PLÁN DNE:

- DOKONČENÍ ZNAMÉNKA PERMUTACÍ
- OBECNÁ DEFINICE A VLASTNOSTI DETERMINANTU

– PŘIPOMENUTÍ: X KONEČNÁ $\Rightarrow$ KAŽDÁ $\pi \in S_X$ LZE ZAPSAT (NEJEDNOZNAČNĚ) JAKO SLOŽENÍ TRANSPOZIC, TJ. $\pi = (x_1\, y_1)\circ(x_2\, y_2)\circ \dots \circ(x_k\, y_k)$

– T7.7: BUĎ X KONEČNÁ, $\pi = \underbrace{\pi_1 \circ \dots \circ \pi_\ell}_{\text{NEZÁVISLÉ CYKLY, VŠECHNY 1-CYKLY JSOU PŘÍTOMNY}}$ A $x \neq y$, $x, y \in X$. PAK

(NAPŘ. $(1\,2\,4\,8)(3\,5)(7)(6) \in S_8$)

(1) POČET CYKLŮ V OBDOBNÉM ZÁPISU $(x\,y)\circ\pi$ JE $\ell \pm 1$,

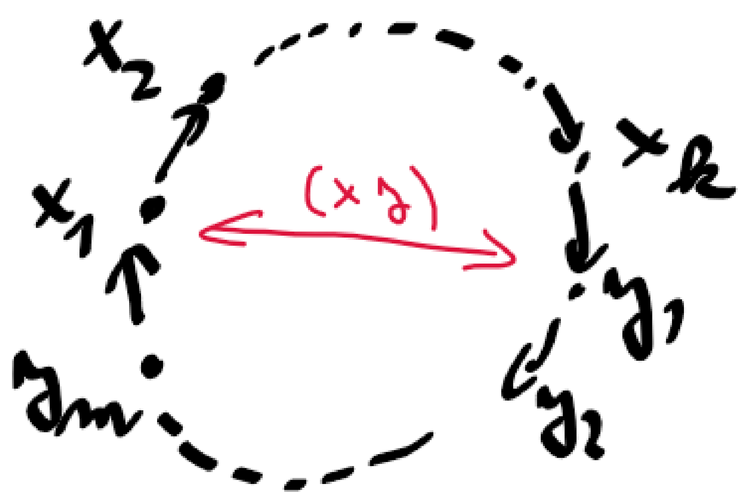
(2) POČTY SUDÝCH CYKLŮ V ZÁPISU π A $(x\,y)\circ\pi$ SE TAKÉ LIŠÍ O 1.

– DK:

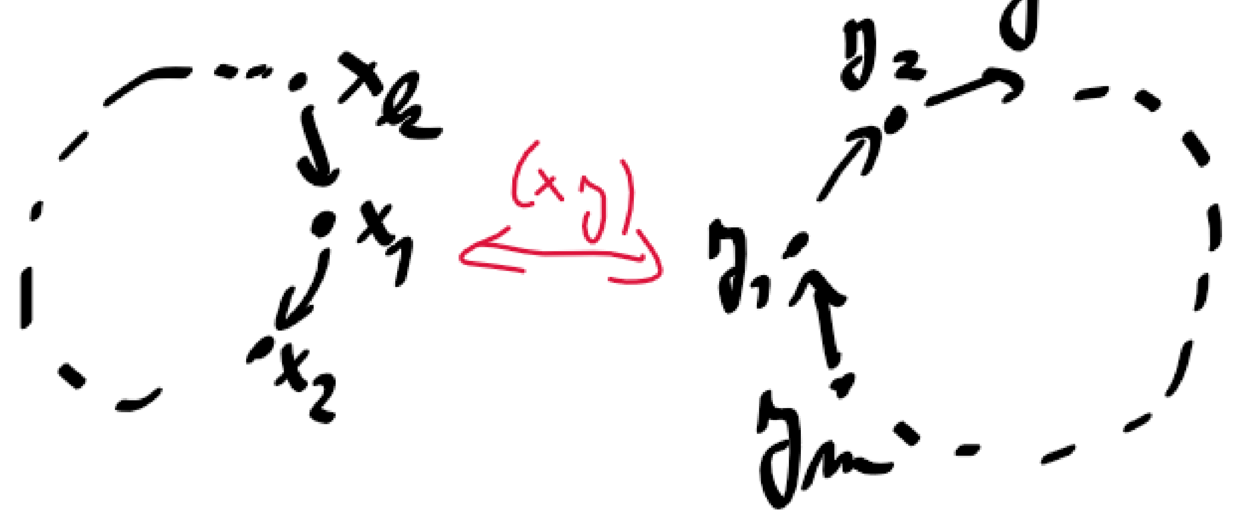
- x, y JSOU VE STEJNÉM CYKLU π_i:
- BÚNO $i=1$, $\pi_1 = (\underset{x}{\underset{\shortparallel}{x_1}} \dots x_k\, \underset{y}{\underset{\shortparallel}{y_1}} \dots y_m)$

$\Rightarrow (x\,y)\circ\pi = (x_1 \dots x_k)(y_1 \dots y_m)\, \pi_2 \dots \pi_\ell$

π_1:



- x, y JSOU V RŮZNÝCH CYKLECH π_i, π_j
- PODOBNĚ, BÚNO $i=1$, $j=2$, $\pi_1 = (\underset{x}{\underset{\shortparallel}{x_1}} \dots x_k)$, $\pi_2 = (\underset{y}{\underset{\shortparallel}{y_1}} \dots y_m)$



$\square$

- **DŮSL 7.8**: JE-LI X KONEČNÁ MNOŽINA A $\pi = (x_1 y_1) \circ \dots \circ (x_\ell y_\ell)$, PAK NASTANE PRÁVĚ 1 Z NÁSLEDUJÍCÍCH MOŽNOSTÍ:

1. CYKLICKÝ ZÁPIS π MÁ SUDÝ POČET CYKLŮ SUDÉ DÉLKY A ℓ JE SUDÉ.

2. CYKLICKÝ ZÁPIS π MÁ LICHÝ POČET CYKLŮ SUDÉ DÉLKY A ℓ JE LICHÉ.

POTOM KAŽDÝ ZÁPIS π JAKO SLOŽENÍ TRANSPOZIC MUSÍ SESTÁVAT V PŘÍP. (1) ZE SUDÉHO A V PŘÍP. (2) Z LICHÉHO POČTU TRANSPOZIC (Z JEDNOZNAČNOSTI CYKLICKÉHO ZÁPISU).

- **DEF**: ZNAMÉNKO PERMUTACE $\pi \in S_X$, X KONEČNÁ:

$$\operatorname{sgn}(\pi) = \begin{cases} 1 & \dots \text{ PŘÍPAD (1)} \quad (\pi \text{ JE SUDÁ}) \\ -1 & \dots \text{ PŘÍPAD (2)} \quad (\pi \text{ JE LICHÁ}) \end{cases}$$

- **T 7.11**: X KONEČNÁ MNOŽINA, $\pi, \varrho \in S_X$. PAK PLATÍ:

1. $sgn(id_X) = 1$
2. $sgn(\pi^{-1}) = sgn(\pi) \quad (= sgn(\pi)^{-1})$
3. $sgn(\pi \circ \varrho) = sgn(\pi) \cdot sgn(\varrho)$

- $|X| = n \quad \Rightarrow \quad |S_X| = n!$

$$\left|\{\pi \in S_X : \pi \text{ SUDÁ}\}\right| = \frac{n!}{2} = \left|\{\pi \in S_X : \pi \text{ LICHÁ}\}\right| \quad (\text{PRO } n > 2)$$

DETERMINANTY A JEJICH VLASTNOSTI

- **DEF:** BUĎ $A = (a_{ij})$ ČTVERCOVÁ MATICE ŘÁDU n NAD T. PAK **DETERMINANT** A JE NÁSLEDUJÍCÍ PRVEK T:

$$\underbrace{\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{ZNAČENÍ}} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n),n}$$

- **PŘ:**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = + \underbrace{a_{11} \cdot a_{22}}_{id_{\{1,2\}}} - \underbrace{a_{21}\, a_{12}}_{(1\ 2)}$$

$$\boxed{a_{id(1),1} \cdot a_{id(2),2}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \text{----}$$

CVIČENÍ, 6 ČLENŮ, SARRUSOVO PRAVIDLO

- ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI:

- POZOROVÁNÍ! $A = (a_{ij})$ ŘÁDU n, PAK

$\det(A^T)$ PŘÍMO Z DEFINICE

$$\det(A) = \boxed{\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)}}$$

- TOTIŽ (VIZTE DŮKAZ T 7.18):

PŘEHÁZENÍ ČINITELŮ VE ČLENECH

$$\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{1,\pi(1)} \cdots a_{n,\pi(n)} =$$

$$\sum_{\pi \in S_n} \underbrace{\operatorname{sgn}(\pi)}_{=\operatorname{sgn}(\pi^{-1})} \cdot a_{\pi^{-1}(1),1} \cdots a_{\pi^{-1}(n),n} =$$

$$\sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) \cdot a_{\rho(1),1} \cdots a_{\rho(n),n}$$

= ZNAMENÁ PŘESNĚ, ŽE

- T 7.18: $\det(A) = \det(A^T)$

- **T7.19**: BUĎ T TĚLESO, $n \in \mathbb{N}$, $v_1, \dots, v_n, w \in T^n$, $t \in T$. PAK PLATÍ:

(1) $\forall i$: $\det(v_1 | \dots | v_{i-1} | v_i + w | v_{i+1} | \dots | v_n) = \det(v_1 | \dots | v_{i-1} | v_i | v_{i+1} | \dots | v_n) +$

$\det(v_1 | \dots | v_{i-1} | w | v_{i+1} | \dots | v_n)$

(2) $\forall i$: $\det(v_1 | \dots | v_{i-1} | t \cdot v_i | v_{i+1} | \dots | v_n) = t \cdot \det(v_1 | \dots | v_{i-1} | v_i | v_{i+1} | \dots | v_n)$

(3) $\forall \rho \in S_n$: $\det(v_{\rho(1)} | \dots | v_{\rho(n)}) = \mathrm{sgn}(\rho) \cdot \det(v_1 | \dots | v_n)$

(4) JE-LI $v_i = v_j$ PRO NĚJAKÁ $i \neq j$, PAK $\det(v_1 | \dots | v_n) = 0$

(5) JE-LI $i \neq j$, PAK $\det(v_1 | \dots | v_{i-1} | v_i + t v_j | v_{i+1} | \dots | v_n) = \det(v_1 | \dots | v_n)$

- DŮKAZ:

1.

$$\underbrace{\det\left(v_1 \middle| \dots \middle| v_{i-1} \middle| v_i + u \middle| v_{i+1} \middle| \dots \middle| v_n\right)}_{B} = \underbrace{\det\left(v_1 \middle| \dots \middle| v_{i-1} \middle| v_i \middle| v_{i+1} \middle| \dots \middle| v_n\right)}_{A} + \underbrace{\det\left(v_1 \middle| \dots \middle| v_{i-1} \middle| u \middle| v_{i+1} \middle| \dots \middle| v_n\right)}_{C}$$

- OZNAČME $A = (a_{ij}) = \left(v_1 \middle| \dots \middle| v_i \middle| \dots \middle| v_n\right)$, TJ. $v_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$, OZNAČME $u = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ $B = \begin{pmatrix} a_{11} \dots & (a_{1i} + b_1) & \dots & a_{1n} \\ a_{21} \dots & (a_{2i} + b_2) & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \end{pmatrix}$,

$$\det B = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(i-1),i-1} \cdot \left(a_{\pi(i),i} + b_{\pi(i)}\right) \cdot a_{\pi(i+1),i+1} \cdots a_{\pi(n),n} =$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} \left(\operatorname{sgn}\pi \cdot a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(i),i} \cdots a_{\pi(n),n} + \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdots b_{\pi(i)} \cdots a_{\pi(n),n}\right)$$

$$= \left(\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}\pi \cdot a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(i),i} \cdots a_{\pi(n),n}\right) + \left(\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdots b_{\pi(i)} \cdots a_{\pi(n),n}\right)$$

$$= \det(A) + \det(C)$$

---

2. PODOBNÝ, JEDNODUŠŠÍ!

- DŮKAZ:

(3) $\forall \rho \in S_n: \quad \det\underbrace{\left(v_{\rho(1)} \middle| \dots \middle| v_{\rho(n)}\right)}_{B} = \operatorname{sgn}(\rho) \cdot \det\underbrace{\left(v_1 \middle| \dots \middle| v_n\right)}_{A}$

- OZNAČME $A = (v_1 | \dots | v_n) = (a_{ij})$, PAK $B = (a_{i\,\rho(j)})$

$$\Rightarrow \det(B) = \sum_{\pi \in S_n} \underbrace{\operatorname{sgn}(\pi)}_{= \operatorname{sgn}(\rho)\cdot\operatorname{sgn}(\pi\rho)} \cdot a_{1,\pi(\rho(1))}\, a_{2,\pi(\rho(2))} \dots a_{n,\pi\rho(n)} =$$

$\operatorname{sgn}(\rho)\cdot\operatorname{sgn}(\pi\rho) = \operatorname{sgn}(\pi\rho)\cdot\operatorname{sgn}(\rho^{-1}) = \operatorname{sgn}(\pi\rho\cdot\rho^{-1}) = \operatorname{sgn}(\pi)$

$$\operatorname{sgn}(\rho) \cdot \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi\rho)\, a_{1,\pi\rho(1)} \dots a_{n,\pi\rho(n)} =$$

$\sigma = \pi\circ\rho \iff \pi = \sigma\circ\rho^{-1}$

$$\operatorname{sgn}(\rho) \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)} = \operatorname{sgn}(\rho) \cdot \det(A)$$

---

(4) JE-LI $v_i = v_j$ PRO NĚJAKÁ $i \neq j$, PAK $\det\underbrace{\left(v_1 \middle| \dots \middle| v_n\right)}_{A = (a_{kj})} = 0 \quad (n \geq 2)$

- TJ. $a_{ki} = a_{kj}$

- PAK $\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(n),n} =$

$(i\,j)\circ\rho = (i\,j)^{-1}\circ\rho = \pi$

$$= \sum_{\substack{\pi \in S_n,\\ \operatorname{sgn}(\pi)=1,\\ \rho = (i\,j)\circ\pi}} \left(\operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(n),n} + \underbrace{\operatorname{sgn}(\rho)}_{\operatorname{sgn}((i\,j))\cdot\operatorname{sgn}(\pi) = -\operatorname{sgn}(\pi)} \cdot a_{\rho(1),1} \dots a_{\rho(n),n} \right) =$$

$$= \sum_{\pi \in S_n,\ \pi \text{ sudá}} 0 = 0$$

– DŮKAZ:

(5) JE-LI $i \neq j$, PAK $\det(v_1 | \dots | v_{i-1} | v_i + t v_j | v_{i+1} | \dots | v_n) = \det(v_1 | \dots | v_n)$

– JE TO PŘÍMÝ DŮSLEDEK (1), (2) A (4)

– T 7.17: JE-LI $A = (a_{ij})$ HORNÍ TROJÚHELNÍKOVÁ, PAK

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

$$\left(A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \vdots \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix} \right)$$