

BÁZE - DOKONČENÍ

-T5.69: BUĎ V KON. GEN. V. P. NAD TĚLESEM T A
BUĎ $W \leq V$ PODPROSTOR. PAK PLATÍ:

- ① $\dim(W) \leq \dim(V)$, (SPECIÁLNĚ W JE TAKY KON. GEN.)
② $\dim(W) = \dim(V) \iff W = V.$

-DK: - KROK 1: UKÁŽEME, ŽE W JE KON. GEN. VEKTOROVÝ PROSTOR.

- OZNAČME $n := \dim(V)$.
- SPOREM, PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE W NENÍ KON. GEN., TJ. MŮŽEME INDUKCÍ VOLIT POSLOUPNOST VEKTORŮ Z W ,



$w_1, w_2, w_3, w_4, \dots, w_i, \dots$

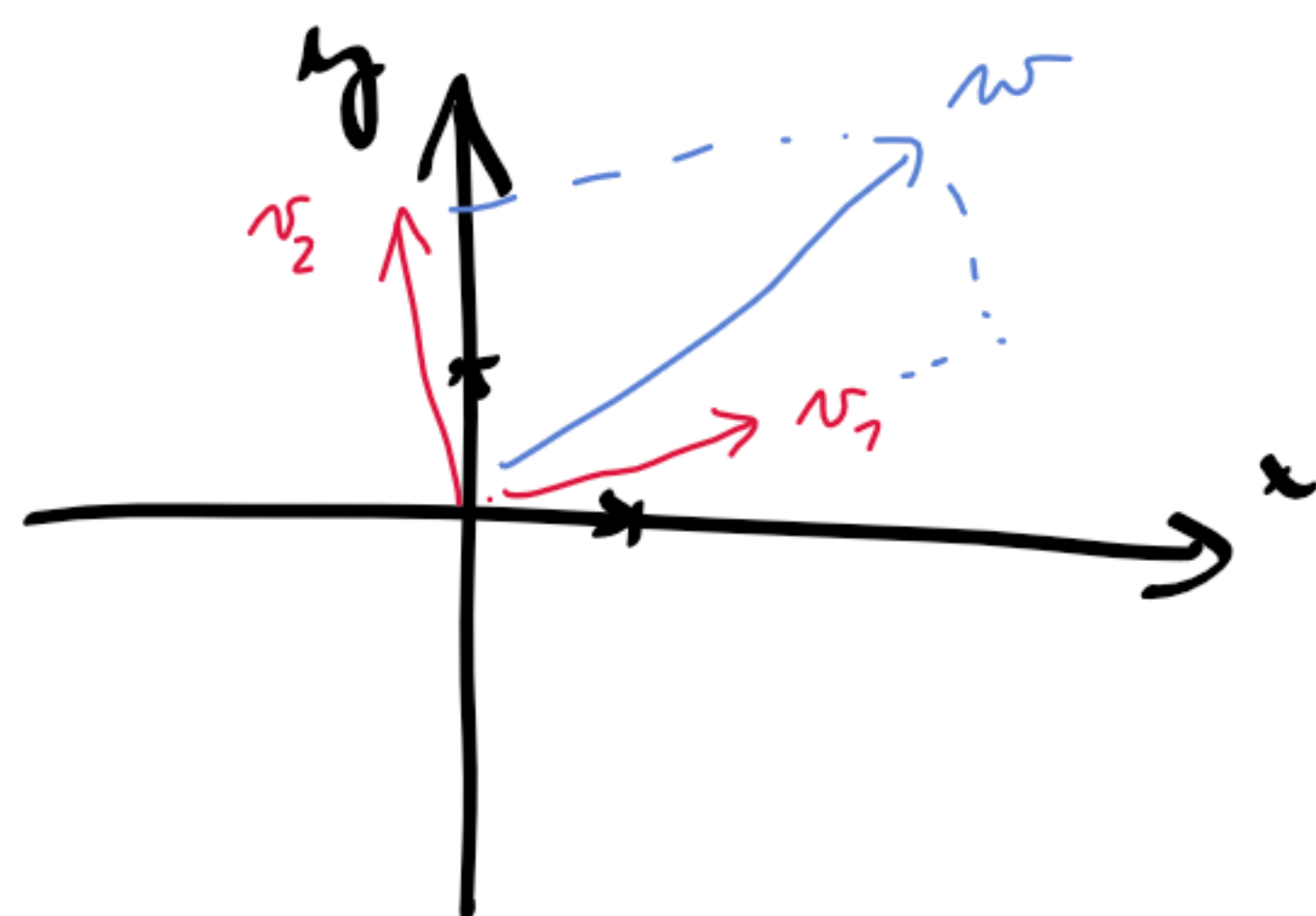
TAKOVOU, ŽE $\forall i \geq 1 : w_i \notin \text{LO}\{w_1, \dots, w_{i-1}\} (\leq W, \neq W)$

- Z T5.36(2) JE $(w_1, \dots, w_n, w_{n+1})$ LN $\forall w_i \in W$ I $\forall w_i \in V$
- SPOR S TÍM, ŽE $\dim(V) = n$ (POZOROVÁNÍ 5.67) !

-KROK 2: - ARGUMENT Z KROKU 1 UKAZOVAL, ŽE POSLOUPNOST $(w_1, \dots, w_n)$ Z W ,
KTERÁ JE LN $\forall w_i \in W$, JE LN I $\forall w_i \in V$, TEDY $k \leq n = \dim(V)$ (5.67)
 $\Rightarrow \dim(W) \leq \dim(V)$ & $\dim(W) = \dim(V) \iff W = V$ (5.67)

- BÁZE JAKO SOUŘADNICOVÝ SYSTÉM

- PR: $T = \mathbb{R}$



$$B = \left(\underset{\parallel v_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\parallel v_2}{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}} \right) \quad \text{BÁZE } \mathbb{R}^2$$

- Vezměme $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2$

- značení $[w]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(PODÍVEJTE SE
1 NA PR S. 74)

- DEF 5.71: BUĎ V V.P. NAD TĚLESEM T , $B = (v_1, \dots, v_n)$ BÁZE V ,
 $v \in V$. PAK SOUŘADNICE (TĚŽ VYJÁDRĚNÍ) VEKTORU v
VZHLÉDEM K B JE ARITMETICKÝ VEKTOR

$$[v]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in T^n$$

TAKOVÝ, ŽE $v = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n$ (VIZTE POZOROVÁNÍ S. 48)

- TS.75: BUĎ V V.P. NAD T S BÁZÍ $B = (v_1, \dots, v_n)$. PAK PLATÍ:

$$(1) \forall v, w \in V : \underset{\substack{\uparrow \\ V \oplus V}}{[v+w]}_B = [v]_B + \underset{\substack{\uparrow \\ V \oplus T^n}}{[w]}_B$$

$$(2) \forall v \in V \forall t \in T : [t \cdot v]_B = t \cdot [v]_B.$$

- POZN: V SITUACI TS.75 MÁME BILINKCI, KTERÁ RESPEKTUJE OPERACE NAV.P.

$$\begin{array}{ccc} f: V & \longrightarrow & T^n \\ v & \longmapsto & [v]_B \end{array}$$

f JE TZV. ISOMORFISMUS V.P.

- MATICE PŘECHODU:

• MĚJME V, V.P. NAD T, S BÁZÍMI $B = (v_1, \dots, v_n)$
 $C = (w_1, \dots, w_n)$

• ÚKOL: MÁME-LI $v \in V$ A ZNÁME-LI $[v]_B$, JAK RYCHLE SPočÍTAT $[v]_C$?

• UKÁŽE SE, ŽE EXISTUJE ČTVERCOVÁ MATICE $[id]_C^B$ ŘÁDU n
TAKOVÁ, ŽE

$$\forall v \in V: \underset{\substack{\uparrow \\ T^n}}{[v]}_C = [id]_C^B \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ T^n}}{[v]}_B \quad (TS.79)$$

- MATICE PŘECHODU:

• MĚJME V , V.P. NAD T , S BÁZEMI

$$B = (\underbrace{v_1, \dots, v_{r-1}, v_r}_{v_1, \dots, v_n})$$
$$C = (w_1, \dots, w_n)$$

• ÚKOL: MÁME-LI $v \in V$ A ZNÁME-LI $[v]_B$, JAK RYCHLE SPočÍTAT $[v]_C$?

• UKÁŽE SE, ŽE EXISTUJE ČTVERCOVÁ MATICE $[id]_C^B$ ŘÁDU n TAKOVÁ, ŽE

$$\forall v \in V: \underbrace{[v]_C}_{\substack{\uparrow \\ T^n}} = \underbrace{[id]_C^B}_{\substack{\uparrow \\ T^n}} \cdot \underbrace{[v]_B}_{\substack{\uparrow \\ T^n}} \quad (TS.78)$$

- JAK MUSÍ $[id]_C^B$ VYPADAT?

- DOSADÍME $v = v_i$, $1 \leq i \leq n$. PAK

$$[v_i]_C = [id]_C^B \cdot [v_i]_B = [id]_C^B \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\leftarrow i \\ e_i}}$$

- DEF: MATICE PŘECHODU OD BÁZE B K BÁZI C JE

$$(5.78) \quad \text{MATICE } [id]_C^B = \left([v_1]_C \mid [v_2]_C \mid \dots \mid [v_n]_C \right) \in T^{n \times n}$$

i -TÝ SLOUPEC $[id]_C^B$

- TS.78: V V.P. NAD T , B, C BÁZE V . PAK $\forall v \in V$ PLATÍ $[v]_C = [id]_C^B \cdot [v]_B$.

- PODÍVEJTE SE NA PŘÍKLAD 5.81.

- HODNOST A BÁZOVÉ SLOUPCE MATICE PODRUHÉ (KAP 5.5)

- PŘÍPOMĚNĚ DEF 2.17

- BUĎ A MATICE TYPU $m \times n$ NAD T .

$$A = \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \quad m$$

ERŮ
GAUSSOVA
ELIMINACE

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \quad m = C \quad \text{V ODSTUPŇOVANÉM TVARU}$$

- HODNOST: $r = \text{rank}(A) = \# \text{ NEVULOVÝCH ŘÁDKŮ } C = \# \text{ PIVOTŮ V } C$
- BÁZOVÉ SLOUPCE: $z_1, z_2, \dots, z_r$

- TS 85: JE-LI $C = (c_1 | c_2 | \dots | c_n)$ TYPU $m \times n$ NAD T V ODSTUPŇOVANÉM TVARU, PAK z -TÝ SLOUPEC c_z JE BÁZOVÝ, PŘÁVĚ KDYŽ

$$c_z \notin \text{LO} \{c_1, \dots, c_{z-1}\}.$$

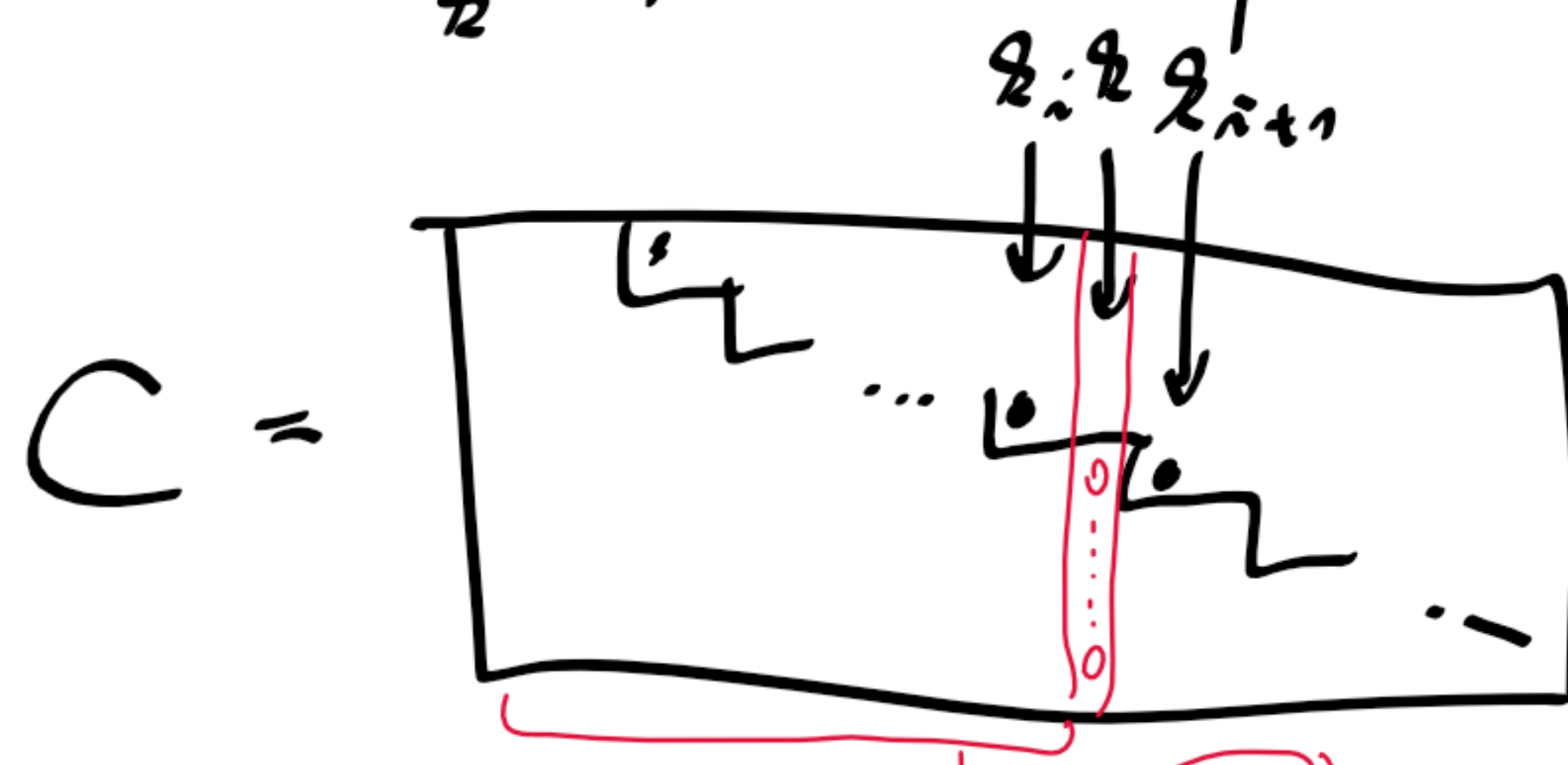
- DK: - POKUD $z = z_i$ JE BÁZOVÝ, PAK MÁ V i -TÉM ŘÁDKU $\neq 0$ PRVEK, ALE $c_1, c_2, \dots, c_{z_i-1}$ TAM MAJÍ 0. SPECIÁLNĚ $c_{z_i} \notin \text{LO} \{c_1, \dots, c_{z_i-1}\}.$

- T585: JE-LI $C = (c_1 | c_2 | \dots | c_m)$ TYPU $m \times m$ NAD T V ODSTUPŇOVANÉM TVARU, PAK k -TÝ SLOUPEC c_k JE BÁZOVÝ, PŘÁVĚ KDYŽ

$$c_k \notin LO\{c_1, \dots, c_{k-1}\}.$$

- DK: - POKUD $k = k_i$ JE BÁZOVÝ, PAK MÁ V i -TÉM ŘÁDKU $\neq 0$ PRVEK, ALE $c_1, c_2, \dots, c_{k_i-1}$ TAM MAJÍ 0. SPECIÁLNĚ $c_{k_i} \notin LO\{c_1, \dots, c_{k_i-1}\}.$

- NAOTPAK, BUĎ c_k NEBÁZOVÝ TJ. $k_i < k < k_{i+1}$ (NEBO $k < k_1$ NEBO $k > k_n$)



- VŠIMNĚME SI, ŽE SLR $(c_1 | \dots | c_{k-1}) \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{k-1} \end{pmatrix} = (c_k)$ MÁ ŘEŠENÍ,

PROTOŽE ROZŠÍŘENÁ MATICE SOUSTAVY $(c_1 | \dots | c_{k-1} | c_k)$ NEMÁ PIVOT V POSLEDNÍM SLOUPCI
 $\Rightarrow c_k \in LO\{c_1, \dots, c_{k-1}\}$

□

– T5.86: BUĎ A LIBOVOLNÁ MATICE TYPU $m \times n$ NAD T ,
 BUĎ R REGULÁRNÍ MATICE ŘÁDU m , POLOŽME $B = R \cdot A$.

OZNAČME

$$A = \left(a_1 \mid \dots \mid a_n \right), \quad B = \left(b_1 \mid \dots \mid b_n \right).$$

PAK $\forall 1 \leq k \leq n$ PLATÍ:

$$a_k \in \text{LO} \{a_1, \dots, a_{k-1}\} \iff b_k \in \text{LO} \{b_1, \dots, b_{k-1}\}.$$

– Dk: – Vezměme $t_1, \dots, t_{k-1} \in T$

– PAK

$$a_k = t_1 a_1 + \dots + t_{k-1} a_{k-1}$$

$$\Downarrow$$

$$T^m \ni 0 = t_1 a_1 + \dots + t_{k-1} a_{k-1} + (-1) \cdot a_k$$

$$\Downarrow$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{k-1} \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$B = R \cdot A$$

$$A = R^{-1} B$$



$$\Downarrow$$

$$B \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{k-1} \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff b_k = t_1 b_1 + \dots + t_{k-1} b_{k-1}$$

□

- DŮSL: BUĎ A MATICE TYPU $m \times n$ NAD T . PAK PLATÍ:

VIZTE DEF 5.82 $\rightarrow$ ① k -TÝ SLoupEC A JE BÁZOVÝ $\Leftrightarrow a_k \notin \text{LO} \{a_1, \dots, a_{k-1}\}$,

VIZTE DEF. 5.89 $\rightarrow$ ② $\text{rank}(A) = \dim(\text{Im}(A))$.
A POZOROVÁNÍ 5.83
