

TYPY LINEÁRNÍCH ZOBRAZENÍ (§ 6.4)

- TERMINOLOGIE K LINEÁRNÍM ZOBRAZENÍM

(^{DEF} LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ)

BUĎ T TĚLESO, V, W VEKTOROVÉ PROSTORY A $f: V \rightarrow W$ HOMOMORFISMUS.
PAK ŘEKNEME, ŽE JE :

- MONOMORFISMUS, POKUD JE PROSTÉ (TĚŽ VMĚŘENÍ).
- EPIMORFISMUS, POKUD JE NA.
- ISOMORFISMUS, POKUD JE BIJEKCE.

-
- ENDOMORFISMUS, POKUD f JE TVARU $f: V \rightarrow V$ (TJ. $V = W$).
 - AUTOMORFISMUS, POKUD f JE BIJEKTIVNÍ ENDOMORFISMUS.

-
- LINEÁRNÍ FORMA, POKUD $W = T$, TJ. f JE TVARU $f: V \rightarrow T$

- POZN: VEKTOROVÝ PROSTOR

$(V, +, \cdot)$
↑
NOŠNÁ MNOŽINA
(UNDERLYING SET)

-PR: ① T TĚLESO, V V.P. S BÁZÍ $B = (v_1, \dots, v_n)$ ($n = \dim V$)

PAK

$$f: V \longrightarrow T^n$$

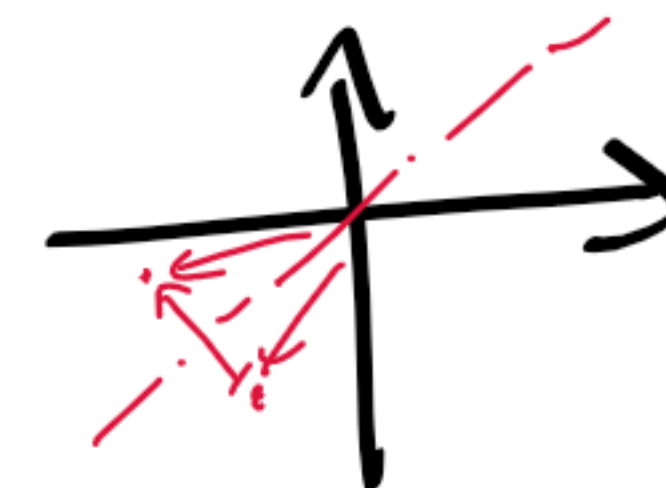
$$v \longmapsto [v]_B$$

A $f^{-1}: T^n \longrightarrow V$ JSOU ISOMORFISMY

$$\begin{matrix} x \\ \parallel \\ (x_1, \dots, x_n)^T \end{matrix} \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i \cdot v_i$$

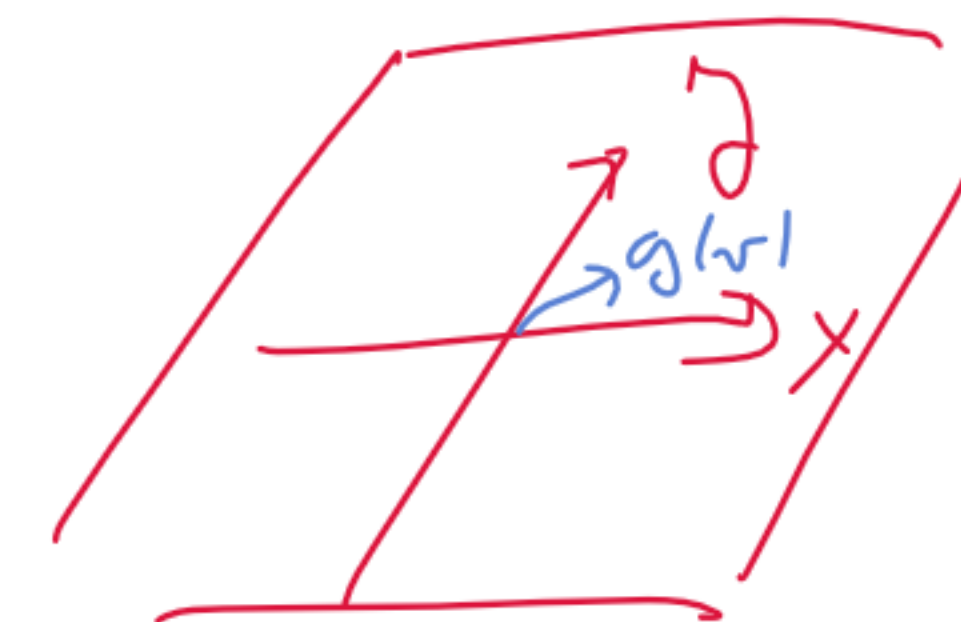
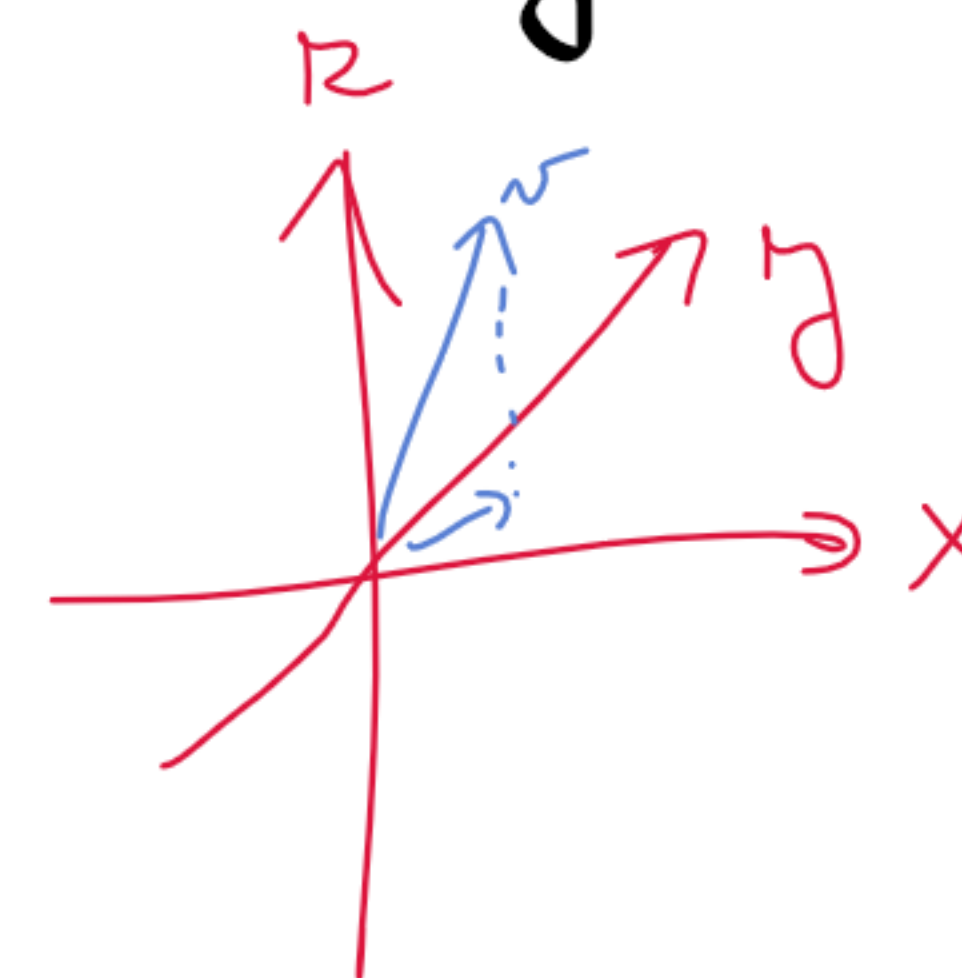
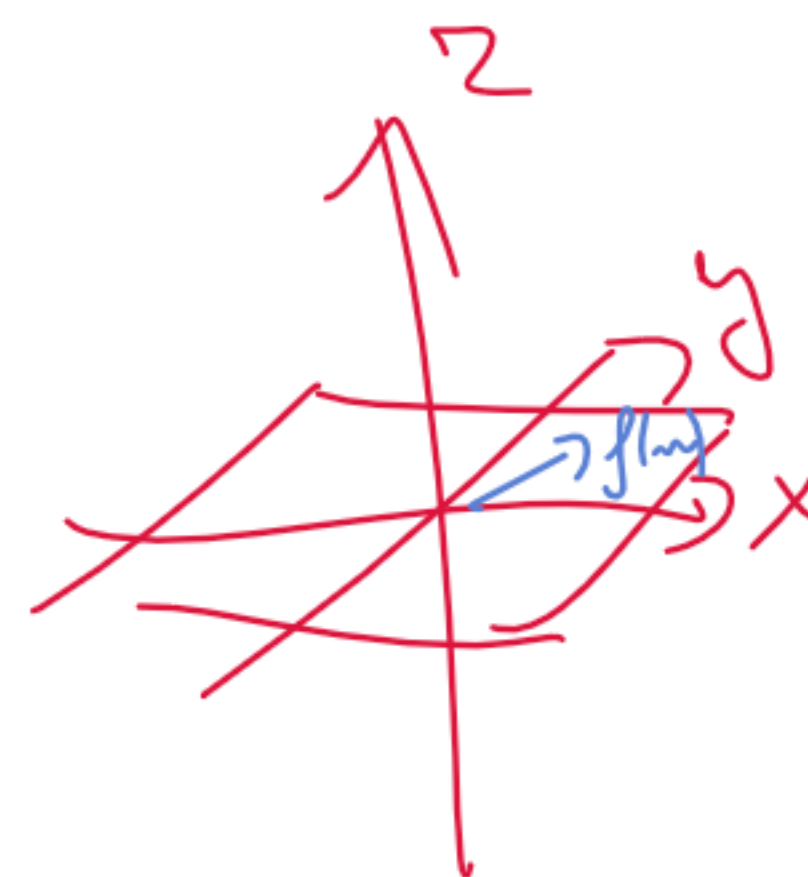
② AUTOMORFISMY: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ OTOČENÍ O γ A KALENÍ POČÁTKU

OSOVÁ SOUŘEĐNOST $\Delta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$



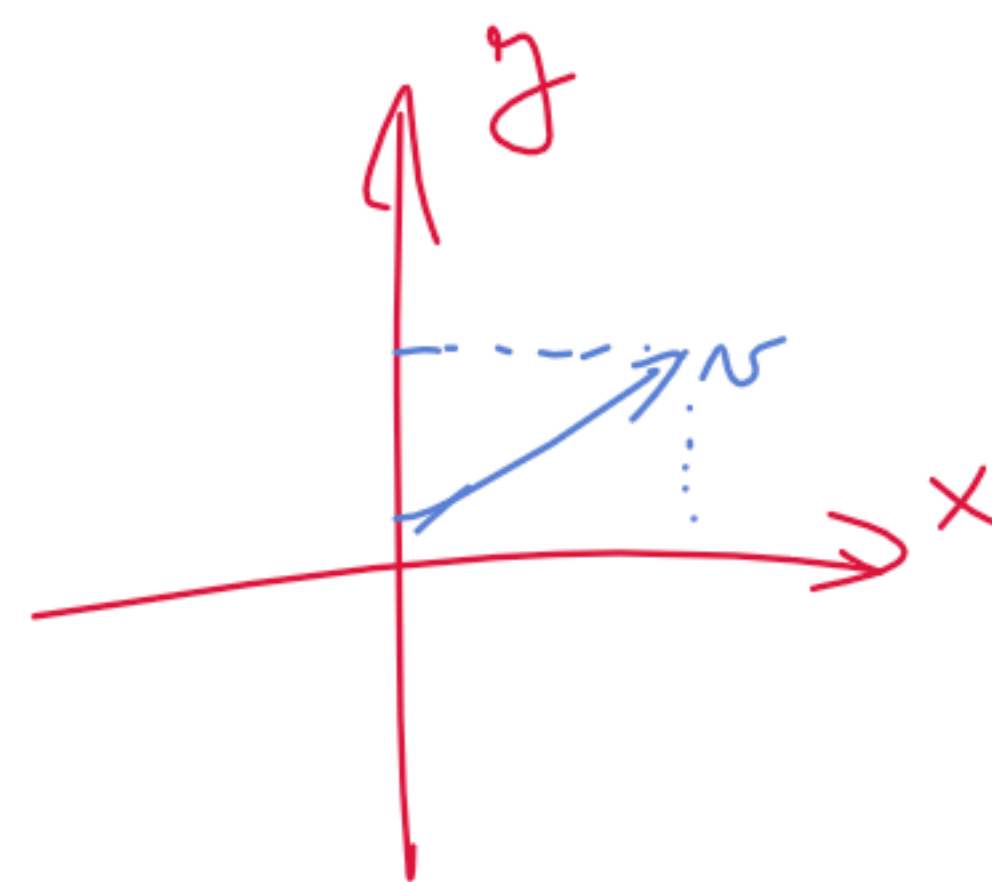
③ MONOMORFISMUS, KTERÝ NENÍ EPIMORFISMUS: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2)^T \mapsto (x_1, x_2, 0)^T$

EPIMORFISMUS, KTERÝ NENÍ MONOMORFISMUS: $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2, x_3)^T \mapsto (x_1, x_2)^T$



-PŘ: LINEÁRNÍ FORMA

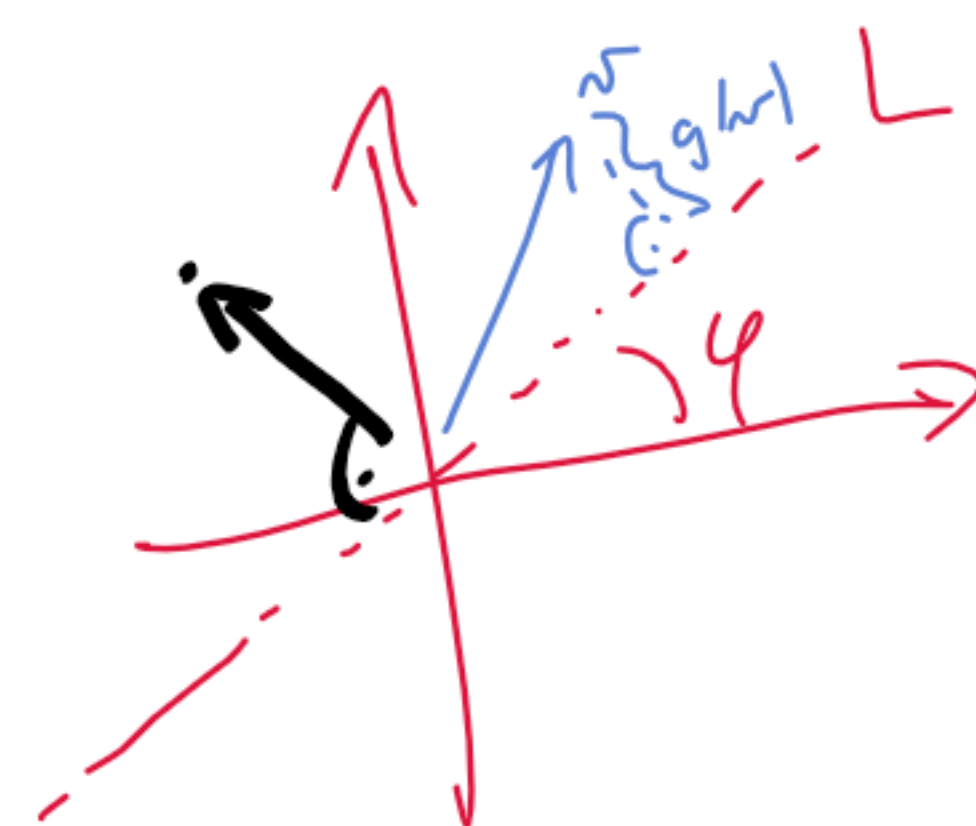
(a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(a, b)^T \mapsto b$



• $|f(x)|$ JE VZDÁLENOST x OD OSY x

(b)

$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(a, b) \mapsto ?$



ORIENTOVÁ
VZDÁLENOST
OD PŘÍMKY L

g JE URČENO MATICÍ
 $(-\sin \varphi \quad \cos \varphi)$

$$\mathbb{R} \xleftarrow[\substack{f}]{(0 \ 1)} \mathbb{R}^2 \xleftarrow[\substack{\text{OTOŽENÍ} \\ 0 \ -\varphi}]{\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}} \mathbb{R}^2$$

(c)

$V = \{ f: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ INTEGRATELNÁ} \}$
 $\int_0^5 : V \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^5 f dx$ JE LINEÁRNÍ FORMA

- FILIZOFIE: • ZAČALI JSME S ARITMETICKÝMI VEKTORY $x \in T^n$
A MATICOVÝMI ZOBRAZENÍMI $f_A: T^n \rightarrow T^n$
 $x \mapsto A \cdot x$

• DOŠLI JSME K ABSTRAKCI, TJ. K ABSTRAKTNÍM
VEKTORŮM $v \in V$ A LINEÁRNÍM ZOBRAZENÍM $f: V \rightarrow W$

• PROČ?

↑ VOLBY
BÁZE
↑
BÁZE B BÁZE C

DŮVODY:

CHCEME MLUVIT O LINEÁRNÍCH ZOBRAZENÍCH,
ANIŽ BYCHOM MUSELI VOLIT BÁZE.

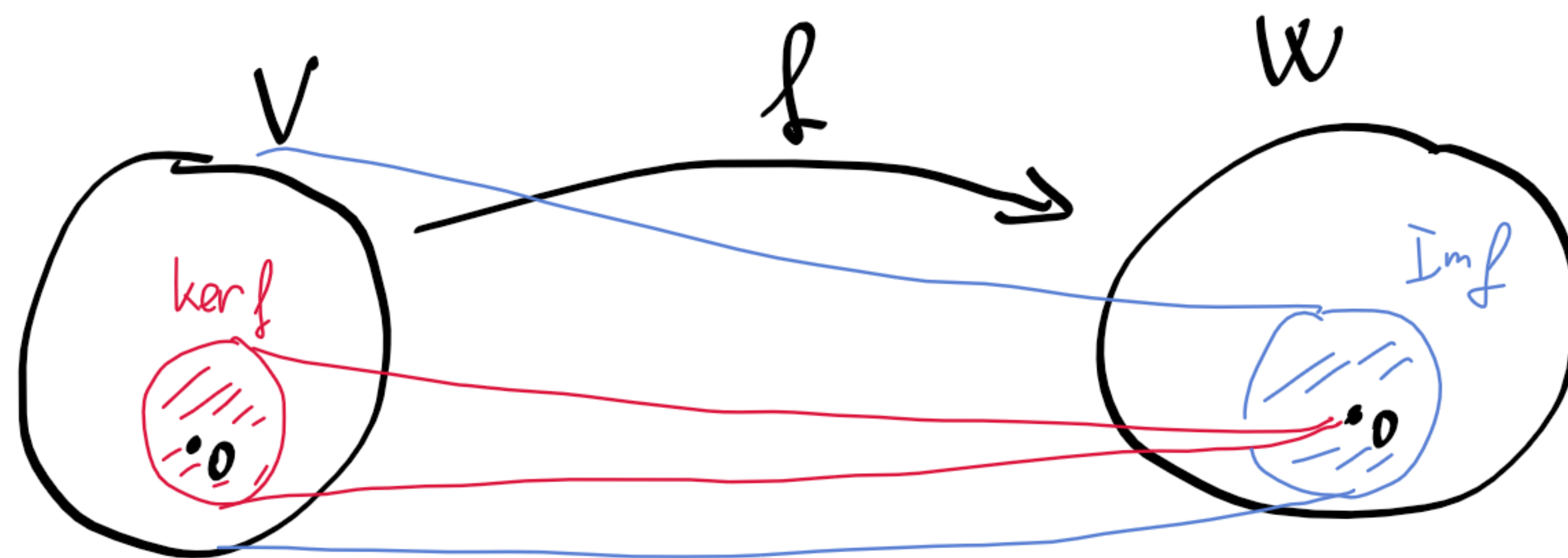
↑
↓
UMŮŽNÍ NÁM TO ZABÝVAT SE | PROSTORY
FUNKCÍ, POLYNOMŮ, ---

- JÁDRO A OBRAZ

-DEF: BUĎ T TĚLESO, V, W V.P., $f: V \rightarrow W$ LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ.
PAK

① JÁDRO f JE MNOŽINA $\ker f = \{v \in V : f(v) = 0\}$

② OBRAZ f JE MNOŽINA $\operatorname{Im} f = \{f(v) \in W : v \in V\}$



-POZOROVÁNÍ (ČÁST TG.25) : $\ker f \leq V$ A $\operatorname{Im} f \leq W$

-Důk: $u, v \in \ker f \stackrel{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} f(u) = 0 = f(v) \xrightarrow{f \text{ LIN.}} f(u+v) = f(u) + f(v) = 0 \stackrel{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} u+v \in \ker f$
(NAŽNAB) $t \in T, u \in \ker f \Rightarrow \dots \Rightarrow t \cdot u \in \ker f$

$w_1, w_2 \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists v_1, v_2 \in V : w_1 = f(v_1) \ \& \ w_2 = f(v_2) \Rightarrow w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2) \in \operatorname{Im} f$
 $t \in T, w \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \dots \Rightarrow t \cdot w \in \operatorname{Im} f$

-T6.24: $f: V \rightarrow W$ LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ. PAK MPJE:

POROVNEJTE
S (2) $\Leftrightarrow$ (3)
V T4.70

(1) f JE MONOMORFISMUS

(2) $\ker f = \{0\}$

-Důk: (1) $\Rightarrow$ (2) JEDNODUCHÉ

(2) $\Rightarrow$ (1) PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE $\ker f = \{0\}$

• VZĚVME $u, v \in V$

• PAK

$$\begin{aligned} f(u) = f(v) &\Leftrightarrow f \text{ LIN.} \\ f(u) - f(v) = 0 &\Leftrightarrow \\ f(u-v) = 0 &\stackrel{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} \\ u-v \in \ker f &\stackrel{\text{PŘEDP.}}{\Leftrightarrow} \\ u-v = 0 &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

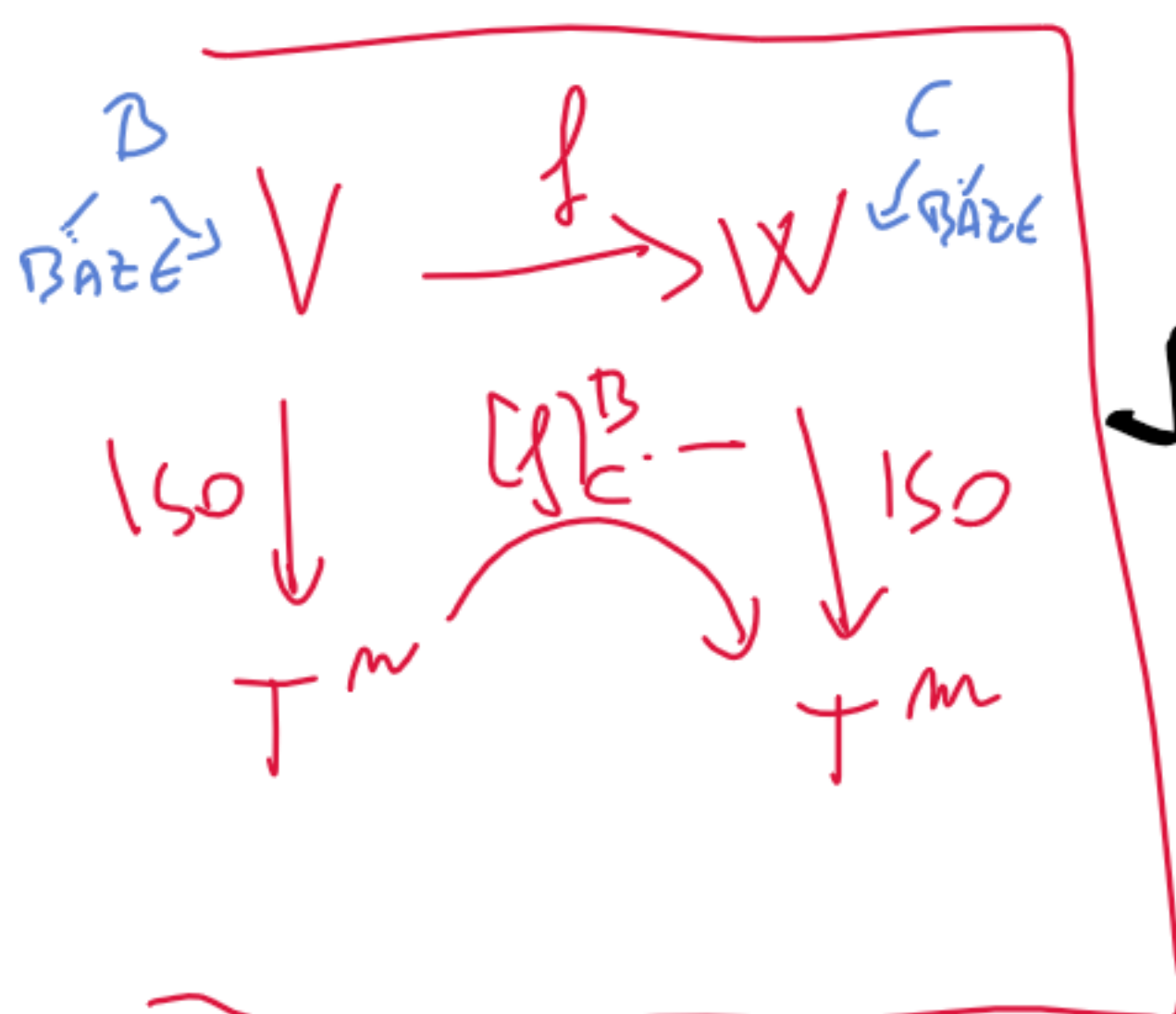
$$u = v$$

• Tedy f JE PROSTÉ.

□

- ZNAČENÍ: V v.p., kon. gen. | B báze V | $X \subseteq V$ podmnožina.
 BUDEME ZNAČIT $[X]_B = \{[v]_B : v \in X\} \subseteq T^m$ ($m = \dim V$)

- T6.25: BUĎTE V, W KON. GEN. VEKTOROVÉ PROSTORY,
 B, C POŘÁDEK JEJICH BÁZE,
 m, n ———— DIMENZE.



JE-LI $f: V \rightarrow W$ LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ, DAK PLATÍ:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad [Ker f]_B &= Ker [f]_C^B \\ \textcircled{2} \quad [Im f]_C &= Im [f]_C^B \end{aligned}$$

MATICE TYPU $m \times n$ MĀD T
 KTERÁ SPLŇNĚ KŮV: $[f(v)]_C = [f]_C^B \cdot [v]_B$

- Důk:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad [Ker f]_B &= \{[v]_B : v \in Ker f\} = \{[v]_B : f(v) = 0\} = \\ &= \{[v]_B : [f(v)]_C = 0\} = \{[v]_B : v \in Ker [f]_C^B \cdot [v]_B = 0\} = Ker [f]_C^B. \\ \textcircled{2} \quad [Im f]_C &= \{[w]_C : w \in Im f\} = \{[f(v)]_C : v \in V\} = \\ &= \{[f]_C^B \cdot [v]_B : v \in V\} = \{[f]_C^B \cdot x : x \in T^m\} = Im [f]_C^B \quad \square \end{aligned}$$

- PONDĚNÁ TVRZENÍ (CHARAKTERIZACE) O MONO/EPI/ISOMORFISMech

- T6.27: BUĎTE V, W V.P., V BUĎ KONĚČNĚ GENEROVANÝ. PAK NPJG PRO
LIBOVOLNÉ LIN. ZOBRAZENÍ $f: V \rightarrow W$:

① f JE MONOMORFISMUS

② $\forall$ LN $(v_1, \dots, v_n) \in V$: $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ JE LN.

③ $\exists$ BÁZE $(v_1, \dots, v_n)$ PROSTORU V : $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ JE LN

- T6.28: BUĎTE V, W V.P., V BUĎ KONĚČNĚ GENEROVANÝ. PAK NPJG PRO
LIBOVOLNÉ LIN. ZOBRAZENÍ $f: V \rightarrow W$:

① f JE EPI MORFISMUS

② $\forall$ GENERUJÍCÍ $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$: $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ GENERUJE W .

③ $\exists$ BÁZE $(v_1, \dots, v_n)$ PROSTORU V : $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ GENERUJE W .

- T6.29: BUĎTE V, W V.P., V BUĎ KONĚČNĚ GENEROVANÝ. PAK NPJG PRO
LIBOVOLNÉ LIN. ZOBRAZENÍ $f: V \rightarrow W$:

① f JE ISOMORFISMUS

② $\forall$ BÁZE $(v_1, \dots, v_n)$ V.P. V JE $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ BÁZE W .

③ $\exists$ BÁZE $(v_1, \dots, v_n)$ V.P. V TAKOVÁ ŽE $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ BÁZE W .

- ISOMORFISMY A ISOMORFNI PROSTORY

- PROSTORY V, W NAD T JSOU ISOMORFNI POKUD

$\exists f: V \rightarrow W$ ISOMORFISMUS $(\Rightarrow f^{-1}: W \rightarrow V$ JE ISOMORFISMUS)

- ZNAČÍME $V \cong W$.

• V6.32: BUĎ V, W KON. GEN. V. P. NAD T , PAK NPJĚ:

① $V \cong W$

② $\dim V = \dim W$

- V6.31: BUĎ V, W KON. GEN. V. P. NAD T , $f: V \rightarrow W$ LIN. ZOBRAZENÍ.
(VIZTE 5.99) PAK $\dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim V$.