

Spektrální věty

Buď A čtvercová komplexní matice řádu n (reálné matice jsou speciálním případem).

A má jistou algebraickou **vlastnost**

\iff A je **unitárně diagonalizovatelná** a **vlastní čísla** mají jistou vlastnost

$$A = U^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} U$$

A je **normální**
($A^*A = AA^*$)

$\overset{V10.13}{\iff} \emptyset$

A je **hermitovská**
($A = A^*$)

$\overset{V10.15}{\iff}$ vlastní čísla jsou **reálná**

A je **pozitivně definitní**
(A hermitovská a $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} : \mathbf{x}^*A\mathbf{x} > 0$)

$\overset{V10.20}{\iff}$ vlastní čísla jsou **kladná reálná**

A je **pozitivně semidefinitní**
(A hermitovská a $\forall \mathbf{x} : \mathbf{x}^*A\mathbf{x} \geq 0$)

$\overset{V10.20}{\iff}$ vlastní čísla jsou **nezáporná reálná**

A je **unitární**
($A^*A = I_n = AA^*$, tj. A regulární a $A^{-1} = A^*$)

$\overset{V10.23}{\iff}$ vlastní čísla mají **absolutní hodnotu 1**

Pro **reálné matice** máme ještě důsledek 10.16, který sice do schématu nezapadá, ale je dobré ho znát:

A je **reálná symetrická**
($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $A = A^T$)

$\overset{D10.16}{\iff}$ A je **ortogonálně diagonalizovatelná**
(tj. U i vlastní čísla jsou reálné)