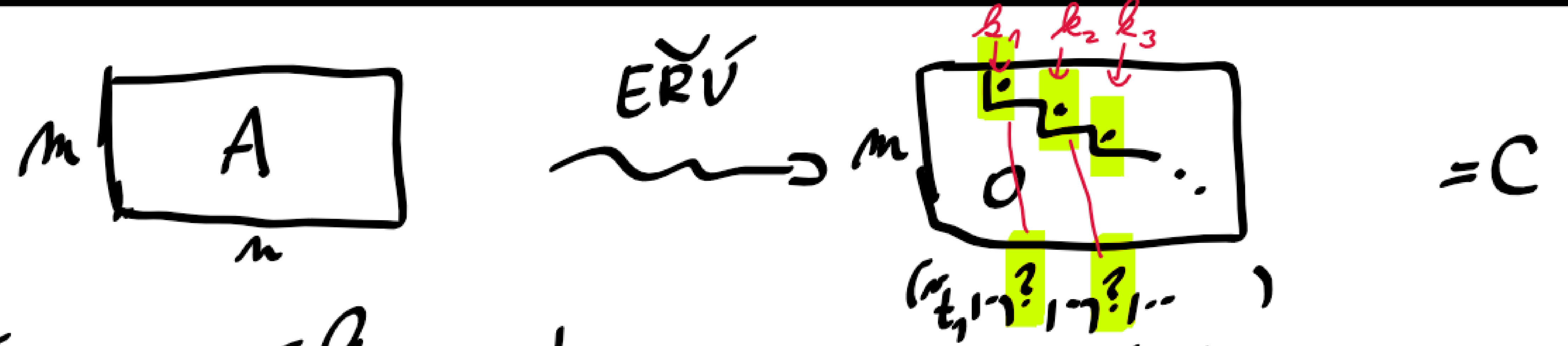
DOKONČENÍ Z MINULÉHO TÝDNE

– V5.99: BUĎ A MATICE TYPU $m \times n$ NAD T. PAK

$$\dim(\ker(A)) + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(A))}_{\mathrm{rank}(A)} = n \quad (= \#\text{SLOUPCŮ}).$$

– Dk: – POUŽIJEME GAUSSOVU ELIMINACI:



– MÁME BÁZOVÉ SLOUPCE: $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$, KDE $r := \mathrm{rank}(A)$

A NEBÁZOVÉ SLOUPCE: $j_1 < j_2 < \ldots < j_{n-r}$, KDE $P := \{j_1, \ldots, j_{n-r}\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{k_1, \ldots, k_r\}$

– CHCEME UKÁZAT, ŽE $\dim(\ker A) = n - r$

– O VEKTORECH $v = (t_1, \ldots, t_n)^T \in \ker(A)$ VÍME:

- v JE URČEN JEDNOZNAČNĚ VEKTOREM $(t_{j_1}, \ldots, t_{j_{n-r}})^T \in T^{n-r}$
- $\forall$ VEKTOR $(t_{j_1}, \ldots, t_{j_{n-r}})^T \in T^{n-r}$ $\exists!$ $v \in \ker(A)$, KTERÉ MÁ V NEBÁZOVÝCH SLOŽKÁCH PŘESNĚ PRVKY $t_{j_1}, \ldots, t_{j_{n-r}}$

$\rightsquigarrow$ MÁME BIJEKCI $\ker(A) \xrightarrow{f} T^{n-r}$

$$(t_1, \ldots, t_n) = v \longmapsto (t_{j_1}, \ldots, t_{j_{n-r}})$$

– VEZMEME NĚJAKOU BÁZI $B = (w_1, \ldots, w_{n-r})$ PROSTORU T^{n-r}, POLOŽÍME $C = (v_1, \ldots, v_{n-r})$, KDE $v_i = f^{-1}(w_i)$, A UKÁŽEME, ŽE C JE BÁZE $\ker(A)$.

$\Rightarrow \dim \ker(A) = n - r$

−VŠ.103: BUĎ W VEKTOROVÝ PROSTOR A $U, V \leq W$.

KONEČNĚ GENEROVANÝ

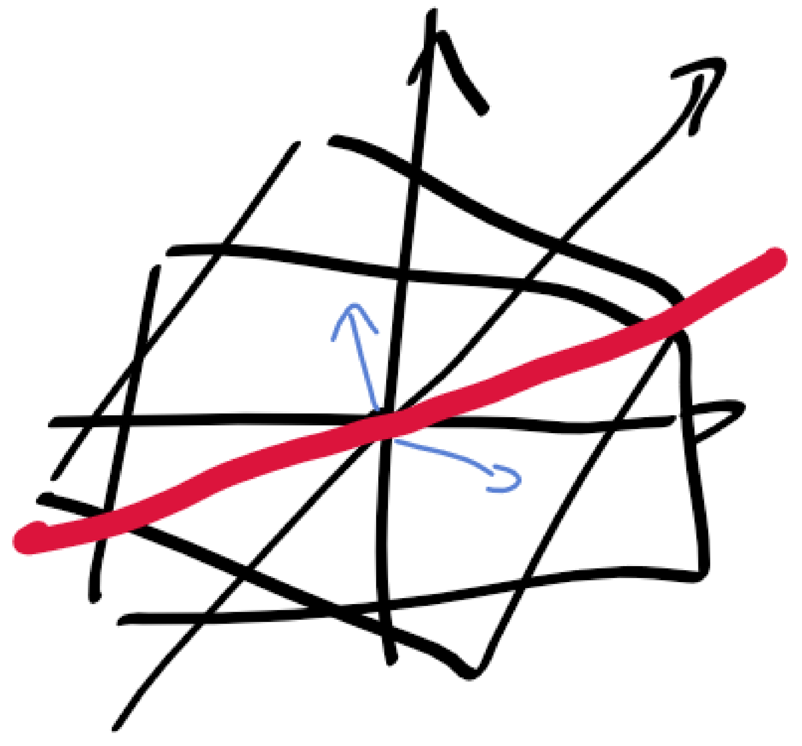
$LO(U \cup V) = U+V = \{u+v : u \in U, v \in V\}$

PAK:

$$(*) \quad \dim(U) + \dim(V) = \dim(U \cap V) + \dim(U+V).$$

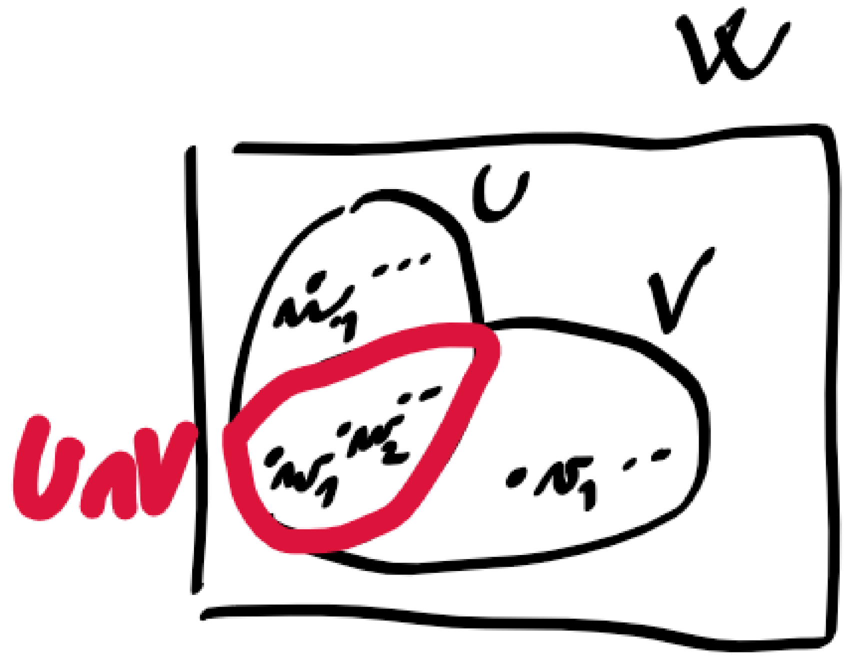
−Dk:

− PROSTOR $U \cap V$ ($\leq W$) MÁ NĚJAKOU BÁZI $B = (w_1, \dots, w_q)$
($q = \dim(U \cap V)$)



− B JE LN VE U, TEDY MŮŽEME B ROZŠÍŘIT NA BÁZI
$C = (w_1, \dots, w_q, u_1, \dots, u_l)$ PROSTORU U, TJ. $\dim(U) = q + l$

− PODOBNĚ MŮŽEME B ROZŠÍŘIT NA BÁZI
$D = (w_1, \dots, w_q, v_1, \dots, v_m)$ PROSTORU V, TJ. $\dim(V) = q + m$



− POLOŽÍME $E = (w_1, \dots, w_q, u_1, \dots, u_l, v_1, \dots, v_m)$

− STAČÍ DOKÁZAT, ŽE E JE BÁZE $U+V$ (PAK TOTIŽ $\dim(U+V) = q + l + m$ A ROVNOST (*) BUDE PLATIT)

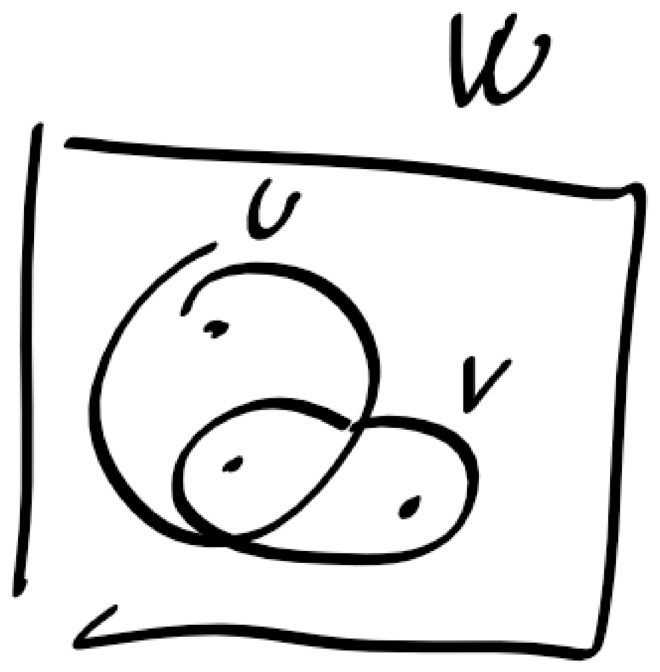
− $LO\{w_1, \dots, w_q, u_1, \dots, u_l, v_1, \dots, v_m\} = \underbrace{LO\{w_1, \dots, w_q, u_1, \dots, u_l\} + LO\{w_1, \dots, w_q, v_1, \dots, v_m\}}_{= U + V}$

$\Rightarrow$ E GENERUJE $U+V$

- Dk: (POKRAČOVÁNÍ)

- PROSTOR $U \cap V$ ($\leq W$) MÁ NĚJAKOU BÁZI $B = (w_1, \dots, w_k)$
  ($k = \dim(U \cap V)$)

- B JE LN VE U, TEDY MŮŽEME B ROZŠÍŘIT NA BÁZI
  $C = (w_1, \dots, w_k, u_1, \dots, u_l)$ PROSTORU U, TJ. $\dim(U) = k + l$



- PODOBNĚ MŮŽEME B ROZŠÍŘIT NA BÁZI
  $D = (w_1, \dots, w_k, v_1, \dots, v_m)$ PROSTORU V, TJ. $\dim(V) = k + m$

- POLOŽÍME $E = (w_1, \dots, w_k, u_1, \dots, u_l, v_1, \dots, v_m)$

- STAČÍ DOKÁZAT, ŽE E JE BÁZE $U+V$ (PAK TOTIŽ $\dim(U+V) = k + l + m$ A ROVNOST (*) BUDE PLATIT)

  ⋮

- CHYBÍ LN POSLOUPNOSTI E:
  - ŘEKNĚME, ŽE $\underbrace{\sum_{i=1}^{k} a_i w_i}_{\in U \cap V} + \underbrace{\sum_{s=1}^{l} b_s u_s}_{\in U} + \underbrace{\sum_{t=1}^{m} c_t v_t}_{\in V} = 0$, KDE $a_i, b_s, c_t \in T$.
  - TJ: $\underbrace{\sum_{s=1}^{l} b_s u_s}_{\in U} = \underbrace{\sum_i (-a_i) w_i + \sum_t (-c_t) \cdot v_t}_{\in V}$ $\in U \cap V$

  $\Rightarrow$ MÁME VYJÁDŘENÍ $\sum_{s=1}^{l} b_s u_s = \sum_{i=1}^{k} d_i \cdot w_i$ PRO NĚJAKÁ $d_i \in T$

  $\Rightarrow$ Z TOHO, ŽE C JE LN, PLYNE $d_i = 0$ $\forall i$ A $b_s = 0$ $\forall s$

  – PODOBNĚ: $c_t = 0$ $\forall t$, POTOM Z LN B JSOU $a_i = 0$ $\forall i$

$\square$

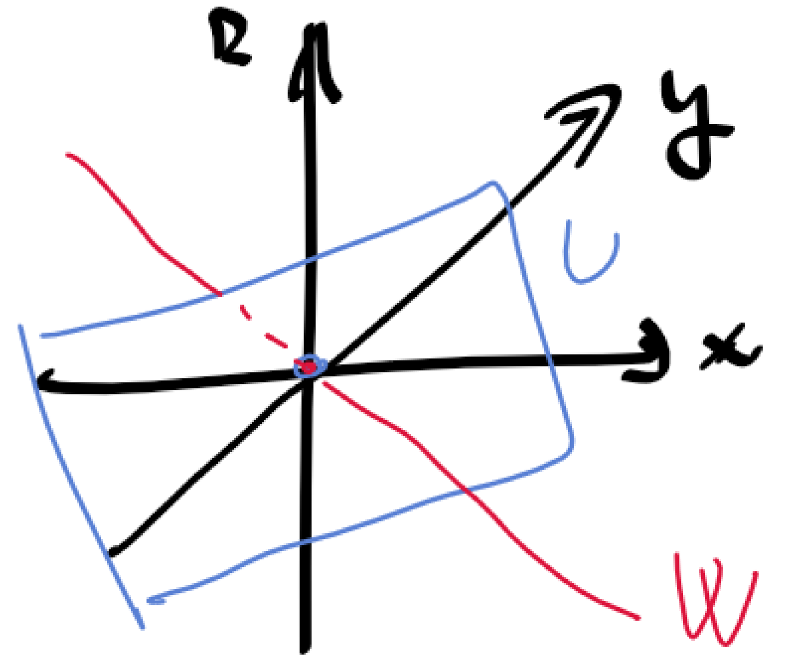
– DIREKTNÍ SOUČTY PRO 2 PODPROSTORY:

– **DEF 5.106 (SPEC. PŘÍPAD)**: MĚJME V V.P. NAD T A $U, W \leq V$.
PAK V JE **DIREKTNÍ SOUČET** U A W, POKUD:

a) $U + W = V$ A
b) $U \cap W = \{o\}$.

ZNAČÍME: $V = U \oplus W$.

– **PŘ**: $V = \mathbb{R}^3$, $T = \mathbb{R}$, U = ROVINA
W = PŘÍMKA NELEŽÍCÍ V U



– **V 5.107**: (SPEC. PŘÍPAD, ROZŠÍŘENÍ) BUĎ V V.P. A $U, W \leq V$.
PAK NPJE:

1. $V = U \oplus W$
2. $\forall v \in V \ \exists!\, u \in U, w \in W : \ v = u + w$
3. $V = U + W$ A $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$
4. $\{o\} = U \cap W$ A

– **DK**: ① $\Rightarrow$ ②: • PŘEDP. ① A BUĎ $v \in V \Rightarrow \exists \underset{U}{\underset{\cap}{u}}, \underset{W}{\underset{\cap}{w}} : v = u + w$
• POKUD $u + w = v = u' + w'$, PAK $\underbrace{u - u'}_{\in U} = \underbrace{w' - w}_{W} \in U \cap W = \{o\}$

② $\Rightarrow$ ①: • PŘEDP ②, PAK URČITĚ $U + W = V$
• POKUD $v \in U \cap W$, PAK $\underset{U}{\underset{\cap}{v}} + \underset{W}{\underset{\cap}{o}} = \underset{U}{\underset{\cap}{o}} + \underset{W}{\underset{\cap}{v}}$, TJ. $v = o$

① $\Leftrightarrow$ ③ $\Leftrightarrow$ ④: POUŽIJE SE V5.103

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

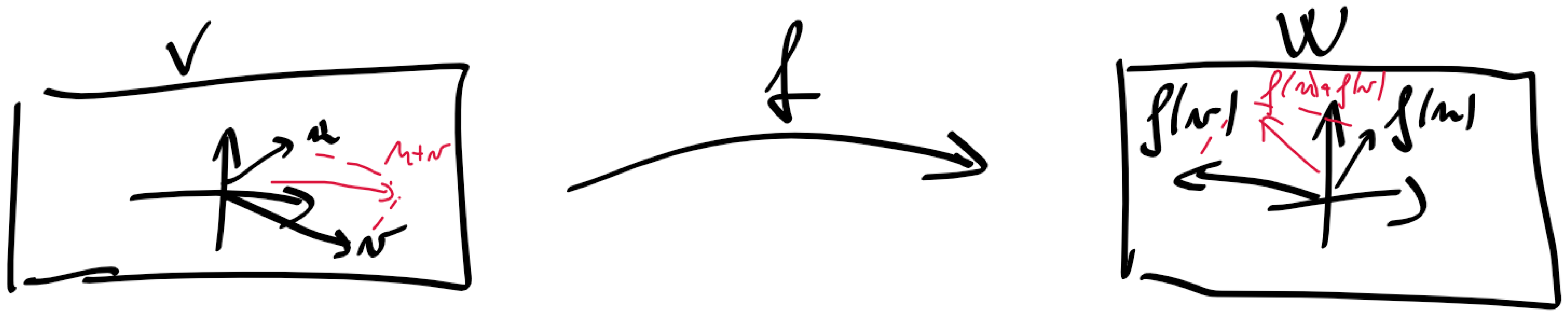
DEF 6.1: PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE MÁME VEKTOROVÉ PROSTORY V, W NAD STEJNÝM TĚLESEM T. ŘEKNEME, ŽE ZOBRAZENÍ $f: V \to W$ JE LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ (TÉŽ HOMOMORFISMUS VEKTOROVÝCH PROSTORŮ), POKUD PLATÍ:

$$(1) \quad \forall u, v \in V: \quad f(u+v) = f(u) + f(v)$$

$$(2) \quad \forall u \in V \ \forall t \in T: \quad f(t \cdot u) = t \cdot f(u)$$

POZN:
(1) & (2) PLYNE, ŽE:
$$f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i f(v_i)$$
$\forall k \geq 0 \ \forall v_i \in V \ \forall a_i \in T$

SPEC $f(0) = 0$.

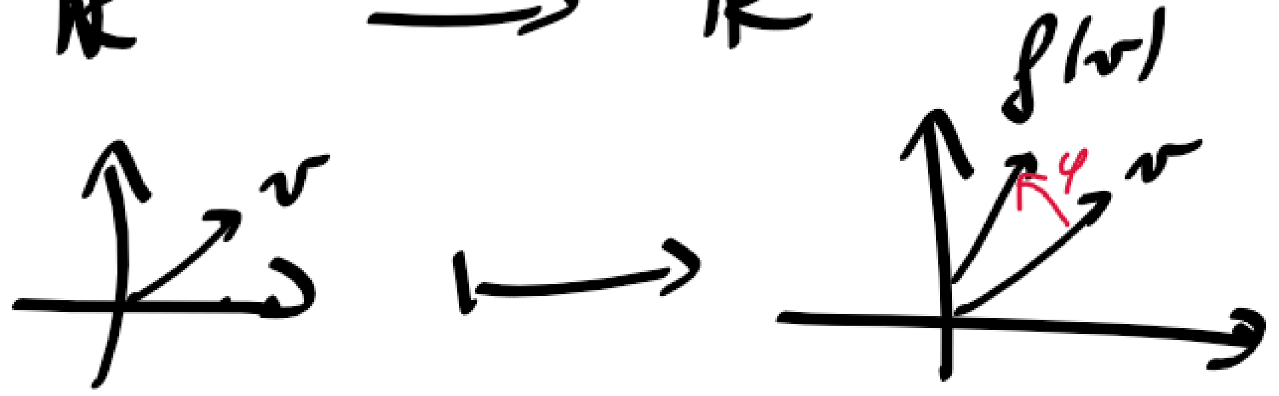


POZN:
- JSOU-LI $V = T^n$ A $W = T^m$ ARITMETICKÉ V.P. A $f = f_A$ JE DÁNO MATICÍ $A \in T^{m \times n}$, PAK $f_A: T^n \to T^m$ JE LINEÁRNÍ (VIZTE T4.54)
- DOKONCE JSME SI ŘÍKALI, ŽE ZOBRAZENÍ $f: T^n \to T^m$ JE TVARU $f = f_A$, PRÁVĚ KDYŽ f JE LINEÁRNÍ

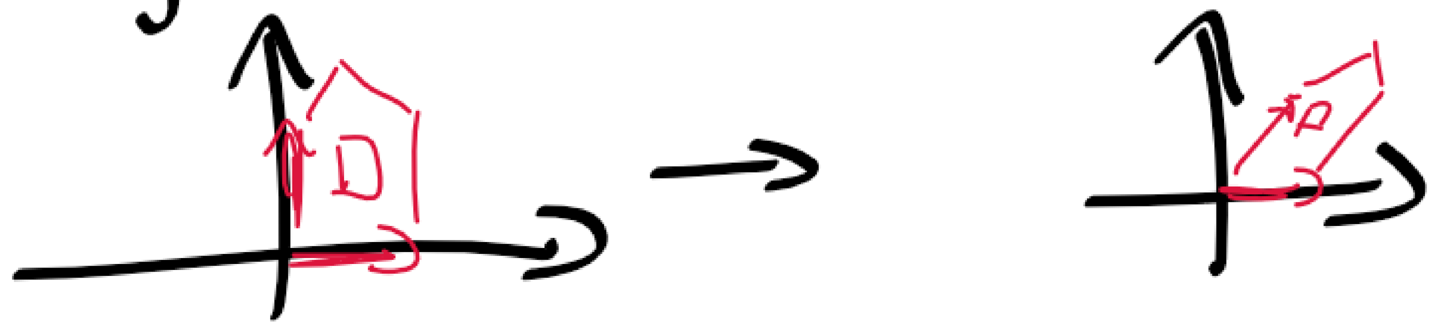
– PŘ: PRO $T = \mathbb{R}$:

- OTOČENÍ $\circlearrowleft \varphi$ JE LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ. PŘESNĚJI,

  $r_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ JE LINEÁRNÍ A JE DÁNO MATICÍ $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$



- ZKOSENÍ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ JE LIN., DÁNO MATICÍ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



– PŘ: BUĎ $V = \{ f : (0,1) \to \mathbb{R} :$ f JE DIFERENCOVATELNÁ,
TJ. $\forall x \in (0,1)$ EXISTUJE VLASTNÍ DERIVACE $\}$

$W = \{ f : (0,1) \to \mathbb{R} :$ f FUNKCE $\}$

PAK $\frac{d}{dx} : V \longrightarrow W$ JE LINEÁRNÍ
$\qquad\quad f \longmapsto f'$

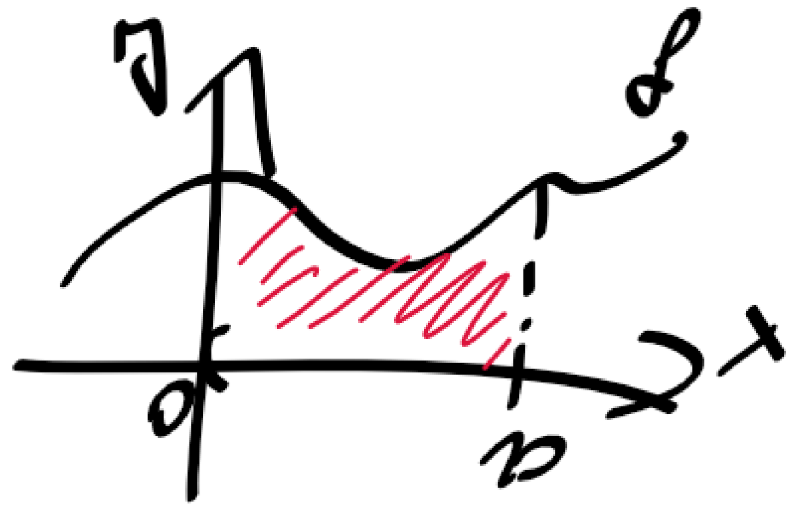
(Z ANALÝZY: $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ A $(tf)'(x) = t \cdot f'(x)$)

– PŘ: $V = \{ f : [0,10] \to \mathbb{R} : f$ INTEGROVATELNÁ $\}$

$\rightsquigarrow \int_0^{10} : V \longrightarrow \mathbb{R}$

$f \longmapsto \int_0^{10} f \, dx$

JE LINEÁRNÍ.



$\int_0^{10} f \, dx =$ PLOCHA POD f

-K DOTAZŮM

- V V.P. NAD T, $(X_i)_{i \in I}$, $X_i \subseteq V$

PAK $LO\left(\bigcup X_i\right) = \sum_{i \in I} LO(X_i) \overset{\text{DEF}}{=} LO\left(\bigcup_{i \in I} LO(X_i)\right)$

NAPŘ: $X, Y \subseteq V$, PAK $LO(X \cup Y) = LO\,X + LO\,Y$