ÚVOD DO KOMUTATIVNÍ ALGEBRY (NMAG305)
DOMÁCÍ ÚKOL č. 2

Termín odevzdání: středa 8. prosince 2021.

(1) Buď U těleso a $G \subset \mathrm{Aut}(U)$ podgrupa. Dokažte (pořádně), že pro libovolné $\varphi \in \mathrm{Aut}(U)$ platí rovnost

$$\mathrm{Fix}(U, \varphi G \varphi^{-1}) = \varphi\big(\mathrm{Fix}(U, G)\big).$$

(5 bodů)

(2) Najděte komplexní číslo α takové, že $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\alpha)$. Určete minimální polynom α nad $\mathbb{Q}$ a všechny jeho komplexní kořeny.

Poznámka: Vše zdůvodněte. Speciálně pak tvrzení typu, že nějaké číslo je/není v nějakém tělese nebo nějaký polynom je/není ireducibilní. Neodkazujte bez důkazu na tvrzení, která nejsou ve skriptech plně dokázána (např. věta 2.29).
(6 bodů)

(3) Buď U rozkladové nadtěleso polynomu $x^7 - 1$ nad $\mathbb{Q}$.
  (a) Popište Galoisovu grupu $\mathrm{Gal}(U/\mathbb{Q})$. Speciálně určete, kolik má prvků, a najděte nějakou množinu generátorů s nejmenším možným počtem prvků.
  (b) Nakreslete, jak vypadá uspořádaná množina mezitěles mezi $\mathbb{Q}$ a U (mezitělesa popište ve tvaru $\mathrm{Fix}(U, H)$ nebo $\mathbb{Q}(\alpha)$ pro konkrétní H nebo α podle toho, co kde bude jednodušší).

(7 bodů)

(4) Buď U rozkladové nadtěleso polynomu $x^8 - 5$ nad $\mathbb{Q}$ a označme $\zeta = e^{\frac{\pi i}{4}}$.
  (a) Ukažte, že $T := \mathbb{Q}(\zeta)$ je podtělesem U.
  (b) Popište Galoisovu grupu $\mathrm{Gal}(U/T)$. Speciálně určete, kolik má prvků, a najděte nějakou množinu generátorů s nejmenším možným počtem prvků.
  (c) Nakreslete, jak vypadá uspořádaná množina mezitěles mezi T a U (mezitělesa opět popište ve tvaru $\mathrm{Fix}(U, H)$ nebo $T(\alpha)$ pro konkrétní H nebo α).

(7 bodů)