ÚVOD DO KOMUTATIVNÍ ALGEBRY (NMAG305)
DOMÁCÍ ÚKOL č. 3

Termín odevzdání: pondělí 31. ledna 2022.

(1) Je prvek $\sqrt[6]{6\sqrt{6}+\sqrt[6]{6}}$ celistvý nad $\mathbb{Z}$? Proč?
(4 body)

(2) Buď R okruh a $I, J < R$ ideály. Ukažte, že $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{IJ}$, a pokud I, J jsou radikálové ideály, pak dokonce

$$I \cap J = \sqrt{IJ}.$$

(4 body)

(3) Buď K algebraicky uzavřené těleso, $n \in \mathbb{N}$ a $V, W \subset K^n$ algebraické množiny. Ukažte, že

$$I(V \cup W) = \sqrt{I(V) \cdot I(W)}.$$

Najděte konkrétní příklad, kdy je radikál napravo potřeba, tj. kdy $I(V \cup W) \neq I(V) \cdot I(W)$.
(3 body)

(4) Buď K libovolné těleso, $n \in \mathbb{N}$ a $V \subset K^n$ neprázdná algebraická množina. Dokažte, že V je ireducibilní, právě když je $I(V)$ prvoideál v $K[x_1, \ldots, x_n]$.
(6 bodů)

(5) Uvažujte obor $\mathcal{O}_K$ pro $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-10}]$.
  (a) Rozložte hlavní ideály (2), (3), (5) a (7) na součin prvoideálů.
  (b) Je $\mathcal{O}_K$ gaussovský obor? Proč?
(8 bodů)