NMAG 111 Lineární algebra 1, zimní semestr
MFF UK
Vzorové řešení 2. písemné práce – verze A
15. 12. 2021
Doba řešení: 90 minut

Přednášející: L. Barto

Křestní jméno: ________________________ **Příjmení:** ____________________________

Čas cvičení: ________ **Cvičící:** ____________________________

Instrukce

– **Neotvírejte dříve, než jste k tomu vyzváni dozorem!**

– Test je vytištěn oboustranně. Obsahuje 7 úloh na stranách 2 až 8, strany 9 až 10 jsou volné na pomocné výpočty apod.
– Jste odpovědný/á za to, že Vaše kopie zkoušky je úplná.
– Všechny odpovědi musí být řádně zdůvodněné, není-li řečeno jinak.
– Žádné elektronické pomůcky včetně kalkulačky nejsou dovoleny.

Příklad	Body
1 [6]	
2 [6]	
3 [6]	
4 [6]	
5 [8]	
6 [8]	
7 [10]	
Celkem [50]	

(1) [6 bodů] Zakroužkujte správnou odpověď, nezdůvodňujte. K získání bodů je potřeba vždy odpovědět správně všechny tři otázky. ANO = za daných předpokladů vždy pravda, NE = jinak

(a) Buď A matice nad tělesem $\mathbb{Z}_3$ typu 4×5, která má 4 bázové sloupce. Potom:

NE Jádro matice A má dimenzi 4.

NE Rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ má právě 4 řešení.

ANO Hodnost matice A je 4.

(b) Buď $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ báze prostoru $\mathbb{R}^3$. Potom platí:

ANO B je lineárně nezávislá.

NE B je lineárně závislá.

ANO Lineární obal množiny $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ je $\mathbb{R}^3$.

(c) Buďte $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ podprostory prostoru $\mathbb{R}^3$. Potom vždy platí:

ANO Množina $\{\mathbf{u} + \mathbf{v} \colon \mathbf{u} \in U, \mathbf{v} \in V\}$ tvoří podprostor $\mathbb{R}^3$.

NE Množina $U \cup V$ tvoří podprostor $\mathbb{R}^3$.

NE $\mathbf{U}$ je podprostor prostoru $\mathbf{V}$ nebo naopak.

(2) [6 bodů] Uveďte definici následujících pojmů. Pište pečlivě, celými větami, nikoliv schematicky.

(a) Regulární matice

Čtvercová matice A nad tělesem $\mathbf{T}$ řádu n se nazývá regulární, pokud je zobrazení $f_A\colon \mathbf{T}_n \to \mathbf{T}_n$ určené maticí A vzájemně jednoznačné (tj. bijekce).

(b) Lineárně závislá posloupnost vektorů

Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$. Posloupnost prvků $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ prostoru $\mathbf{V}$ se nazývá *lineárně závislá*, pokud některý z prvků $\mathbf{v}_i$ je lineární kombinací zbývajících prvků $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_{i-1}$, $\mathbf{v}_{i+1}$, …, $\mathbf{v}_k$.

(c) Dimenze konečně generovaného vektorového prostoru

Dimenzí konečně generovaného vektorového prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ rozumíme počet prvků jeho libovolné báze. Dimenzi prostoru $\mathbf{V}$ značíme $\dim(\mathbf{V})$.

(3) [6 bodů] V této úloze nemusíte zdůvodňovat řešení. K plnému počtu bodů stačí správný výsledek.

(a) Spočtěte dimenzi podprostoru $\mathbb{Z}_2^4$ generovaného vektory $(1,1,1,1)^T$, $(1,0,1,0)^T$, a $(0,1,0,1)^T$.

Řešení: 2

(b) Napište matici přechodu od kanonické báze prostoru $\mathbb{R}^2$ k bázi $((1,1)^T,(1,0)^T)$.

Řešení:

$$[\mathrm{id}]^{K_2}_{((1,1)^T,(1,0)^T)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Napište nějakou bázi jádra matice A nad tělesem $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Řešení: Například $((-2,1,0,0)^T,(0,0,-4,3)^T)$.

(4) [6 bodů] V této úloze je třeba předvést podrobný výpočet se stručným komentářem zdůvodňujícím správnost postupu.

V prostoru $\mathbb{Z}_3^4$ najděte bázi průniku podprostoru U generovaného vektory $(1,0,0,0)^T$, $(0,1,2,0)^T$ a $(0,1,1,1)^T$ s podprostorem $V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)^T \in \mathbb{Z}_3^4 \colon x_1+x_2+x_3+x_4 = 0\}$.

Řešení (jedno možné): Chceme najít všechny vektory, které jsou zároveň lineární kombinací vektorů $(1,0,0,0)^T$, $(0,1,2,0)^T$ a $(0,1,1,1)^T$ a zároveň leží v jádře matice $(1\,1\,1\,1)$ (to je reformulovaná podmínka z definice V). Hledejme tedy $a,b,c \in \mathbb{Z}_3$ takové, že

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\left(a\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = 0$$

Roznásobením závorek a přesunem skalárů dopředu dostaneme

$$a\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$$

a roznásobením matic (modulo 3, protože jsme v $\mathbb{Z}_3$):

$$a\cdot 1 + b\cdot 0 + c\cdot 0 = 0,$$

tedy nutná a postačující podmínka na koeficienty a,b,c je $a=0$.

Proto

$$U\cap V = \{b(0,1,2,0)^T + c(0,1,1,1)^T \colon b,c\in\mathbb{Z}_3\}.$$

Tedy vektory $(0,1,1,1)^T$ a $(0,1,2,0)^T$ generují $U\cap V$. Navíc jsou tyto dva vektory lineárně nezávislé, jak můžeme ověřit třeba napsáním vektorů do řádků matice a úpravou na odstupňovaný tvar

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix},$$

kde jsme odečetli 1. řádek od 2. Protože elementární úpravy nemění lineární nezávislost řádků (Důsledek 5.42) a řádky matice napravo jsou lineárně nezávislé (např. protože tato matice je v odstupňovaném tvaru a neobsahuje nulový řádek, Tvrzení 5.43), tak máme lineární nezávislost.

Lineárně nezávislá množina vektorů (v tomto případě $(0,1,2,0)^T$ a $(0,1,1,1)^T$), která generuje vektorový prostor (v tomto případě $U\cap V$) je jeho báze. Proto jedno možné řešení je $((0,1,2,0)^T,(0,1,1,1)^T)$.

(5) [8 bodů] Tvrzení vždy pouze pečlivě zformulujte, nedokazujte. Nezapomeňte uvést všechny předpoklady a vysvětlit, co označují všechna písmena, která užíváte.

(a) Zformulujte větu o dimenzi jádra a obrazu.

Pro libovolnou matici A nad $\mathbf{T}$ typu $m \times n$ platí

$$\dim(\operatorname{Ker} A) + \dim(\operatorname{Im} A) = n \quad (= \dim(\operatorname{Ker} A) + \operatorname{rank}(A) \ ) \ .$$

(b) Formulujte Steinitzovu větu o výměně.

Nechť $N = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ je lineárně nezávislá posloupnost prvků vektorového prostoru $\mathbf{V}$ nad $\mathbf{T}$ a nechť $G = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_l)$ generuje $\mathbf{V}$. Pak $k \leq l$ a při vhodném uspořádání $G' = (\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2, \ldots, \mathbf{w}'_l)$ posloupnosti G platí, že $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}'_{k+1}, \mathbf{w}'_{k+2}, \ldots, \mathbf{w}'_l)$ generuje $\mathbf{V}$.

(6) [8 bodů] V této úloze máte dokázat jednodušší tvrzení ze skript, v reformulované nebo méně obecné podobě. V důkazu se neopírejte o obecnější formulaci téhož tvrzení ani o silnější tvrzení. Pokud kromě definic použijete ještě nějaké jiné tvrzení, měla by jeho formulace být součástí důkazu.

(a) Buď A reálná matice typu 3×3 v odstupňovaném tvaru. Dokažte, že řádky (seřazené od prvního ke třetímu) A tvoří lineárně nezávislou posloupnost právě tehdy, když A neobsahuje nulový řádek.

Řešení: Buďte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ řádky A seřazené od prvního ke třetímu, které budeme chápat jako aritmetické vektory.

Potřebujeme dokázat tvrzení typu „právě tehdy když“, takže dokážeme dvě implikace:

– A obsahuje nulový řádek $\Rightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ je lineárně závislá a

– A neobsahuje nulový řádek $\Rightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ je lineárně nezávislá.

První implikace plyne z toho, že pokud je jeden z řádků $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ nulový, tak posloupnost $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ obsahuje nulový vektor. Posloupnost s nulovým vektorem je vždy lineárně závislá, tedy $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ je lineárně závislá.

Pro druhou implikaci předpokládejme, že všechny řádky A jsou nenulové. Protože A je v odstupňovaném tvaru a je typu 3×3 bez nulového řádku, tak musí mít tvar

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix},$$

kde $a_1, b_2, c_3 \neq 0$ jsou pivoty. Jinak řečeno (řádky A chápeme jako sloupcové vektory, protože na to jsme zvyklí ve zbytku kurzu):

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T \quad \mathbf{b} = (0, b_2, b_3)^T \quad \mathbf{c} = (0, 0, c_3)^T.$$

Nyní chceme ukázat, že nulový prvek lze vyjádřit jako lineární kombinaci $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jenom triviálním způsobem. Pokud to dokážeme, Tvrzení 5.36 nám dá, že $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ je lineárně nezávislá posloupnost.

Buďte $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ jsou čísla taková, že

$$\alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Potom z první souřadnice vidíme, že $\alpha a_1 = 0$. Zároveň $a_1 \neq 0$, tedy $\alpha = 0$. Ve druhé souřadnici máme $\alpha a_2 + \beta b_2 = 0$, ale $\alpha = 0$, takže $\beta b_2 = 0$. Navíc $b_2 \neq 0$, takže $\beta = 0$. Konečně $\alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = 0$, ale $\alpha = \beta = 0$ a $c_3 \neq 0$, což znamená, že nutně $\gamma = 0$ a všechny tři koeficienty v lineární kombinaci jsou nulové – jde o triviální kombinaci, jak jsme potřebovali. Tím jsme dokázali lineární nezávislost $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

(b) Dokažte, že kdykoli je A reálná matice typu 3×4 a B je reálná matice typu 4×4, tak platí $\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank}(A)$.

Z definice součinu je každý sloupec AB lineární kombinací sloupců matice A. Obraz matice AB je z definice množina

$$\operatorname{Im} AB = \{AB\mathbf{u} \colon \mathbf{u} \in \mathbb{R}^4\} \subseteq \{A\mathbf{w} \colon \mathbf{w} \in \mathbb{R}^4\} = \operatorname{Im} A,$$

kde inkluze plyne z toho, že pro každé $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ můžeme zvolit $\mathbf{w} = B\mathbf{u}$ a mít $AB\mathbf{u} = A\mathbf{w}$. Tedy obraz AB je podmnožina obrazu A; obrazy jsou zároveň vektorové prostory, tedy $\operatorname{Im} AB$ je podprostor $\operatorname{Im} A$. Z vlastnosti „být podprostorem“ plyne $\dim \operatorname{Im} AB \leq \dim \operatorname{Im} A$. Z definice hodnosti přitom $\operatorname{rank}(A) = \dim \operatorname{Im} A$ a $\operatorname{rank}(AB) = \dim \operatorname{Im} AB$. Tedy

$$\operatorname{rank}(AB) = \dim \operatorname{Im} AB \leq \dim \operatorname{Im} A = \operatorname{rank}(A),$$

což jsme chtěli.

(7) [10 bodů] Odpovědi v následujících úlohách zdůvodněte (tj. dokažte).

(a) Buďte a, b dvě různá nenulová reálná čísla. Dokažte, že pak je posloupnost

$$((0, a, b)^T, (0, a^2, b^2)^T, (1, 1, 1)^T)$$

bází $\mathbb{R}^3$.

Řešení: Buďte $a, b \in \mathbb{R}$ dvě různá nenulová čísla. Protože $\mathbb{R}^3$ má dimenzi 3, stačí dokázat, že zadaná trojice vektorů je lineárně nezávislá. To uděláme podobně jako v úloze 4 zápisem vektorů do řádků matice a úpravou do odstupňovaného tvaru bez nulových řádků.

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b \\ 0 & a^2 & b^2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & b^2 - ba \end{pmatrix},$$

kde jsme nejdřív přesunuli 1. řádek na 2., 2. řádek na 3. a 3. řádek na 1. a potom jsme odečetli a-násobek 2. řádku od 3.

Výsledná matice je v odstupňovaném tvaru protože $a \neq 0$ (z předpokladů) a $b^2 - ba = b(b - a)$ je součin dvou nenulových čísel (předpokládali jsme $b \neq 0$ a $a \neq b$). Tedy jde o trojici lineánrně nezávislých vektorů.

(b) Buďte $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ tři podprostory prostoru $\mathbb{R}^3$. Rozhodněte, zda potom vždy platí „distributivní zákon"

$$\mathbf{U} \cap (\mathbf{V} + \mathbf{W}) = (\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) + (\mathbf{U} \cap \mathbf{W}).$$

Řešení: Distributivní zákon neplatí. Stačí uvést jeden protipříklad; například (abychom měli snadné počítání)

$$\mathbf{U} = \mathrm{LO}\{(1, 1, 0)^T\}$$
$$\mathbf{V} = \mathrm{LO}\{(1, 0, 0)^T\}$$
$$\mathbf{W} = \mathrm{LO}\{(0, 1, 0)^T\}$$

Prostor $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ obsahuje všechny vektory tvaru $u(1, 1, 0)^T$, které jsou zároveň tvaru $v(1, 0, 0)^T$ pro nějaká $u, v \in \mathbb{R}$. Soustava

$$u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

má ale jenom triviální řešení (protože z 2. řádku máme $u = 0$ a po dosazení $u = 0$ do 1. řádku dostaneme $v = 0$). Tedy průnik $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ obsahuje jenom nulový vektor. Ze stejných důvodů (jenom se nejdříve podíváme na 1. pozici a pak na 2.) je $\mathbf{U} \cap \mathbf{W} = \{\mathbf{o}\}$. Součet dvou prostorů $\{\mathbf{o}\}$ je zase $\{\mathbf{o}\}$, tedy

$$(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) + (\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \{\mathbf{o}\}$$

neobsahuje žádné nenulové vektory.

Pro spor s rovností stačí ukázat, že $\mathbf{U} \cap (\mathbf{V} + \mathbf{W})$ obsahuje nějaký nenulový vektor. Takový je například vektor $(1, 1, 0)^T$, který leží jak v $\mathbf{U}$, tak v $\mathbf{V} + \mathbf{W}$ (protože $(1, 1, 0)^T = (1, 0, 0)^T + (0, 1, 0)^T$).

Konec