f_i^n\}_{i\in T_n}$, ktorá leží v $\oplus_{i\in T_{n-1}} f^{n-1}I + \bigcup_{i\in T_n} f^{n^*}J$. Teraz popíšeme ako algoritmicky hľadať takéto K-lineárne kombinácie.

Predpokladáme, že máme pevné n. Potom $f_i^{n^*}$ sú zprava uniformné, označme vrchol $v_i \in Q_0$ taký, že $f_i^{n^*}v_i = f_i^{n^*}$. Pripoňme, že $J \subseteq \mathrm{KQ}$ značí šipkový ideál. Hľadáme K-lineárne kombinácia v tvare (3.1) z predchádzajúceho dôkazu. Ekvivalentne, platí

$$x = \alpha_1 f_1^n + \alpha_2 f_2^n + \cdots + \alpha_s f_1^s \in \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1}I + \oplus_{i\in T_n} f_i^{n^*}J$$

práve vtedy, keď $\bar{x} := x + (\oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1}I + \oplus_{i\in T_n} f_i^{n^*}J)$ je *nulou* v konečne dimenzionalnom faktorovom K-vektorovom priestore

$$\oplus_{i\in T_n} f_i^{n^*}\,\mathrm{KQ} \Big/ \oplus_{i\in T_{n-1}} f_j^{n-1}I + \bigcup_{i\in T_n} f_i^{n^*}J.$$

Tu stojí za zmienku, že $\oplus_{i\in T_{n-1}} f_j^{n-1} I + \bigcup_{i\in T_n} f_i^{n^*} J \subseteq \oplus_{i\in T_n} f_i^n \,\mathrm{KQ}$.

Definujeme KQ-homomorfizmus

$$\pi : \oplus_{i\in T_n} f_i^{n^*}\,\mathrm{KQ} \to \oplus_{i\in T_n} v_i K \cong \oplus_{i\in T_n} f_i^{n^*}\,\mathrm{KQ} \Big/ \oplus_{i\in T_n} f_i^{n^*} J \cong \oplus_{i\in T_n} f_i^{n^*} (\mathrm{KQ}\,/J).$$

Uvažujme prvok $f_i^{n*}\alpha p \in f_i^{n^*}\,\mathrm{KQ}$, kde p je cesta v Q a $\alpha \in K$, potom definujeme

$$\pi(f_i^{n^*}\alpha p) = \begin{cases} \varepsilon_i\alpha = (0,\dots,\alpha,\dots,0) & p = v_i \\ (0,\dots,0) & p_j \neq v_i, \end{cases}$$

kde $\varepsilon_i = (0,\dots,1,\dots,0)$ má na i-tej pozícii 1. Pre ostatné prvky je obraz určený požiadovkom, aby π bol KQ-homomorfizmus.

Označme $W := \oplus_{i\in T_n} f_i^{n*}\,\mathrm{KQ} \Big/ \oplus_{i\in T_n} f_i^{n*} J$, potom dostaneme podla 3. vety o izomorfizme nasledujuci izomorfizmus

$$W \Big/ \pi(\oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I) = W \Big/ \left(\oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I + \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n^*} J \Big/ \oplus_{i\in T_n} f_i^{n^*} J \right) \cong$$
$$\cong \oplus_{i\in T_n} f_i^{n^*}\,\mathrm{KQ} \Big/ \oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I + \oplus_{i\in T_n} f_i^{n^*} J.$$

Chceme nájsť lineárne kombinácie $\bar{x}$ prvkov f_i^n, ktoré sú nulami v poslednom faktorovom priestore v predchádzajúcich izomorfizmoch. Z vyššie uvedených izomorfizmov plynie, že hľadáme prienik $\pi(\oplus_{i\in T_n} f_i^n\,\mathrm{KQ}) \cap \pi(\oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I)$. Obraz $\pi(\oplus_{i\in T_n} f_i^n\,\mathrm{KQ})$ je zreme generovaný vektormi ε_i, kde $i \in T_n$. Ako spočítať obraz $\pi(\oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I)$ ukážeme teraz.

Lema 82. *Predpokladajme značenie ako vyššie. Potom*

$$\pi(\oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I) \cong \langle \sum_{i_u\in \mathrm{rtGB}(I), j\in T_{n-1}} \pi(f_j^{n-1} i_u) \rangle_K,$$

kde $\mathrm{rtGB}(I) = \{i_1, i_2, \dots, i_s\}$ *je pravá Gröbnerova báza ideálu* I.

Dôkaz. Zrejme stačí určiť obraz $\pi\left(f_j^{n-1} I\right)$, kde $j \in T_{n-1}$. Každý prvok z množiny $f_j^{n-1} I$ je K-lineárnou kombináciou prvkov $f_j^{n-1} i_u g$, kde g je cesta v Q. Teda stačí určiť obraz $\pi(f_j^{n-1} i_u g)$. Teraz ukážeme, že pre cestu g dĺžky aspoň 1 je $\pi(f_j^{n-1} i_u g) = 0$. Pripoňme inklúziu

$$\oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I \subseteq \oplus_{i\in T_n} f_i^{n*}\,\mathrm{KQ},$$

ktorá plynie z definície prvkov $f_i^{n^*}$.

Existuje jednoznačné vyjadrenie $f_j^{n-1} i_u = \sum_{i\in T_n} f_i^{n^*} r_i$, BÚNO $r_i \in v_i\,\mathrm{KQ}$. Nech $r_i = \beta_i v_i + z$, kde $z \in v_i\,\mathrm{KQ}$ „obsahuje“ len cesty dĺžky aspoň 1 a $\beta_i \in K$.

Potom z definície zobrazenia π máme

$$\pi(f_j^{n-1} i_u g) = \pi(\sum_{i\in T_n} f_i^{n^*} r_i g) = \pi\left(\sum_{i\in T_n} f_i^{n^*} (\beta_i v_i g + z g) \right) = 0,$$

pretože $v_i g$ je 0 alebo cesta dĺžky aspoň 1.

Z toho plynie záver, že $\pi(\oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I) \cong \langle \sum_{i_u\in \mathrm{rtGB}(I), j\in T_{n-1}} \pi(f_j^{n-1} i_u) \rangle_K$. □

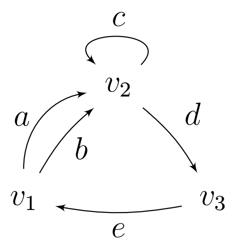
Teraz keď máme obrazy zobrazenia π, stačí pomocou lineárnej algebry spočítať bázu prieniku $\pi(\oplus_{i\in T_n} f_i^n\,\mathrm{KQ}) \cap \pi(\oplus_{i\in T_{n-1}} f_i^{n-1} I)$.

Konkrétna okomentovaná implementácia postupov popísaných v Leme 80 a Leme 81 za použitia Lemy82 je v prílohe. Implementácia je v programe QPA.

3.2 Príklady

Teraz uvedieme príklady na výpočet minimálnej projektívnej rezolventy.

Príklad 83. Nech máme nasledujúci tulec



a položme $R := \mathrm{KQ}$, $I = (c^2, acd - bd, ea, eb)$, $\Lambda = R/I$. Dôkaz, že I je prípustný sme dokázali za Príkladom 14, $J^5 \subseteq I \subseteq J^2$, kde $J \subseteq \mathrm{KQ}$ značí šípkový ideál. Pravá Gröbnerova báza ideálu I je

$$rtG = \{c^2, ea, eb, ac^2, -bd + acd, bc^2, dea, deb, adea, adeb,\\ bdea, bdeb, cdea, cdeb, bcdea, bcdeb\}$$

a je konečná. Ďalej definujme zobrazenia jednotlivých hrán pomocou matíc

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Modul M zadaný vyššie reprezentáciou. Program implementujáci algoritmus z predchádzajúcej kapitoly nám dám nasledujúci zoznam f_i^n:

- $f_0^0 = (v_1, 0)$
- $f_1^0 = (0, v_1)$
- $f_0^1 = (-ade, 0)$
- $f_1^1 = (0, ade)$
- $f_2^1 = (a, -a + ac)$
- $f_3^1 = (-a - b, a)$
- $f_4^1 = (a, -a + b)$
- $f_0^2 = (-bd + acd, ac^2d)$
- $f_1^2 = (0, -bd + acd)$
- $f_2^2 = (0, adea)$
- $f_3^2 = (0, adeb)$
- $f_4^2 = (0, bdea)$
- $f_5^2 = (0, bdeb)$

- $f_0^3 = (0, adebd - acdebd - adeacd + bdeacd)$
- $f_1^3 = (0, -adebd + adeacd)$
- $f_0^4 = \emptyset$

Dostali sme nasledovnú minimálnu projektívnu rezolventu, kde $\{f_i^n\}_{i \in T_n}$ sú zprava uniformné a zprava tip-redukované

$$
\begin{aligned}
0 \to \oplus_{i=0}^{1} f_i^3 R / \oplus_{i=0}^{1} f_i^3 I \to \oplus_{i=0}^{5} f_i^2 R / \oplus_{i=0}^{5} f_i^2 I \to \\
\to \oplus_{i=0}^{4} f_i^1 R / \oplus_{i=0}^{4} f_i^1 I \to \oplus_{i=0}^{1} f_i^0 R / \oplus_{i=0}^{1} f_i^0 I \to M \to 0
\end{aligned}
$$

Nech $f \in KQ$ a $f = fv$ pre nejaký vrchol v, potom máme izomorfizmus $fR/fI \cong v(R/I)$. Potom môžeme písať minimálnu projektívnu rezolventu v tvare

$$
\begin{aligned}
0 \to v_3\Lambda \oplus v_3\Lambda \to v_3\Lambda \oplus v_3\Lambda \oplus v_2\Lambda \oplus v_2\Lambda \oplus v_2\Lambda \oplus v_2\Lambda \to \\
\to v_1\Lambda \oplus v_1\Lambda \oplus v_2\Lambda \oplus v_2\Lambda \oplus v_2\Lambda \to v_1\Lambda \oplus v_1\Lambda \to M \to 0.
\end{aligned}
$$

Podľa Tvrdenia 35 spočítame reprezentácie $v_1\Lambda$, $v_2\Lambda$ a $v_3\Lambda$. Označme reprezentáciu P_i, φ_α^i modulu $v_i\Lambda$ je

$$
\begin{tikzcd}
 & P_i(v_2) \arrow[loop above, "\varphi_c^i"] \arrow[dr, "\varphi_d^i"] & \\
P_i(v_1) \arrow[ur, bend left, "\varphi_a^i"] \arrow[ur, "\varphi_b^i"'] & & P_i(v_3) \arrow[ll, "\varphi_e^i"]
\end{tikzcd}
$$

kde $i \in \{1, 2, 3\}$ a φ_α^i je definované ako v Tvrdení 35. Dostaneme pre $i = 1$

- $P_1(v_1)$ má bázu $\{v_1 + I, acde + I, bcde + I, ade + I\}$,
- $P_1(v_2)$ má bázu $\{a + I, b + I, ac + I, bc + I\}$
- $P_1(v_3)$ má bázu $\{ad + I, acd + I, bcd + I\}$.

Pre $i = 2$

- $P_2(v_1)$ má bázu $\{de + I, cde + I\}$,
- $P_2(v_2)$ má bázu $\{v_2 + I, c + I\}$,
- $P_2(v_3)$ má bázu $\{c + I, cd + I\}$.

Nakoniec pre $i = 3$ platí, že

- $P_3(v_1)$ má bázu $\{de + I, cde + I\}$,
- $P_3(v_2)$ má bázu $\{v_2 + I, c + I\}$,
- $P_3(v_3)$ má bázu $\{d + I, cd + I + I\}$.

Príklad 84. Nech máme nasledujúci tulec

$$\begin{tikzcd} v_1 \arrow[loop left, "c"] \arrow[r, bend left, "a"] & v_2 \arrow[l, bend left, "b"] \end{tikzcd}$$

$R := \mathrm{KQ}$, $I = (c^2 - ab, abc, bc)$, $\Lambda = R/I$. Ideál I je prípustný, pretože $J^6 \subseteq I \subseteq J^2$. Šípkový ideál značíme J. Druhá inklúzia je zrejmá. Dokážme prvú inklúziu. Máme

$$(c^2 - ab)c = c^3 - abc \Rightarrow c^3 \in I$$

$$bc^2 - bab, bc \in I \Rightarrow bab \in I.$$

Začnime cestami z vrcholu v_1 dĺžky aspoň 6. Cesty začínajúce na c^3 ležia v I. Cesty začínajúce c^2 nutne pokračujú ako c^2ab. Máme dve možnosti c^2abab alebo c^2abc, a teda obe ležia v I. Pre cesty začínajúce s c máme $cabc$ alebo $cabab$, tieto opäť ležia v I. Cesty začínajúce v v_2 majú začiatky bc alebo bab, takže tiež ležia v I.

Pravá Gröbnerova báza pre I je

$$rtG = \{bc, -ab + c^2, abc, bab, cab, abab\}$$

a je konečná. Homomorfizmy odpovedajúce hranám definujeme pomocou matíc:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Modul M zadaný vyššie reprezentáciou.

- $f_0^0 = (v_1)$
- $f_0^1 = (c)$
- $f_1^1 = (a)$
- $f_0^2 = (-ab + c^2)$
- $f_0^3 = (abab + -c^2ab)$
- $f_0^4 = (-ababc + c^2abc)$
- $f_0^5 = (ababcab - c^2abcab)$
- $f_0^6 = (4ababcab - 4c^2abcab)$
- $f_0^7 = \emptyset$

$$0 \to f_0^6R/f_0^6I \to f_0^5R/f_0^5I \to f_0^4R/f_0^4I \to f_0^3R/f_0^3I \to$$
$$\to f_0^2R/f_0^2I \to f_0^1R/f_0^1I \to f_i^0R/f_i^0I \to M \to 0$$

Ako v predchádzajúcom v príklade môžeme písať

$$0 \to v_1\Lambda \to v_1\Lambda \to v_1\Lambda \to v_1\Lambda \to v_1\Lambda \to v_2\Lambda \to v_1\Lambda \to M \to 0$$

Označme reprezentáciu P_i, φ_α^i modulu $v_i\Lambda$.

$$\begin{tikzcd}
P_i(v_1) \arrow[loop left, "\varphi_c^i"] \arrow[r, bend left, "\varphi_a^i"] & P_i(v_2) \arrow[l, bend left, "\varphi_b^i"]
\end{tikzcd}$$

Ako v predchádzajúcom príklade uvedieme báze vektorových priestorov v jednotlivých vrcholoch. Pre $i = 1$

- $P_1(v_1)$ má bázu $\{v_1 + I, c + I, ab + I\}$,
- $P_1(v_2)$ má bázu $\{a + I, ca + I\}$.

Pre $i = 2$

- $P_2(v_1)$ má bázu $\{b + I\}$,
- $P_2(v_2)$ má bázu $\{v_2 + I, ba + I\}$.

Záver

V práci sme popísali konštrukciu projektívnej rezolventy KQ $/I$-modulov, kde modul je zadaný ako reprezentácia tulca Q. Upravali túto konštrukciu na výpočet minimálnej projektívnej rezolventy podľa článku [5]. Daný algoritmus na hľadanie minimálnej projektívnej rezolventy sme implementovali pomocou rozšírenia QPA v počítačovom systéme GPA pre prácu s reprezentáciami. Uviedli sme príklady a skontrolovali ich výpočet.

Zoznam použitej literatúry

[1] Assem I. , Simson D., Skowrński A. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras* Volume 1 Techniques of Representation Theory, Cambridge University Press, New York 2006 ISBN-13 978-0-521-58423-4

[2] GAP *GAP - Groups, Algorithms, Programming - a System for Computational Discrete Algebra* `http://www.gap-system.org/`, popis a dokumentácia, online zdroj

[3] Green, Edward L. *Noncommutative Gröbner bases, and projective resolutions* Noncommutative Gröbner bases, and projective resolutions. Computational methods for representations of groups and algebras (Essen, 1997), 29–60, Progr. Math., 173, Birkhäuser, Basel, 1999.

[4] Green, Edward L., *Multiplicative Bases, Gröbner Bases, and Right Gröbner Bases.* Journal of Symbolic Computation 29 (2000) 601-623

[5] Green, Edward L., Øyvind Solberg, D. Zacharia *Minimal Projective Resolutions* Transactions of the American mathematical society Volume 353, Number 7, 2001, Pages 2915-2939

[6] Green, Edward L., Øyvind Solberg *An algorithmic approach to resolutions* Journal of Symbolic Computation 42 (2007) 1012-1033

[7] Mac Lane S. *Homology* Berlin: Springer, 1963. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete.

[8] PASSMAN, Donald S. A course in ring theory. Providence: AMS Chelsea publishing company, c2004 *Kapitola: Projective modules: Presentations nad resolutions.* ISBN 0-8218-3680-3

[9] QPA *Quivers and Path Algebras* `http://www.math.ntnu.no/~oyvinso/QPA/`, popis a dokumentácia, online zdroj

Prílohy

- moduleprojres.gi