ÚVOD DO KOMUTATIVNÍ ALGEBRY (NMAG305)
DOMÁCÍ ÚKOL č. 1

Termín odevzdání: středa 3. listopadu 2021.

(1) Buď R komutativní okruh. Dokažte, že je-li $R[x]$ noetherovský okruh, pak je také R noetherovský okruh.
(5 bodů)

(2) Ukažte, že pro libovolný noetherovský okruh R, přirozené číslo n a ideál $I < R[x_1, \dots, x_n]$ je okruh $R[x_1, \dots, x_n]/I$ noetherovský.
(5 bodů)

(3) Buď R komutativní okruh a I, J komaximální ideály R. Dokažte, že pro libovolnou dvojici přirozených čísel m a n jsou ideály I^m a J^n komaximální.
(5 bodů)

(4) (a) Ukažte, že je-li n přirozené číslo a $T_1, T_2, \dots, T_n$ jsou tělesa, pak má okruh $R = T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_n$ pouze konečně mnoho maximálních ideálů. Tyto maximální ideály popište a ukažte, že jejich průnik je nulový.
(b) Ukažte naopak, že pokud má okruh R pouze konečně mnoho maximálních ideálů a průnik všech těchto ideálů je nulový, pak R je isomorfní direktnímu součinu konečně mnoha těles.
(5 bodů)

(5) Podmnožina S okruhu R se nazývá multiplikativní, pokud $0 \notin S$, $1 \in S$ a kdykoliv $a, b \in S$, pak i $a \cdot b \in S$.
Ukažte, že pro libovolnou multiplikativní množinu $S \subset R$ a ideál $I < R$ takový, že $I \cap S = \emptyset$, existuje *prvoideál* P obsahující I a disjunktní s S (jde o tvrzení 1.25 ze skript).
(5 bodů)