

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ - POKRAČOVÁNÍ

- PŘIPOMENUTÍ: ZOBRAZENÍ $f: V \rightarrow W$, KDE V, W JSOU VEKTOROVÉ PROSTORY NAD STEJNÝM TĚLESEM T , JE LINEÁRNÍ, POKUD PLATÍ:

$$(1) \quad \forall u, v \in V : f(u+v) = f(u) + f(v)$$

$$(2) \quad \forall u \in V \quad \forall t \in T : f(t \cdot u) = t \cdot f(u)$$

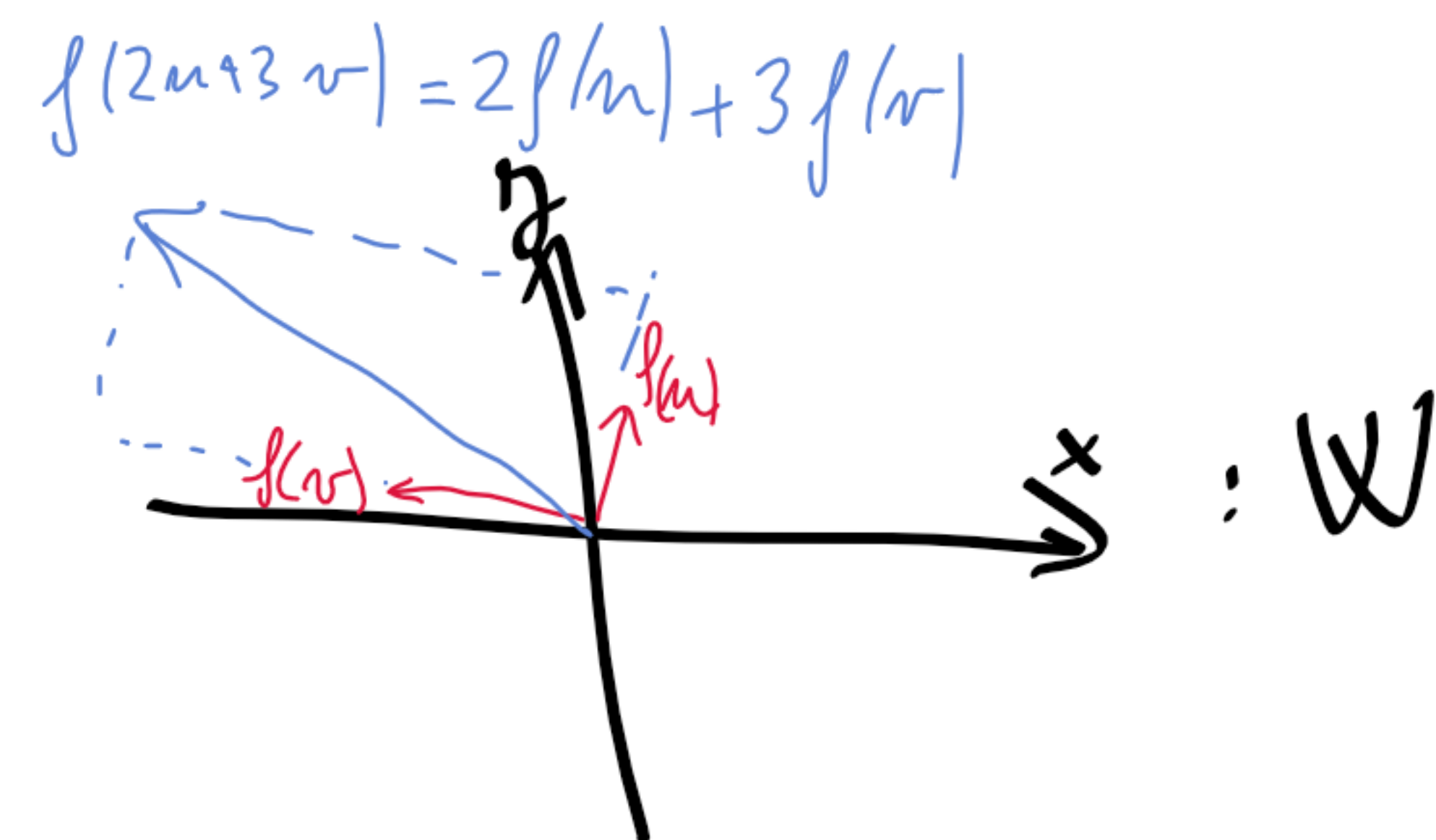
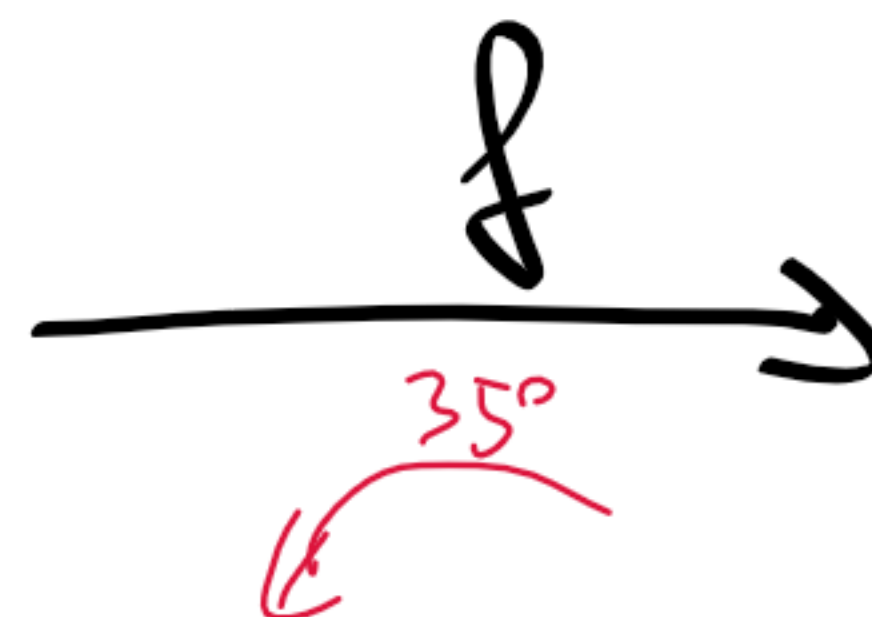
- POZN.: JE-LI f LINEÁRNÍ, PAK

$$\bullet f(0) = 0$$

$$\bullet \forall k \geq 1 \quad \forall v_1, \dots, v_k \in V \quad \forall t_1, \dots, t_k \in T :$$

$$f(t_1 \cdot v_1 + \dots + t_k \cdot v_k) = t_1 \cdot f(v_1) + \dots + t_k \cdot f(v_k)$$

- PŘ.: $T = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2 = W$, f BUDE $\swarrow 35^\circ$
 $u, v \in \mathbb{R}^2$, PAK $f(2 \cdot u + 3 \cdot v) = 2 \cdot f(u) + 3 \cdot f(v)$



- PŘ: T TĚLESO, V, W V.P. NAD T .

① $\text{id}_V: V \rightarrow V$ JE LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

② MÁME VŽDY TŽV. NULOVÉ ZOBRAZENÍ:

$$\begin{array}{ccc} f: V & \longrightarrow & W \\ v \in V & \longmapsto & 0 \end{array}$$

f JE LINEÁRNÍ.

③ ŘEKNĚME, ŽE V JE KON. GEN. A $B = (v_1, \dots, v_n)$ JE BÁZE V .
PAK ZOBRAZENÍ (DOKONCE BIJEKCI)

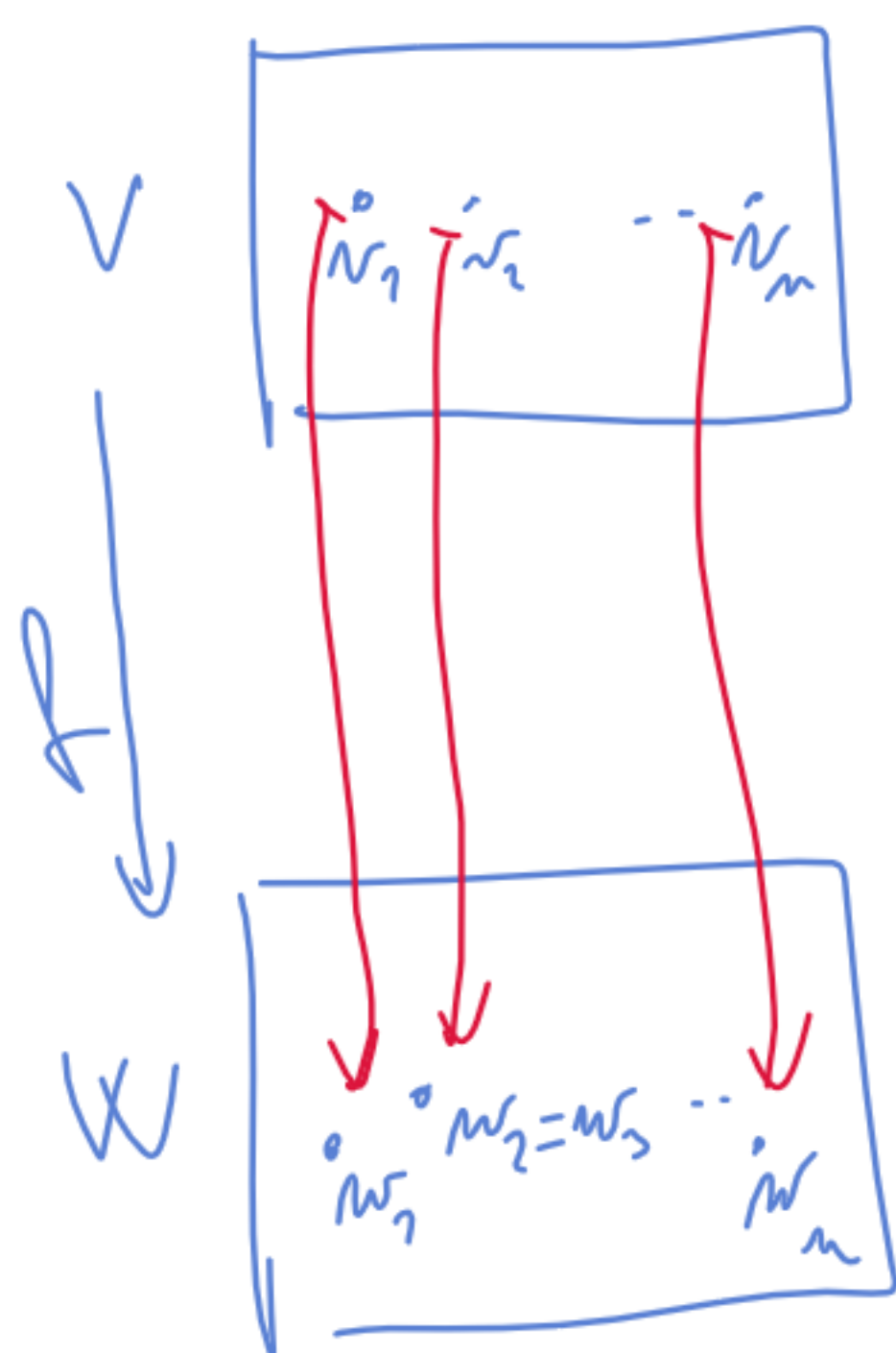
$$\begin{array}{ccc} f: V & \longrightarrow & T^n \\ v & \longmapsto & [v]_B = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}, \text{ kde } v = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n \end{array}$$

TS.75 PŘESNĚ ŘÍKÁ, ŽE f JE LINEÁRNÍ.

- POZN: UVAŽUJME $f_A: T^n \rightarrow T^m$. PAK MŮŽEME f_A ZÚŽIT NA

$f_A|_{\ker A}: \ker(A) \xrightarrow{\text{VI}} T^m$, ZŘEJNĚ JE $f_A|_{\ker A}$ NULOVÉ ZOBRAZENÍ.

- T 6.4: BUĎTE V, W VEKTOROVÉ PROSTORY NAD T A
 BUĎ V KONEČNĚ GENEROVANÝ S BÁZÍ $B = (v_1, \dots, v_n)$.



VEZME-LI LIBOVOLNOU POSLOUPNOST $(w_1, \dots, w_n)$ VEKTORŮ W ,
 PAK $\exists!$ LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ $f: V \rightarrow W$ TAKOVÉ, ŽE:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : f(v_i) = w_i.$$

- DK: ① JEDNOZNAČNOST:

LINEÁRNÍ A

- UVAŽUJME $f, g: V \rightarrow W$ TAKOVÁ, ŽE $f(v_i) = w_i = g(v_i) \quad \forall i$.

- VEZME-LI LIBOVOLNÉ $v \in V$, VYJÁDRĚME JE JAKO $v = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n$

- PAK PLATÍ $f(v) = t_1 \cdot f(v_1) + \dots + t_n \cdot f(v_n) = t_1 \cdot g(v_1) + \dots + t_n \cdot g(v_n) = g(v)$.

$\Rightarrow f = g$ JAKOŽTO ZOBRAZENÍ.

② EXISTENCE: - DEFINUJME $f: V \rightarrow W$ TAK, ŽE PRO KAŽDÉ $v \in V$
 VEZME-LI $(t_1, \dots, t_n)^T = [v]_B$ A POLOŽÍME $f(v) := t_1 w_1 + \dots + t_n w_n$.

- OVĚŘÍME, ŽE $\forall i : f(v_i) = w_i$ (CVIČENÍ) A ŽE f JE LINEÁRNÍ

- POUŽÍJEME T 5.75 (TJ. $\forall u, v \in V \quad \forall t \in T : [u+v]_B = [u]_B + [v]_B, [t \cdot u]_B = t \cdot [u]_B$)

- ČILI PRO $u, v \in V, [u]_B = (t_1, \dots, t_n)^T, [v]_B = (s_1, \dots, s_n)^T$, PAK $[u+v]_B = (s_1 + t_1, \dots, s_n + t_n)^T$ A
 $f(u+v) = (s_1 + t_1)w_1 + \dots + (s_n + t_n)w_n = (s_1 w_1 + \dots + s_n w_n) + (t_1 w_1 + \dots + t_n w_n) = f(u) + f(v)$.



- JAK VYJÁDŘIT LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ POMOČÍ MATICE?

- V KONEČNĚ GENEROVANÝ V.P. NAD T S BÁZÍ $B = (v_1, \dots, v_n)$ ($n = \dim(V)$)
- W S BÁZÍ $C = (w_1, \dots, w_m)$ ($m = \dim(W)$)

$$W \xleftarrow{\quad} V : f$$

BAZE C

↑
BÁZE B

NUTME TYPE $m \times m$

$$[f(n)]_C \longleftarrow [n]_B$$

- Ukážeme, že $\exists \epsilon$ existuje matice

$$[f]_C^B \text{ TAKOVÁ, ŽE}$$

$$= [f]_C^B \cdot [v]_B.$$

-Př: ① $V = T^m$ s KANONICKOU BÁZÍ $k_m = (e_1, \dots, e_m)$
 $W = T^m$ s KANONICKOU BÁZÍ $k_m = (e_1, \dots, e_m)$
 A MATICE $m \times m$ NAD $T \quad \left[\right] \rightsquigarrow f := f_A : T^m \rightarrow T^m$
 $[f]_{k_m}^{k_m} = A$

(2) $V = W$, B, C 2 BAZE V , UVAŽUJEME $V \leftarrow V: id$

$\leadsto$ PAK $(id)_C^B$ JE PŘESNĚ MATICE PŘECHODU OD B K C .

- JAK VYJÁDŘIT LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ PONOŘÍ MATICE? (POKRAČOVÁNÍ)

- V KONEČNĚ GENEROVANÝ V.P. NAD T S BÁZÍ $B = (v_1, \dots, v_n)$ ($n = \dim(V)$)
- W S BÁZÍ $C = (w_1, \dots, w_m)$ ($m = \dim(W)$)

• $W \longleftarrow V : f$
 BAZE C BAZE B
 $[f(v)]_C \longleftarrow [v]_B$

, CHCEME $[f]_C^B$ TYPU $m \times n$ TAK, ABY
 $\forall v \in V : [f(v)]_C = [f]_C^B \cdot [v]_B$!

- JAK MUSÍ $\{y\}_C^B$ VYPADAT

- zvolíme $i \in \{1, \dots, m\}$ A DOSADÍME DO $N = N_i$:

$$[f(v_i)]_C = [f]_C^B \cdot [v_i]_B = [f]_C^B \cdot e_i = \text{row } i \text{ of } [f]_C^B$$

Diagram illustrating a matrix multiplication. A large rectangle is divided into a grid of smaller rectangles. A vertical strip of width i is highlighted in blue. To the right, a column vector is shown with a blue arrow pointing to the i row, labeled i .

DEF 6.5: f, v, w, B, C BUDE JAKO VÝŠE. MATICI LINEÁRNÍHO ZOBRAZENÍ
VZHLÉDEM K BÁZÍM B A C ROZUMÍME MATICI

BAZIF B A C ROZUMI ME MATIC I

$$[f]_C^B = \left([f(v_1)]_C \mid [f(v_2)]_C \mid \dots \mid [f(v_m)]_C \right)$$

- DŮK 6.5: f, V, W, B, C BUDE JAKO VÝŠE. MATICI LINEÁRNÍHO ZOBRAZENÍ f VZHLÉDEM K BÁZÍM B A C ROZUMÍME Matici

$$[f]_C^B = \left([f(v_1)]_C \mid [f(v_2)]_C \mid \dots \mid [f(v_m)]_C \right)$$

$A f: V \rightarrow W$ JE
LIN. ZOBRAZENÍ

- T (KOMBINACE 6.6 A 6.7): AŽ V, W JSOU KON. GEN. V. P. NAD T ,
 $B = (v_1, \dots, v_m)$, $C = (w_1, \dots, w_n)$ JSOU POŘÁDEK JEJICH BÁZE. PAK:

(1) $\forall v \in V$: $[f(v)]_C = [f]_C^B \cdot [v]_B$

(2) JE-LI $\Pi \in T^{n \times m}$ TAKOVÁ, ŽE $\forall v \in V$: $[f(v)]_C = \Pi \cdot [v]_B$, PAK $\Pi = [f]_C^B$.

- DŮK: (2) BYL NA PŘEDCHOZÍ TABULI.

(1) VZÍME LÍBOVOLNÉ $v \in V$ A VYJÁDŘÍME JE JAKO $v = t_1 v_1 + \dots + t_m v_m$.

PAK $[f(v)]_C \stackrel{\text{lin. f.}}{=} [t_1 f(v_1) + \dots + t_m f(v_m)]_C \stackrel{T5.35}{=} t_1 [f(v_1)]_C + \dots + t_m [f(v_m)]_C =$

$$\left([f(v_1)]_C \mid \dots \mid [f(v_m)]_C \right) \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix} = [f]_C^B \cdot [v]_B.$$

□

-PŘ 6.11: • UVAŽUJME LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ (PRO $T = \mathbb{R}$)

$$\begin{array}{ccc} \frac{d}{dx} : \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ f & \longmapsto & \frac{df}{dx} \end{array}$$

STUPĚŇ POLYNOMU f
↓

• Vezměme PODPROSTOR $V = \{ f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(f) \leq 3 \} \subseteq \mathbb{R}[x]$

• Pak $\frac{d}{dx}$ se ZÚŽÍ NA LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

$$\frac{d}{dx} : V \longrightarrow V$$

• JAK VYPAĐÁ $\left[\frac{d}{dx} \right]_B^B$ | $B = (1, x, x^2, x^3)$?

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dx} \right]_B^B &= \left(\left[\frac{d1}{dx} \right]_B \mid \left[\frac{dx}{dx} \right]_B \mid \left[\frac{d(x^2)}{dx} \right]_B \mid \left[\frac{d(x^3)}{dx} \right]_B \right) = \left([0]_B \mid [1]_B \mid [2x]_B \mid [3x^2]_B \right) = \\ &= \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

- MATICE SLOŽENÍ A INVERZE LINEÁRNÍCH ZOBRAZENÍ

- T6.15: ① BUĎTE U, V, W V.P. NAD T A $f: U \rightarrow V, g: V \rightarrow W$ LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ. PAK $g \circ f: U \rightarrow W$ JE LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ. ← PRO ②

② PŘEDPOKLÁDEJME NAVÍC, ŽE U, V, W JSOU KON. GEN. A MÁNG POŘADĚ BÁZE B, C, D . PAK

$$[g \circ f]_D^B = [g]_D^C \cdot [f]_C^B.$$

- Důk: ① $g \circ f(u+v) = g(f(u+v)) = g(f(u) + f(v)) = g(f(u)) + g(f(v)) = g \circ f(u) + g \circ f(v)$
 $g \circ f(t \cdot v) = \text{--- ANALOGICKY ---} = t \cdot g \circ f(v)$

$$\text{② pro: } [g \circ f(w)]_D = [g(f(w))]_D = [g]_D^C \cdot [f(w)]_C = [g]_D^C \cdot ([f]_C^B [w]_B)$$
$$\stackrel{||}{=} [g \circ f]_D^B \cdot [w]_B \qquad \stackrel{||}{=} ([g]_D^C \cdot [f]_C^B) \cdot [w]_B$$

$$\stackrel{T6.7}{\Rightarrow} [g \circ f]_D^B = [g]_D^C \cdot [f]_C^B$$

□

-T6.16: ① UVAŽUJME V.P. U, V NAD T A LINGÁRNÍ BIJEKCI
 $f: U \rightarrow V$. PAK $f^{-1}: V \rightarrow U$ JE LINGÁRNÍ.

② JSOU-LI NAVÍC V.P. U, V KON. GEN A
 B, C JSOU POŘADĚ JEJICH BÁZE, PAK

$$[f^{-1}]_B^C = ([f]_C^B)^{-1}$$

-T6.20: BUĎ $f: V \rightarrow V$ LINGÁRNÍ ZOBRAZENÍ V KON. GEN. V.P.,
 B, C JSOU BÁZE V . OZNAČME $R = [id]_C^B$. PAK

$$[f]_B^B = R^{-1} \cdot [f]_C^C \cdot R$$

-Dk1

$$V \xleftarrow{id} V \xleftarrow{f} V \xleftarrow{id} V$$

$$[f]_B^B = \underbrace{[id]_B^C}_{R^{-1}} \cdot [f]_C^C \cdot \underbrace{[id]_C^B}_R$$