

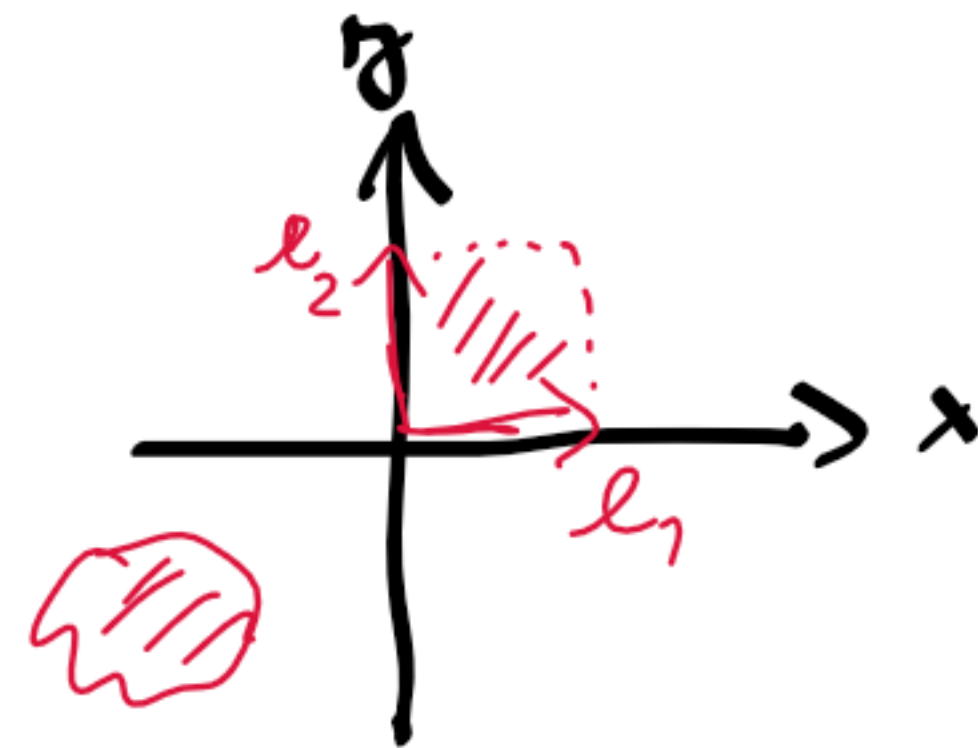
MOTIVACE K DETERMINANTŮM A PERMUTACI

- V TÉTO PŘEDNÁŠCE $T = \mathbb{R}$

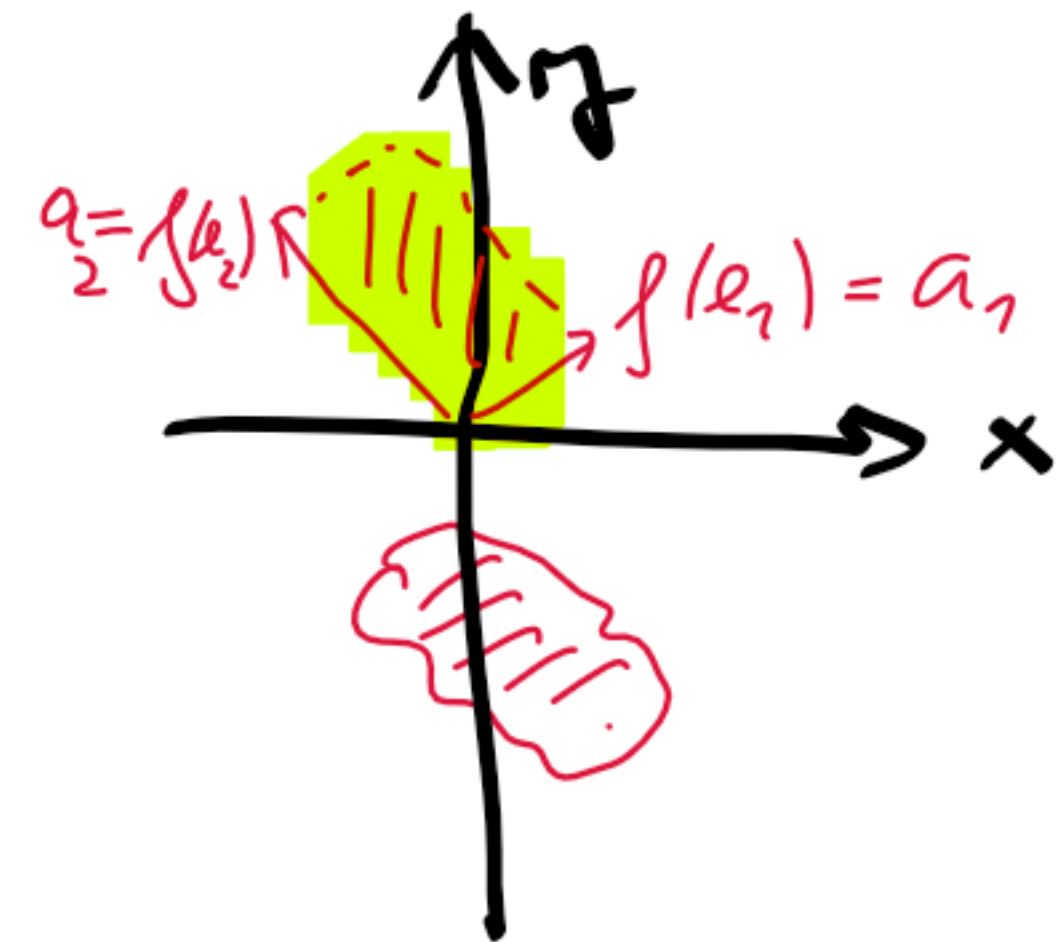
- DETERMINANTY MATIC 2×2

- UVAŽUJME LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ $f = f_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $A = (a_1 | a_2) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

JAK f MĚNÍ
OBSAHY?



f_A



$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

- DEFINUJEME $\det A := a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

↑
DETERMINANT
MATICE A

- POINTA: $\det A$ POČÍTÁ AŽ NA ZNÁMENKO OBSAH ZVÝRAZNĚNÉHO ROVNOBĚŽNÍKU.

- JAK SE K TOMU POUŽE?

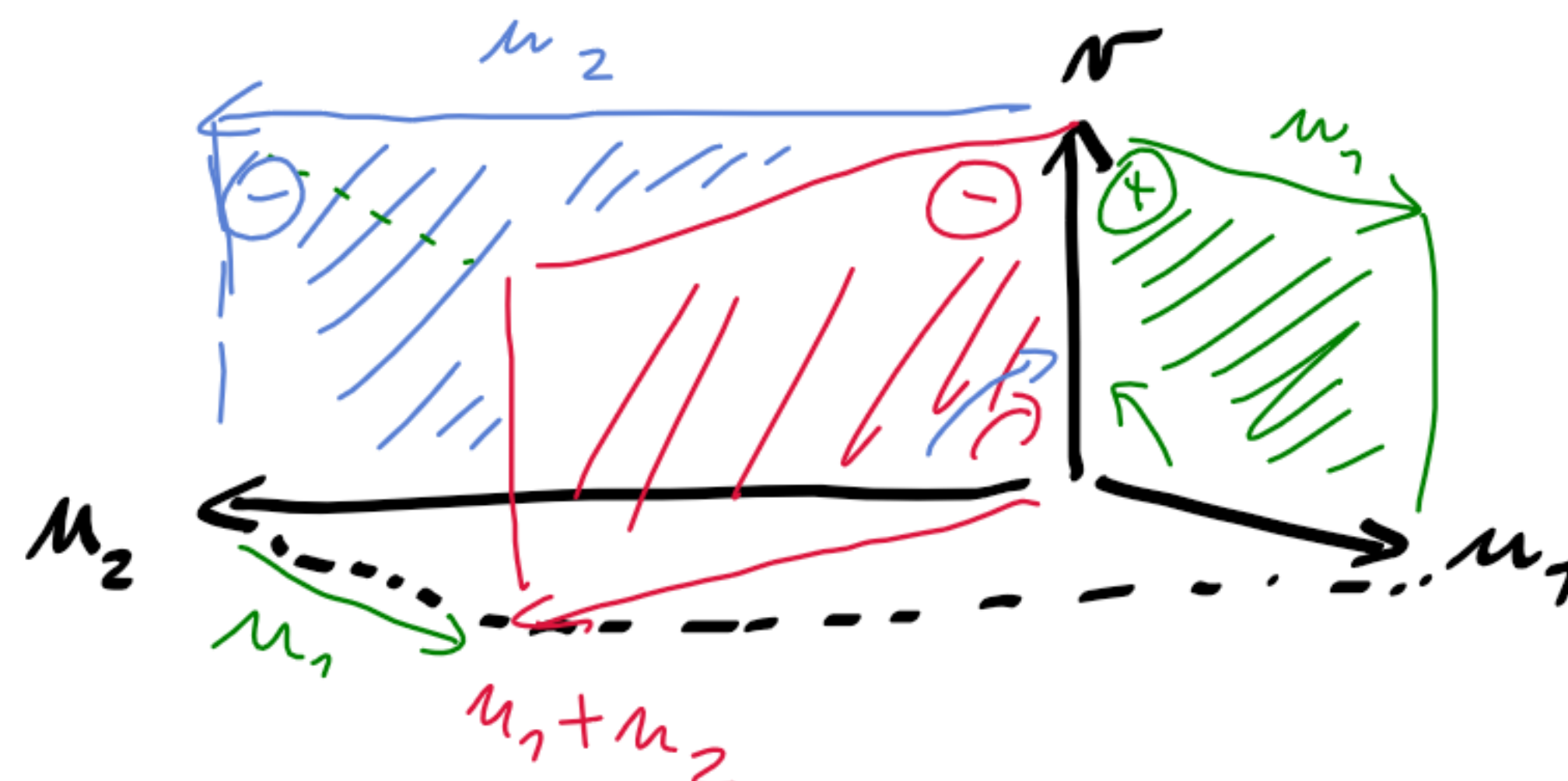
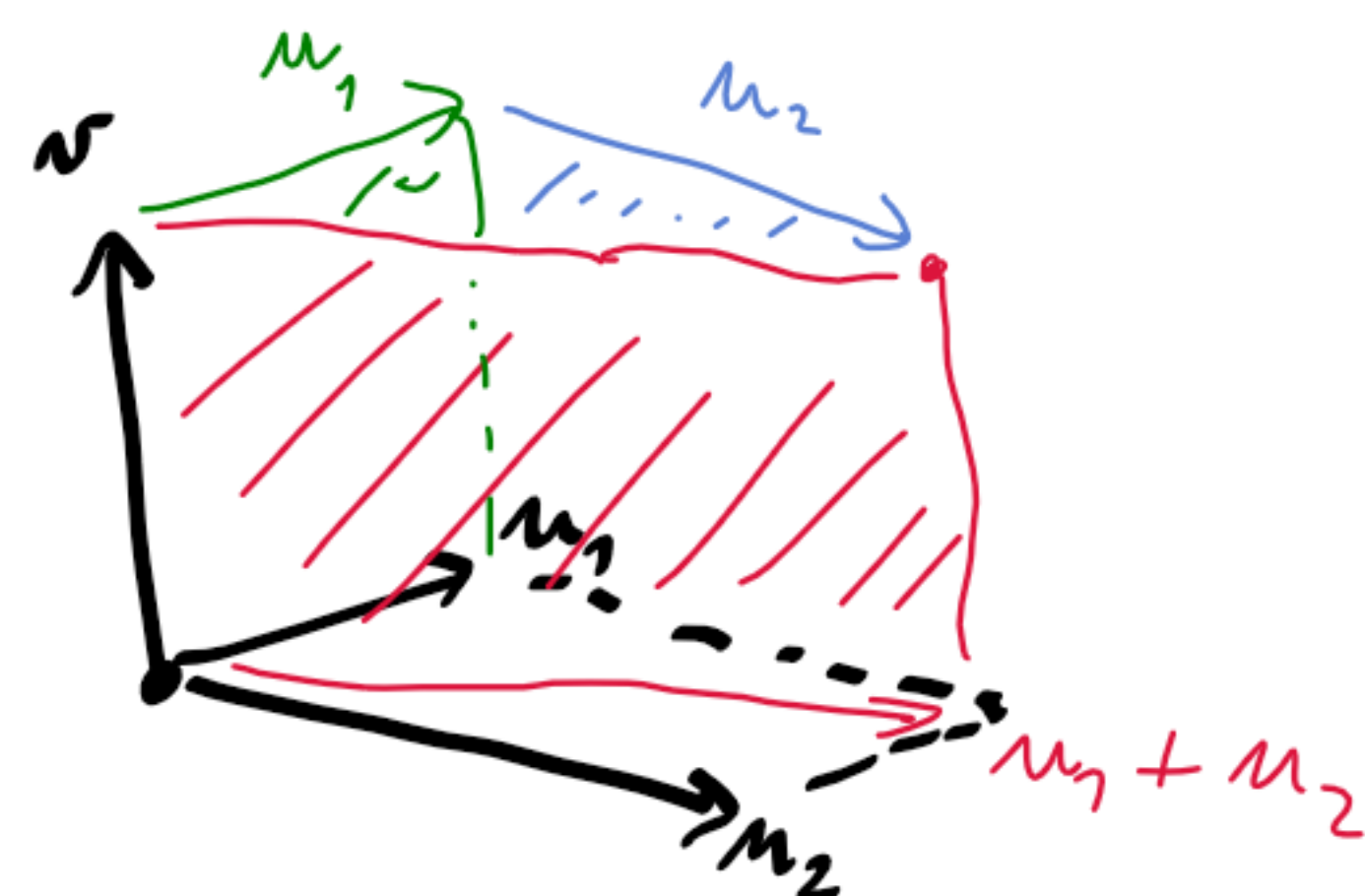
$$u, v \in \mathbb{R}^2$$

$$|\det(u|v)| = \text{OBSAH}$$

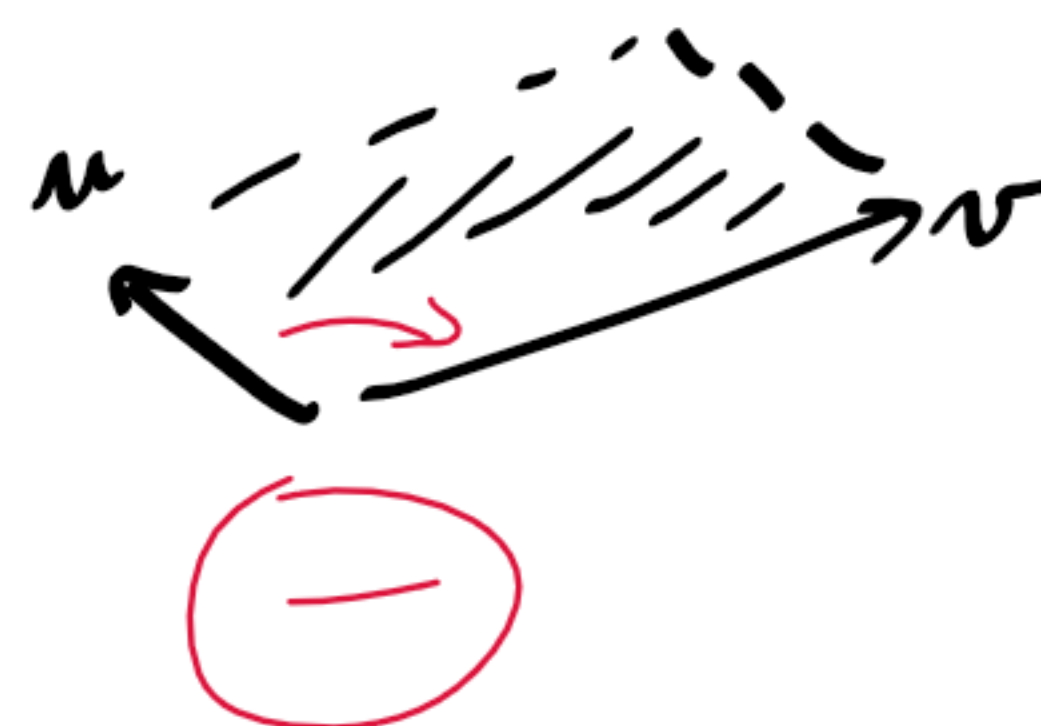
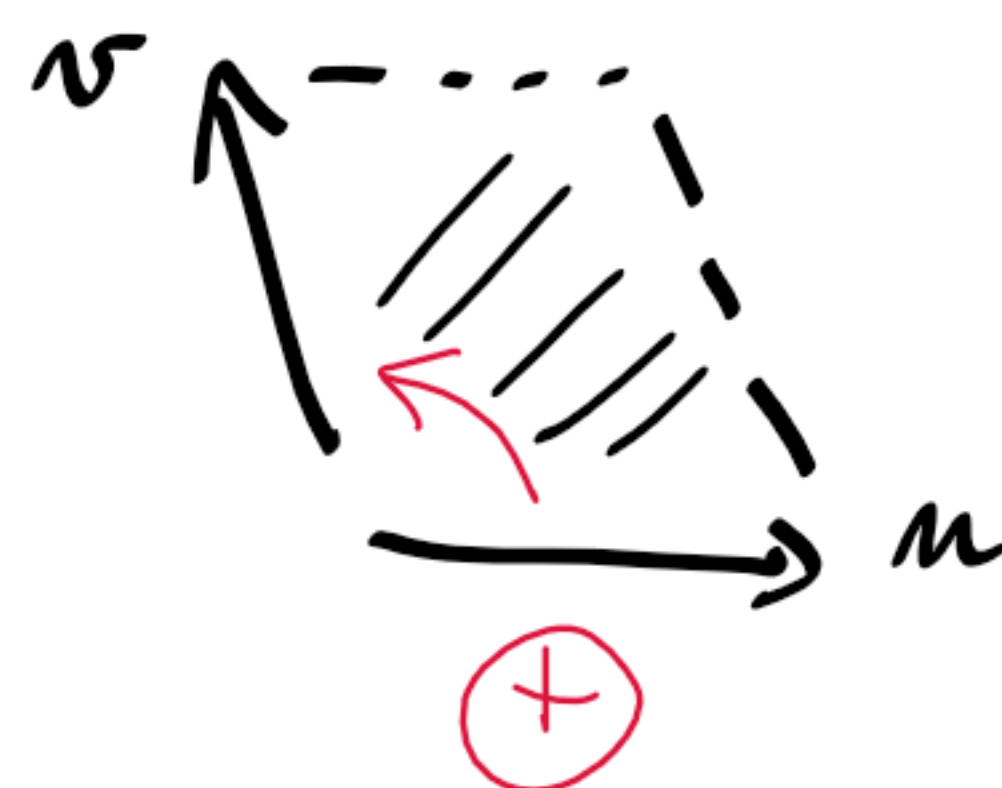


-VLASTNOSTI:

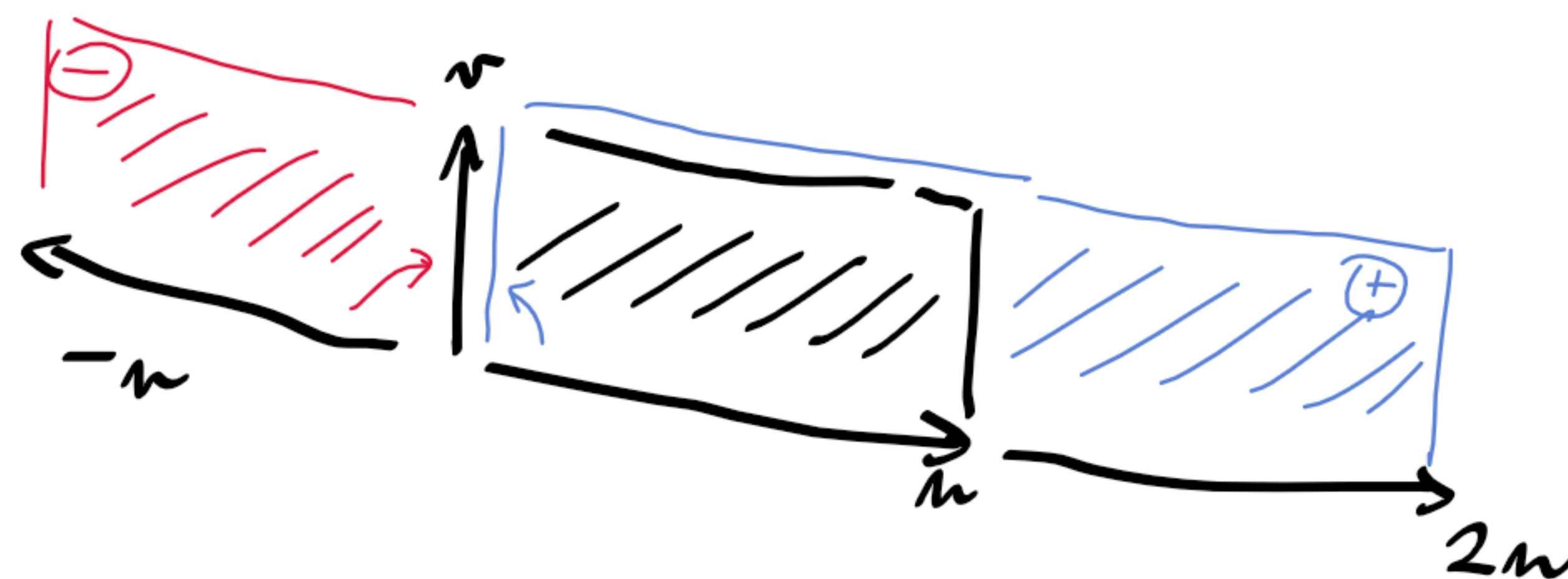
- $\text{del}(n_1 + n_2 | v) = \text{del}(n_1 | v) + \text{del}(n_2 | v)$ A TOTÉŽ PLATÍ PRO OBSAH (ZNAMÉNKA!)



- PRAVIDLO PRO ZNAMÉNKO ORIENTOVANÉHO OBSAHU



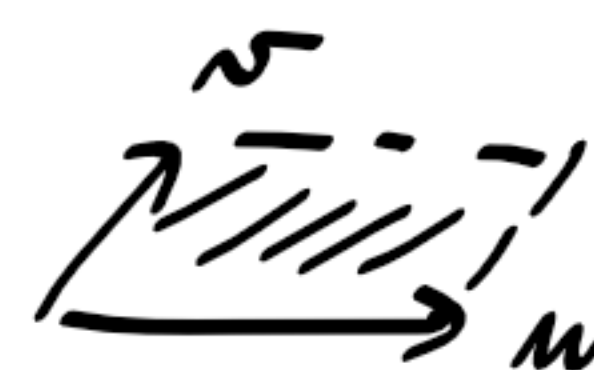
- $\text{del}(t \cdot n | v) = t \cdot \text{del}(n | v)$ A TOTÉŽ PRO ORIENTOVANÝ OBSAH:



- ANALOGICKY: $\text{del}(n | v_1 + v_2) = \text{del}(n | v_1) + \text{del}(n | v_2)$ A $\text{del}(n | t v_1) = t \cdot \text{del}(n | v_1)$, PRO OBSAHY

- PROČ JE DETERMINANT ROVEN ORIENTO VANÉMU OBSAHU?

• BUĎ $A = (u|v) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$



$$\Rightarrow \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

• PAK $\det(u|v) = \det(a_{11} \cdot e_1 + a_{21} \cdot e_2 | a_{12} \cdot e_1 + a_{22} \cdot e_2) =$

$$a_{11} a_{12} \cdot \underbrace{\det(e_1|e_1)}_{=0} + a_{11} a_{22} \cdot \underbrace{\det(e_1|e_2)}_{=1} + a_{21} a_{12} \cdot \underbrace{\det(e_2|e_1)}_{=-1} + a_{21} a_{22} \cdot \underbrace{\det(e_2|e_2)}_{=0}$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = \text{ORIENTO VANÝ OBSAH ROVNOBĚŽNÍKU}$$

$$\det(a_{11} e_1 + a_{21} e_2 | \dots) = \det(a_{11} e_1 | \dots) + \det(a_{21} e_2 | \dots) =$$

$$= a_{11} \cdot \det(e_1 | \dots) + a_{21} \cdot \det(e_2 | \dots)$$

$$= \underline{a_{11} \cdot \det(e_1 | a_{12} e_1 + a_{22} e_2)} + \dots$$

$$= \underline{a_{11} a_{12} \cdot \det(e_1|e_1) + a_{11} a_{22} \det(e_1|e_2)} + \dots$$

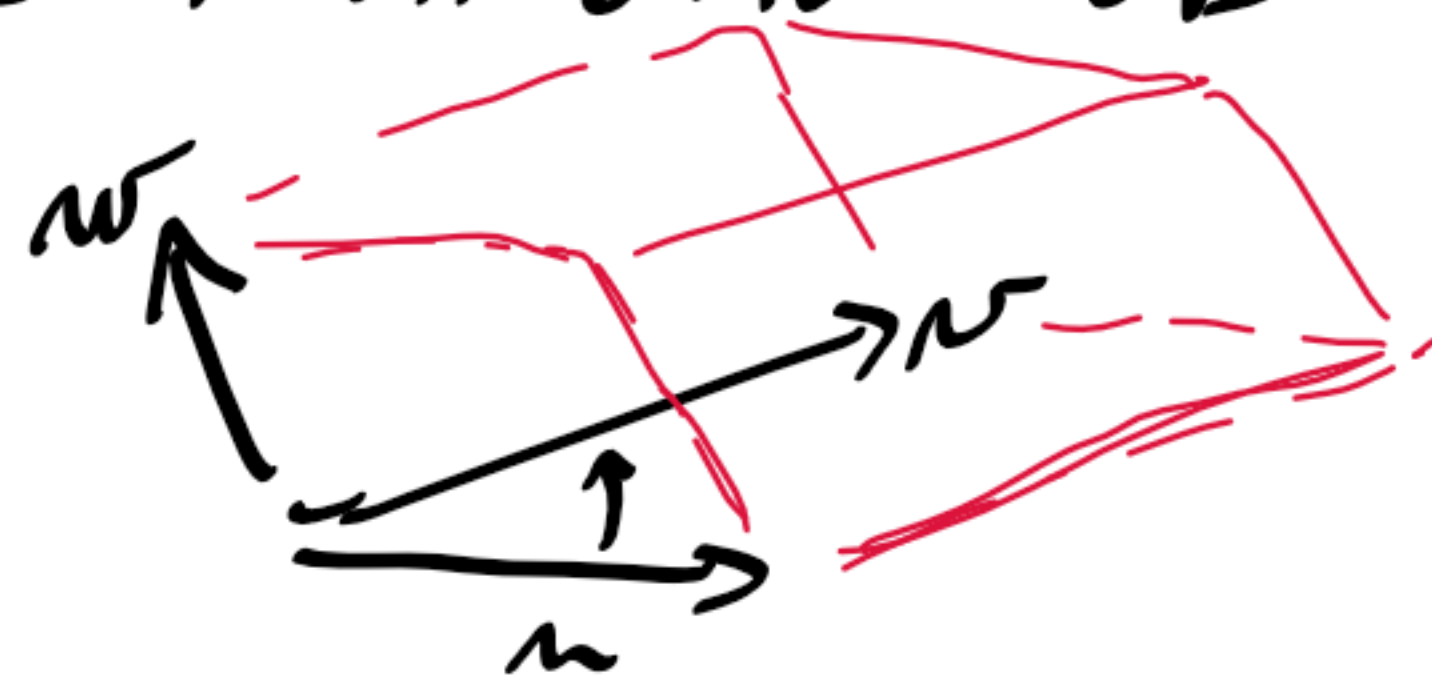
- VELICE STRUČNĚ PRO MATICE 3×3

$$\bullet A = \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{matrix}$
 $\begin{matrix} + \\ + \\ + \end{matrix}$

$$\bullet \text{POLOŽÍME } \det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

$$\bullet \text{DPĚT: } \det A = \text{ORIENTO VANÉHU OBJEKTU ROVNOBĚŽNOSTĚNU V } \mathbb{R}^3$$



$\bullet$ PRO $\det$ | ORIENTO VANÝ OBJEKT PLATÍ:

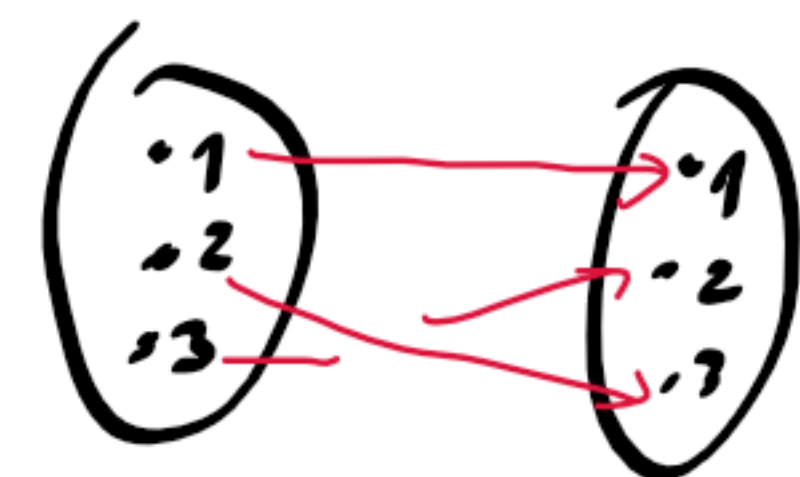
$$\det(n_1 + n_2 | v | w) = \det(n_1 | v | w) + \det(n_2 | v | w), \text{ OBDOB NĚ PRO OSTATNÍ SLOUPCE}$$

$$\det(t \cdot n | v | w) = t \cdot \det(n | v | w) = \det(n | t \cdot v | w) = \det(n | v | t \cdot w)$$

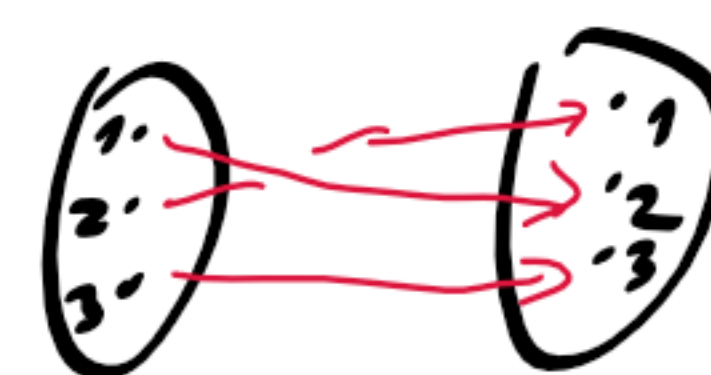
PERMUTACE

- DEF: PERMUTACE množiny X je bijekce $\pi: X \rightarrow X$.
množinu permutací na X značíme $S_X = \{ \pi: X \rightarrow X : \pi \text{ bijekce} \}$
pro $X = \{1, \dots, n\}$ značíme $S_n := S_{\{1, \dots, n\}}$.

$$X \xrightarrow{\pi} X$$



$$X \xrightarrow{\sigma} X$$



- VLASTNOSTI A OPERACE NA PERMUTACÍCH

- $\text{id}_X: X \rightarrow X$ je PERMUTACE
- $\pi, \rho \in S_X$ můžeme složit na permutaci $\pi \circ \rho \in S_X$
 $X \xleftarrow{\pi} X \xleftarrow{\rho} X$
- $\rho \in S_X$ pak $\rho^{-1} \in S_X$
- VLASTNOSTI OPERACÍ:
 - $\forall \pi, \rho, \sigma \in S_X: (\pi \circ \rho) \circ \sigma = \pi \circ (\rho \circ \sigma)$
 - $\forall \pi \in S_X: \text{id}_X \circ \pi = \pi = \pi \circ \text{id}_X$
 - $\forall \pi \in S_X: \pi^{-1} \circ \pi = \text{id}_X = \pi \circ \pi^{-1}$

CVIČENÍ

AXIOMY
GRUPY

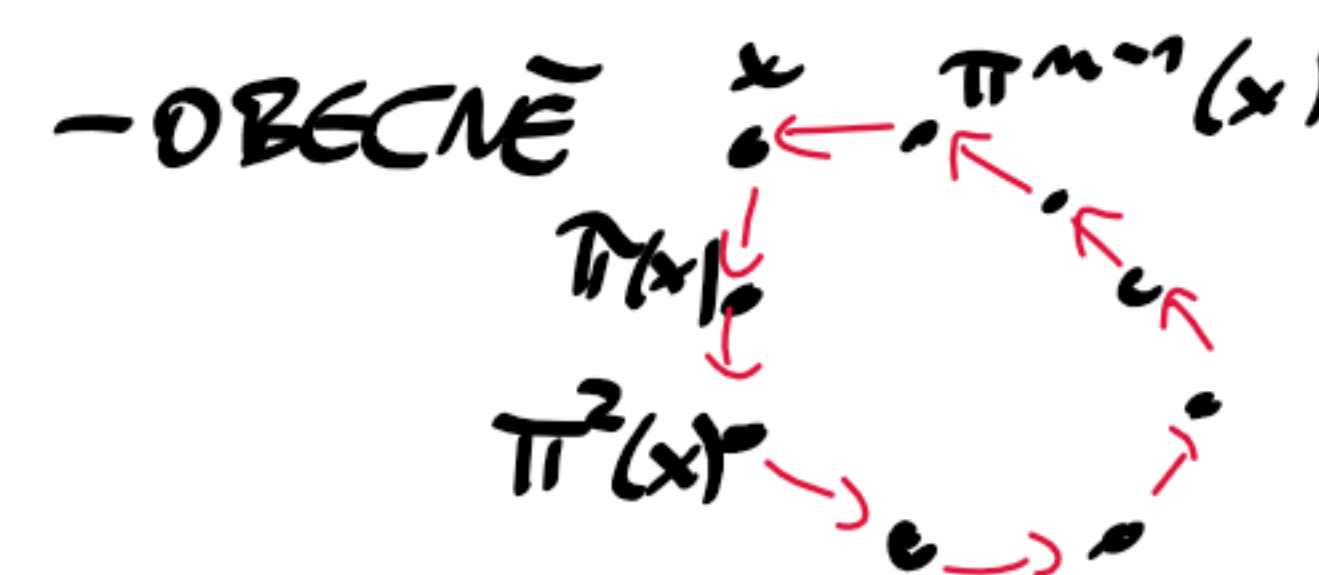
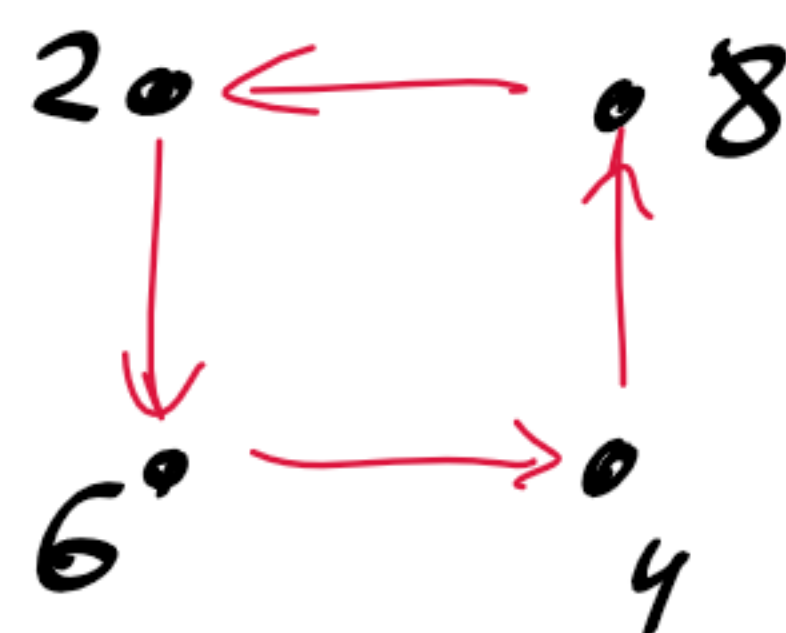
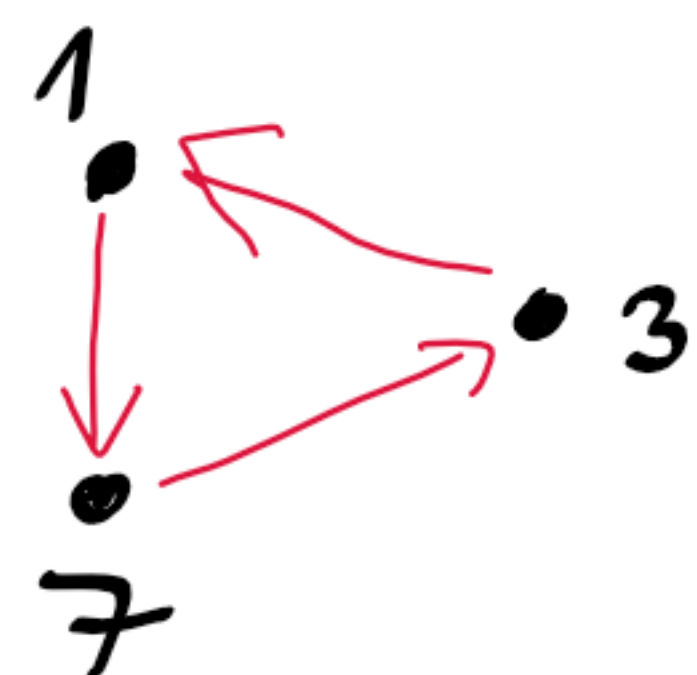
(!) obecně $\pi \rho \neq \rho \pi$

JAK SE PERMUTACE ZAPISUJÍ

- TABULKOV: $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 1 & 8 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_8$, $X = \{1, \dots, 8\}$

$$\pi(1) = 7, \pi(2) = 6$$

- OBRÁZKOV:



$$(\pi^{12} = id_X, 12 = \text{NSN}(3, 4, 1))$$

- CYKLUS JE PERMUTACE, KTERÁ OBSAHUJE NEJVÝŠE JEDEN NETRIV. (DĚLKY k)

- CYKLUS ZAPISUJEME JAKO $(x_1 x_2 \dots x_k)$ ($= (x_k x_1 \dots x_{k-1})$! , $(x_1) = id_x$)

- CYKLUS DĚLKY 2, TJ. $(x_1 x_2)$, SE NAZÝVÁ TRANSPOZICE

- T7.3: KAŽDOU PERMUTACI π NA KONEČNÉ MNOŽINĚ X LZE ZAPSAT JAKO SLOŽENÍ NEZÁVISLÝCH CYKLŮ. TENTO ZÁPIS JE AŽ NA POŘADÍ A VYNECHÁNÍ CYKLŮ DĚLKY 1 JEDNOZNAČNÝ.

- PR: $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix} (5)$ CYKLICKÝ ZÁPIS

- T 7.6: KAŽDOU PERMUTACI LZE ZAPSAT (NEJEDNOZNACNĚ!!!)
JAKO SLOŽENÍ TRANSPOZIC $\pi = (x_1 y_1) \circ (x_2 y_2) \dots \circ (x_n y_n)$

X KONEČNÁ

- DK: STAČÍ PRO CYKLUS

$$(x_1 \dots x_k) = (x_1 x_2) \circ (x_2 x_3) \circ \dots \circ (x_{k-1} x_k) \quad (\text{CVIČENÍ})$$

- PARITA POČTU TRANSPOZIC $\pi = (x_1 y_1) \dots (x_n y_n)$ JE VŽDY STEJNÁ!!!

→ SUDÉ PERMUTACE

↘ LICHÉ PERMUTACE

PERMUTACE VS. PERMUTAČNÍ MATICE

K DOTAZŮM

$\pi \in S_n$
TUB. TĚLESO

$\rightsquigarrow$ PERMUTAČNÍ MATICE

$$P_\pi = \left(e_{\pi(1)} \mid e_{\pi(2)} \mid \dots \mid e_{\pi(n)} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \\ 1 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \dots$$

Diagram illustrating the structure of the permutation matrix P_π . The matrix is shown as a collection of columns. The first column is labeled $\pi(1)$ and the second column is labeled $\pi(2)$. The columns contain vectors $e_{\pi(1)}, e_{\pi(2)}, \dots, e_{\pi(n)}$.

$$a_{\pi(1),1} = 1, a_{\pi(2),2} = 1, \dots$$

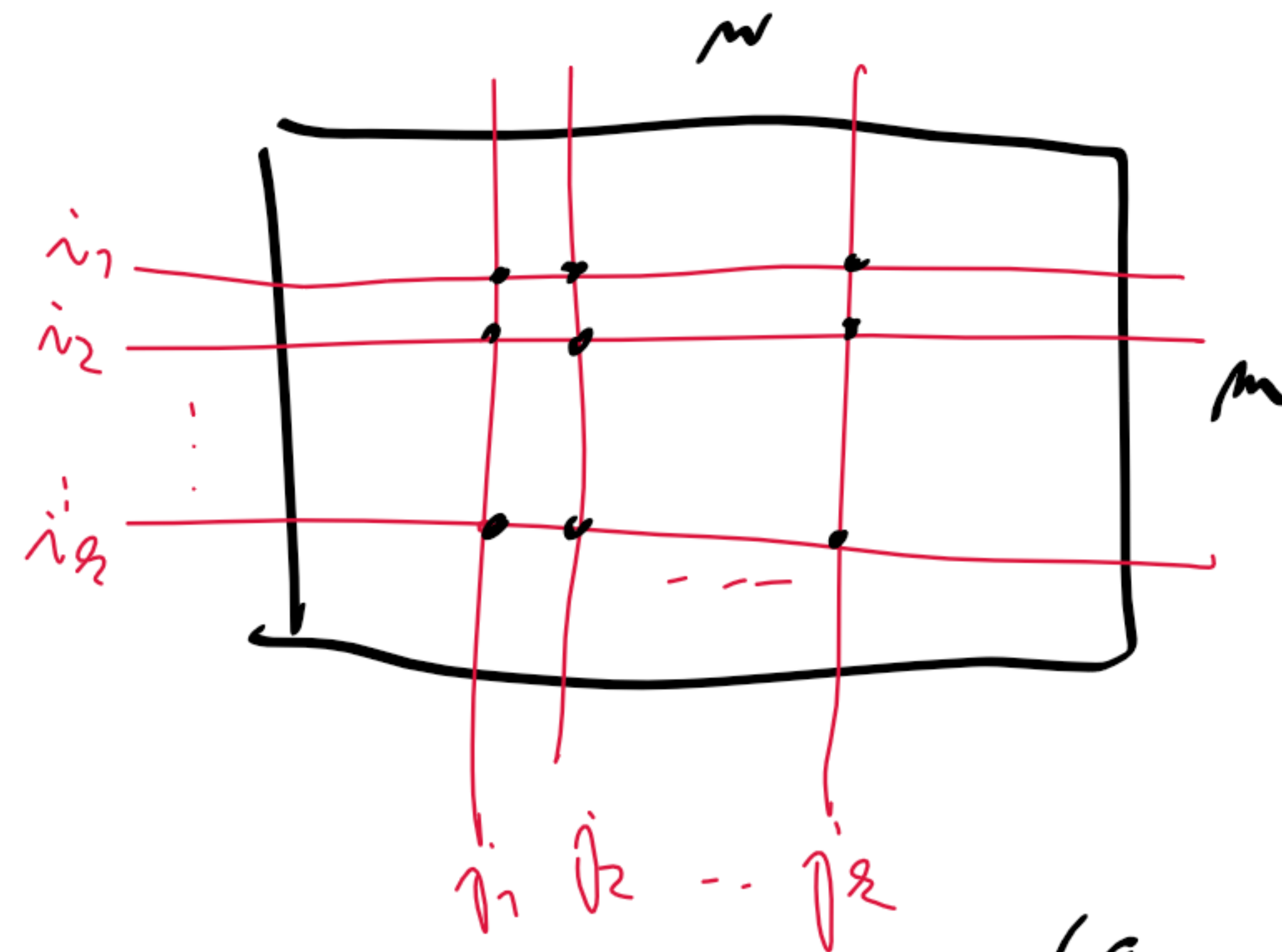
POZOROVÁNÍ: KAŽDÁ PERMUTAČNÍ MATICE JE TVARU P_π PRO JEDNOZNAČNÉ π

FAKT: $\det(P_\pi) = \operatorname{sgn}(\pi) := \begin{cases} 1 & \dots \pi \text{ SUDÁ} \\ -1 & \dots \pi \text{ LICHÁ} \end{cases}$

- DETERMINANT A JINÉ MATICE NEŽ ČTVERCOVÉ?

K DOTAZŮM

- $A \in T^{m \times n}$, $m \neq n \leadsto \det A$ NEVÍ DEFINOVAT!
- V TOM PŘÍPADĚ UVAŽUJEME ČASTO DETERMINANTY ČTVERCOVÝCH PODMATIC (TŽV. MINORY):



$$k \leq m, n$$

$\leadsto$ UVAŽUJEME

$$\det \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

— KONKRETNĚ:

K DOTAZŮM

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \boxed{a_{13}} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} & a_{24} \end{pmatrix}$$

→ MINOR $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}$, ... $\begin{pmatrix} \text{CELKEM} \\ G = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \boxed{a_{14}} \\ a_{21} & \boxed{\phantom{a_{22}}} & \boxed{\phantom{a_{23}}} & \boxed{\phantom{a_{24}}} \\ a_{31} & \boxed{\phantom{a_{32}}} & \boxed{\phantom{a_{33}}} & \boxed{\phantom{a_{34}}} \end{pmatrix}$$

→ MINOR NAPŘ. $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{pmatrix}$

3x3, MAXIMÁLNÍ

$$\det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2x2