

DETERMINANTY A JEJICH VLASTNOSTI

- PŘÍPOMENUTÍ (TVRZENÍ 7.18 & 7.19) - DETERMINANTY A ELEMENTÁRNÍ ŘÁDKOVÉ ÚPRAVY:

a) $\forall 0 \neq t \in T \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ t \cdot v_i \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = t \cdot \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ v_i \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

(VYNÁSOBENÍ i -TÉHO
ŘÁDKU NEKEROVÝM
SKALÁREM)

b) $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i < j$:

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

(PROHOZENÍ DVOU
ŘÁDKŮ)

c) $\forall t \in T \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$:

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i + t \cdot v_j \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

(PŘÍČTENÍ NÁSOBKU
 j -TÉHO ŘÁDKU K
 i -TÉMU ŘÁDKU)

- T 7.22: BUĎ A ČTVERCOVÁ MATICE NAD T. PAK
 A REGULÁRNÍ $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

- Dk: $A \stackrel{\text{EŘV}}{\sim} \dots \sim C = \begin{bmatrix} \times & & \\ & \times & \\ 0 & & \times \end{bmatrix}_n$ (C HORNÍ TROJÚHELNÍKOVÁ)

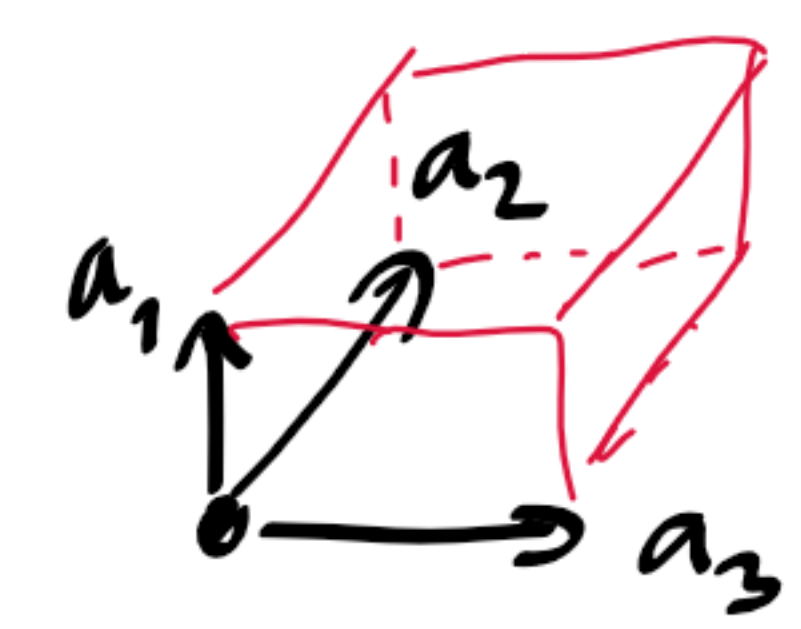
$\uparrow$
 V ODSUPŇOVANÉM
 TVARU

- PAK: $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det(C) \neq 0 \stackrel{T 7.17}{\Leftrightarrow} C \text{ MÁ NA HLAVNÍ DIAGONÁLE VŠECHNY PRVKY } \neq 0$
 $\uparrow$
 VIZTE PŘEDCHOZÍ STRANA

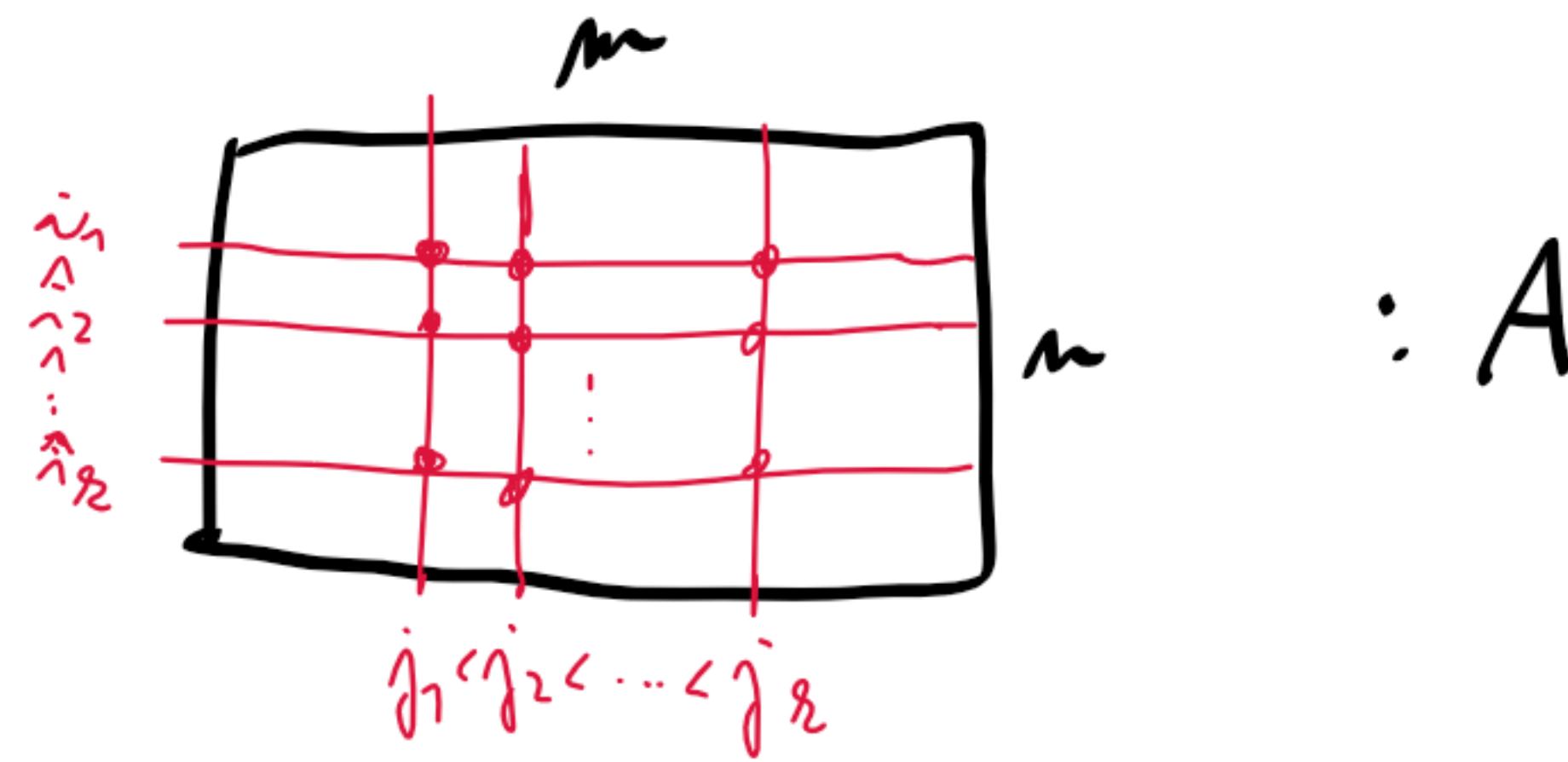
$\Downarrow$ 4.81(5)

A REGULÁRNÍ

- POZN: A MATICE ŘÁDU 3 NAD $\mathbb{R}$, $A = (a_1 | a_2 | a_3)$



- DEF: BUD' A MATICE TYPU $m \times n$ NAD T .
 PAK MINOR MATICE A ŘÁDU $k \geq 1$ JE DETERMINANT ČTVERCOVÉ MATICE
 ŘÁDU k , KTERÁ VZNIKNE Z A VYPUŠTĚNÍM NĚKTERÝCH ŘÁDKŮ
 A SLOUPCŮ.



- T7.25: A MATICE TYPU $m \times n$ NAD T . PAK HODNOST A JE ROVNA
 NEJVĚTŠÍMU $k \geq 1$ TAKOVÉMU, ŽE NĚJAKÝ MINOR ŘÁDU k JE $\neq 0$.

- DK (NÁZNAK): $A \sim \begin{smallmatrix} \text{ERÚ} \\ \dots \end{smallmatrix} \sim C = \begin{bmatrix} \bullet & & & \\ & \bullet & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \bullet \end{bmatrix} \} \text{rank}(C) = \text{rank}(A)$

- VYUŽIJEME 2 POZOROVÁNÍ:

- PRO C ZÁVĚR TVRZENÍ PLATÍ
- HODNOST MATICE ANI ČÍSLO k Z FORMULACE TVRZENÍ SE NEHĚNÍ ERÚ

ověřní!



- DETERMINANT A ∈ ℝⁿ PODROBNĚJI

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ \boxed{t \cdot v_i} \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \boxed{t} \cdot \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ v_i \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \det(E_1) \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ v_i \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \boxed{v_j} \\ \vdots \\ \boxed{v_i} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \boxed{v_i} \\ \vdots \\ \boxed{v_j} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \det(E_2) \cdot \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \boxed{v_i} \\ \vdots \\ \boxed{v_j} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i + t \cdot v_j \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ \boxed{v_j} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \det(E_3) \cdot \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ \boxed{v_j} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

ELEMENTÁRNÍ MATICE

$$\det \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{t} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = \boxed{t}$$

E_1

$$\det \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{1} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{1} & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = -1$$

E_2

$$\det \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & t & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = 1$$

E_3

- ZÁVĚR: POKUD A JE ZTVEROVÁ MATICE A ∈ JE ELEMENTÁRNÍ MATICE,
OBĚ RÁDU n, PAK:

$$\boxed{\det(EA) = \det(E) \cdot \det(A)}$$

- T7.26: BUĎTE A, B ČTVERCOVÉ MATICE ŘÁDU n NAD T . PAK
$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

- Dk: - ROZEBERE ME Z PŘÍPADŮ:

(1) A JE REGULÁRNÍ: PAK $A = E_1 \overset{T4.88}{\underbrace{E_2 \cdots E_t}_C}$, E_i ELEMENTÁRNÍ MATICE
• VZORC $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ DOKÁŽEME INDUKCÍ PODLE t :

• $t=1$: VŽE VHI ME

• $t>1$: $\det(A \cdot B) = \det(E_1 \cdot C \cdot B) = \det(E_1) \cdot \det(C \cdot B) =$

$$= \det(E_1) \cdot \det(C) \cdot \det(B) = \det(E_1 \cdot C) \cdot \det(B) =$$

$$= \det(A) \cdot \det(B)$$

INDUKČNÍ PŘEDPOKLAD
 $C = \underbrace{E_2 \cdot E_3 \cdots E_t}_{t-1 \text{ ELEM. MATIC}}$

(2) A NENÍ REGULÁRNÍ: PAK ANI $A \cdot B$ NENÍ REGULÁRNÍ
($\text{rank}(A \cdot B) \leq \text{rank}(A) < n$)

$$\Rightarrow \det(A) = 0 = \det(A \cdot B) \quad \Rightarrow \quad \det(A \cdot B) = 0 = 0 \cdot \det(B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

- DETERMINANT INVERZNÍ MATICE:

- DŮSLEDEK 7.27: DOKUD JE A REGULÁRNÍ, PAK

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$$

- DŮK: $1 = \det(I_n) = \det(A \cdot A^{-1}) \stackrel{7.26}{=} \det(A) \cdot \det(A^{-1}) \quad \forall T$

$$\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

- OTÁZKA: MÁME-LI SLR $Ax = b$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ŘEŠENÍ
 $\leadsto$ LZE x VYJÁDŘIT VZOREČKAMI POMOČÍ a_{ij}, b_j ?

- V 7.28 (CRAMEROVO PRAVIDLO): BUĎ $A = (a_1 | a_2 | \dots | a_n)$ REGULÁRNÍ MATICE ŘÁDU n .
BUĎ $b \in T^n$ A $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ŘEŠENÍ $Ax = b$. PAK

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}: x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \quad \text{KDE}$$

$$A_j = \left(a_1 \mid \dots \mid a_{j-1} \mid b \mid a_{j+1} \mid \dots \mid a_n \right)$$

- DK: • TO, ŽE $Ax = b$, MŮŽEME PŘEPISAT DO TVARU $b = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$

$$\bullet \det(A_j) = \det \left(a_1 \mid a_2 \mid \dots \mid \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i a_i}_{=0 \text{ PRO } i \neq j} \mid \dots \mid a_n \right) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \det \left(a_1 \mid \dots \mid \underbrace{a_i}_{=0 \text{ PRO } i \neq j} \mid \dots \mid a_n \right) = x_j \cdot \underbrace{\det(A)}_{\neq 0}$$

- POSLEDNÍ CÍL DNEŠ: VZOREČEK PRO PRVKY INVERZNÍ MATICE A^{-1} Z PRVKŮ A

- BUĎ A ČTVERCOVÁ MATICE ŘÁDU n NAD T

- PRO $i, j \in \{1, \dots, n\}$ OZNAČME M_{ij} MATICI VZNIKLOU Z A VYNGCHÁNÍM i -TÉHO ŘÁDKU A j -TÉHO SLOUPCE

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

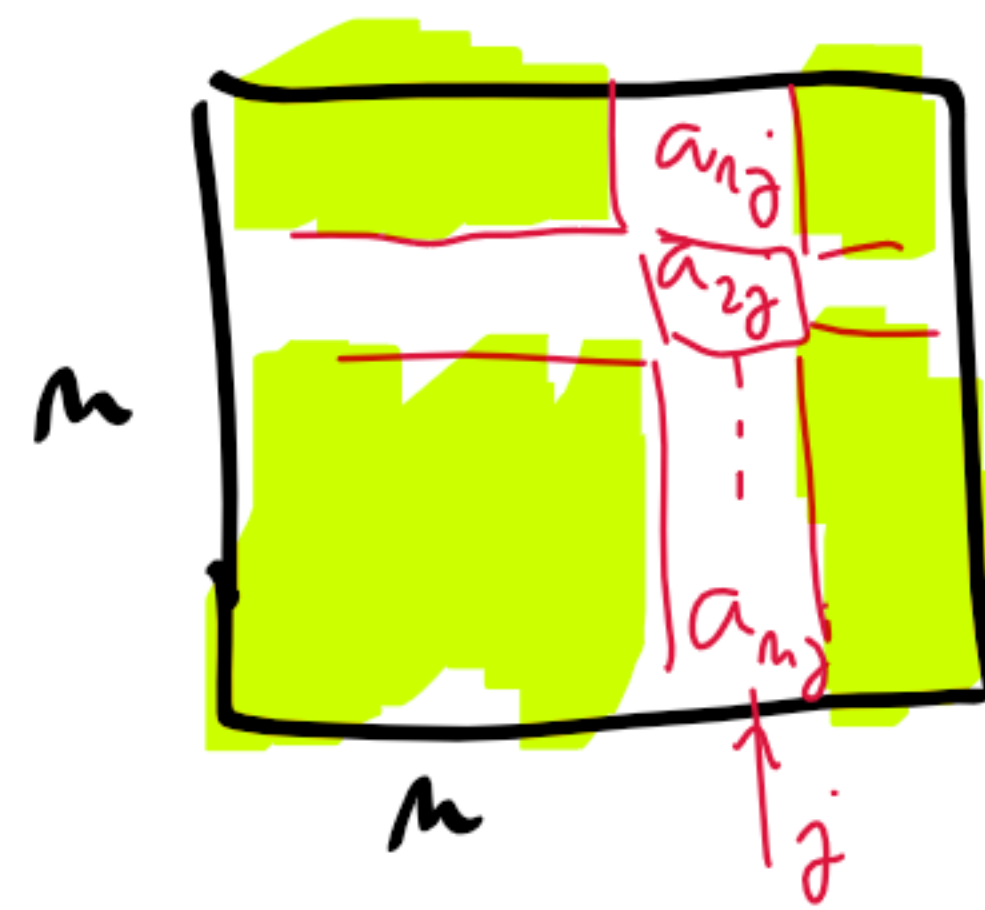
- DEF: ALGEBRAICKÝ DOPLŇKEM (TÉŽ KOFAKTOREM) PRVKU a_{ij} V A ROZUMÍME

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

-V 7.32 (o rozvoji podle sloupce) BUD' A ČTVERCOVÁ ŘÁDU n , $j \in \{1, \dots, n\}$.
 PAK $\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$ $A = (a_1 | a_2 | \dots | a_n)$

-OBRAZEK:



-Dk: I. SPECIÁLNÍ PŘÍPAD: $j = n$, $a_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T$. $A = \left(\begin{array}{c|c} M_{nn} & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \end{array} \right)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det(A) &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(n-1),n-1} \underbrace{a_{\pi(n),n}}_{\substack{\neq 0 \text{ pokud } \pi(n)=n \\ \downarrow}} = \\ &= \sum_{\pi \in S_n, \pi(n)=n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(n-1),n-1} = \\ &= \sum_{\pi \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(n-1),n-1} = (-1)^{n+n} \det M_{nn} = A_{nn} = a_{nn} \cdot A_{nn} \end{aligned}$$

I. SPECIÁLNÍ PŘÍPAD:

$$j = n, \quad a_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T. \quad A = \left(\begin{array}{c|c} M_{nn} & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline * & 1 \end{array} \right)$$

≠ 0 pokud $\pi(n) = n$

$$\Rightarrow \det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n-1),n-1} \underbrace{a_{\pi(n),n}}_{\substack{\downarrow \\ \neq 0 \text{ pokud } \pi(n)=n}} =$$

$$= \sum_{\pi \in S_n, \pi(n)=n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n-1),n-1} =$$

$$= \sum_{\pi \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n-1),n-1} = (-1)^{n+n} \det M_{nn} = A_{nn} = a_{nn} \cdot A_{nn}$$

II. SPECIÁLNÍ PŘÍPAD:

j LIBOVOLNÉ, $a_j = e_i, T.$!

$$A = \left(\begin{array}{c|c} & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline * & 1 \\ \hline & \vdots \\ & 0 \end{array} \right)$$

- BUĎ B MATICE VZNIKÁ Z A POSUNUTÍM i -TÉHO ŘÁDKU NA n -TÝ
A j -TÉHO SLOUPCE NA n -TÝ, T !

$$B = \left(\begin{array}{c|c} M_{ij} & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline * & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} - \text{PAK } \det(A) &= \operatorname{sgn}(i \cdots n-1 \ n) \cdot \operatorname{sgn}(j \cdots n-1 \ n) \cdot \det B = (-1)^{n-i} (-1)^{n-j} \det M_{ij} = (-1)^{2n-i-j} \cdot \det M_{ij} \\ &= (-1)^{i+j} \cdot \det M_{ij} = A_{ij} = a_{ij} \cdot A_{ij} \end{aligned}$$

- III. OBECNÝ PŘÍPAD : $j \in \{1, \dots, n\}$, $A = (a_1 | \dots | a_j | \dots | a_n)$, $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$

- PAK : $a_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot e_i$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det A &= \det \left(a_1 | \dots | \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i | \dots | a_n \right) = \\ &= \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot \det \left(a_1 | \dots | \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{e_i} | \dots | a_n \right) = \sum_{i=1}^m a_{ij} A_{ij} \quad \square \end{aligned}$$

- VÍNE : $\det(A) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot A_{ij}$

- V 7.36 (O FALŠNÉM ROZVOJÍ) : PRO $j, k \in \{1, \dots, n\}$, $j \neq k$, PAK $\left(A = (a_1 | \dots | a_n) \right)$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} A_{ik} = 0$$

- PK : BUĎ B MATICE, KTERÁ VZNIKNE Z A NAHRAZENÍM k -TÉHO STUPCE Vektorem a_j

$$B = \left(a_1 | \dots | \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{a_j} | \dots | \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{a_j} | \dots | a_n \right) , \text{ PAK } 0 = \det(B) \overset{\text{V 7.32}}{=} \underset{\substack{\text{PODE} \\ \text{STUPCE } k}}{\quad} \sum a_{ij} \cdot A_{ik}$$

- POZOROVÁNÍ: UVAŽUJME ČTVERCOVOU Matici $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$

A TŽV. ADJUNGOVANOU Matici $\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \vdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \vdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \vdots & A_{nn} \end{pmatrix} = (A_{ij})^T$

- PAK $A \cdot \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \det(A) \end{pmatrix} = \det(A) \cdot I_n = \text{adj}(A) \cdot A$

- VĚT. 38: JE-LI A ČTVERCOVÁ, PAK

$$A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n = \text{adj}(A) \cdot A$$

SPECIÁLNĚ, JE-LI A REGULÁRNÍ, PAK

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$$