

BAZE - POKRAČOVÁNÍ

- OTÁZKY KE ZODPOVĚZENÍ DNES!

① MÁ KAŽDÝ VEKTOROVÝ PROSTOR BÁZE?

② JSOU VŠECHNY BÁZE STEJNĚ VELKÉ (PRO JEDEN DANÝ V.P.)?

- OPRAVNÝ ZÁPOČTOVÝ TEST: ÚT 12.1. 10⁴⁰

- ODPOVĚDI NA ① ② BUDOU PRO Tzv. KONEČNĚ GENEROVANÉ VEKTOROVÉ PROSTORY

- DEF (5,55): VEKTOROVÝ PROSTOR V NAD TĚLESEM T JE KONEČNĚ GENEROVANÝ (KON. GEN.) POKUD $\exists X \subseteq V$ KONEČNÁ TAKOVÁ, ŽE $V = \text{LD}(X)$.

PŘ: 1) T TĚLESO, $V = T^n$ JE KON. GEN. (NAPŘ $X = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$)
 $n \geq 1$

2) $T = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^\omega = \{ (a_1, a_2, a_3, \dots) : a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R} \}$ NENÍ KON. GEN. !!!

- PRO TUTO PŘEDNÁŠKU: VŠECHNY V.P. BUDOU KON. GEN. (POKUD NEBUDĚ ŘEČENO JINAK)

- T 5.56: V VEKTOROVÝ PROSTOR NAD T ,
 (v_1, \dots, v_n) JE POSLOUPNOST GENERÁTORŮ, KTERÁ JE MINIMÁLNÍ TAKOVÁ,
PAK (v_1, \dots, v_n) BÁZE V .

- DŮSL. 5.57: Z KAŽDÉ KONEČNÉ POSLOUPNOSTI (v_1, \dots, v_n) , KTERÁ GENERUJE
 V , LZE VYBRAT BÁZI V .

SPECIÁLNĚ PLATÍ ŽE KAŽDÝ KONEČNĚ GENEROVANÝ
VEKTOROVÝ PROSTOR MÁ BÁZI (ODPOVĚĎ NA 7)

- PŘ 5.59: $V = \text{LO} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3, T = \mathbb{R} \Rightarrow V \text{ KON. GEN.}$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$$

$\underline{v_1}$ $\underline{v_2}$ $\underline{v_3}$

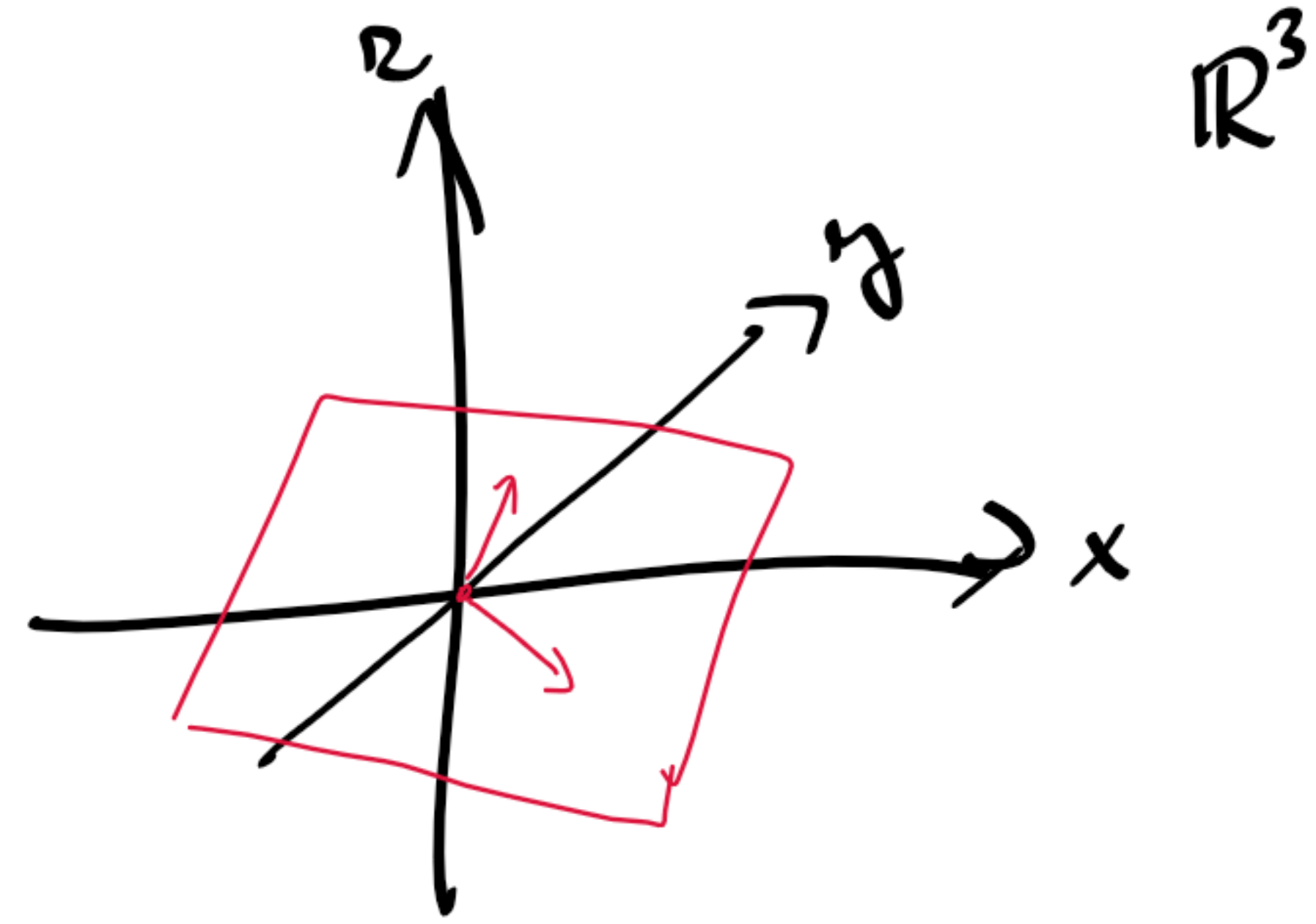
POZOR:

$$v_2 = v_1 + 2 \cdot v_3$$
$$v_1 = v_2 - 2v_3$$
$$v_3 = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$$

- BÁZE: (v_1, v_3) JE BÁZE V .

- PŘ: $V = \mathbb{R}^3, (e_1, e_2, \cancel{e_2}, \cancel{e_3}, 2e_3)$

- JSOU VŠECHNY BÁZE DANÉHO KON. GEN. VEKTOROVÉHO PROSTORU V
STEJNĚ VELKÉ?



-V 5.60 (STEINITZOVA VĚTA O VÝMĚNĚ)

BUĎ V VEKTOROVÝ PROSTOR NAD TĚLESEM T . MĚJME:

LN. NEZÁVISLÁ \rightarrow

$$N = (n_1, \dots, n_r)$$

LN POSLOUPNOST VEKTORŮ V ,

GENERUJÍCÍ \rightarrow

$$G = (w_1, \dots, w_\ell)$$

GENERUJÍCÍ POSLOUPNOST VEKTORŮ ($\text{LO}\{w_1, \dots, w_\ell\} = V$)

PAK

$$r \leq \ell$$

A NAVÍC

MŮŽEME G PŘEUSPOŘÁDAT NA

$$G' = (w'_1, \dots, w'_\ell)$$

TAK, ABY

$$(n_1, \dots, n_r, w'_{r+1}, \dots, w'_\ell) \text{ GENEROVALA } V.$$

-DK:

- INDUKCÍ PODLE r
- PRO $r=0$ JE ZÁVĚR VĚTY TRIVIALNÍ

• PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE ZÁVĚR VĚTY PLATÍ PRO LN POSL. DÉLKY $r-1$, KDE $r \geq 1$

• POUŽIJEME TENTO INDUKČNÍ PŘEDPOKLAD NA $N' := (n_1, \dots, n_{r-1})$ A G

• T.J. VÍME, ŽE $r-1 \leq \ell$ A MŮŽEME PŘEUSPOŘÁDAT G NA

$$G'' = (w''_1, \dots, w''_\ell)$$

TAK, ABY

$$(n_1, \dots, n_{r-1}, w''_r, \dots, w''_\ell) \text{ GENEROVALA } V$$

-DK (POKRAČOVÁNÍ):

- T.J. víme, $\exists \epsilon$ $k-1 \leq \ell$ A MŮŽEME PŘEUSPOŘÁDAT G NA

TAK, ABY $G'' = (w_1'', \dots, w_\ell'')$
 $(v_1, \dots, v_{k-1}, w_{k-1}'', \dots, w_\ell'')$ GENEROVALA $V \ni v_k$

- SPECIÁLNĚ $v_k \in \text{LO} \{ v_1, \dots, v_{k-1}, w_{k-1}'', \dots, w_\ell'' \} = V$, T.J. MÁME
VYJÁDRĚNÍ

$$v_k = a_1 \cdot v_1 + \dots + a_{k-1} \cdot v_{k-1} + a_k \cdot w_{k-1}'' + a_{k+1} \cdot w_{k+1}'' + \dots + a_\ell \cdot w_\ell''$$

PRO NĚJAKÁ $a_1, \dots, a_\ell \in T$

- PRO TO $\exists \epsilon$ $(v_1, \dots, v_{k-1}, v_k) = N$ JE LN, $\exists k \leq i \leq \ell : a_i \neq 0$

$\Rightarrow k \leq \ell$

- BÚNO $a_k \neq 0$ (POTENCIÁLNĚ MUSÍME PŘEUSPOŘÁDAT G'')

$\Rightarrow w_{k-1}'' = (-a_k^{-1} a_1) \cdot v_1 + \dots + (-a_k^{-1} a_{k-1}) v_{k-1} + a_k^{-1} v_k + (-a_k^{-1} a_{k+1}) w_{k+1}'' + \dots + (-a_k^{-1} a_\ell) w_\ell''$

- T.J. $V \ni \text{LO} \{ v_1, \dots, v_k, w_{k+1}'', \dots, w_\ell'' \} \supseteq \text{LO} \{ v_1, \dots, v_{k-1}, w_{k-1}'', w_{k+1}'', \dots, w_\ell'' \} = V$

$\Rightarrow V = \text{LO} \{ \text{---} \parallel \text{---} \}$

□

DŮSL 5.61: V KON. GEN. V. P. NAD T . PAK KAŽDÉ 2 BÁŽE
 $B = (v_1, \dots, v_r)$, $C = (w_1, \dots, w_l)$ MAJÍ STEJNÝ POČET PRVKŮ,
TJ. $r = l$. (ODPOVĚĎ NA ②)

DEF: DIMENZÍ KON. GEN. V. P. V NAD T ROZUMÍME
5.62 # PRVKŮ LIBOVOLNÉ BÁŽE V . ZNAČÍME $\dim(V)$.

DŮSL 5.65: V KON. GEN. V. P. A $B = (v_1, \dots, v_r)$ JE MAX. LN POSLOUPNOST,
PAK B JE BÁŽE.

OBEČNĚJI, JE-LI $G = (w_1, \dots, w_l)$ GENERUJÍCÍ A $N = (v_1, \dots, v_r)$
LN, PAK LZE N DOPLNIT PRVKY G NA BÁŽI V .

SHRNUTÍ: (POZOROVÁNÍ 5.67) V KON. GEN. V. P. NAD T , $n = \dim(V)$.

- ① KAŽDÁ MNOŽINA GENERÁTORŮ V MÁ $\geq n$ PRVKŮ.
 - ② KAŽDÁ LN POSLOUPNOST $Z \subset V$ MÁ $\leq n$ PRVKŮ
-

NAVÍC, JE-LI $B = (v_1, \dots, v_r)$ POSLOUPNOST VEKTORŮ A SPLŇUJE 2 Z
NÁSLEDUJÍCÍCH VLASTNOSTÍ, PAK SPLŇUJE I TU TŘETÍ:

- a) B JE LN,
- b) $LO B = V$,
- c) $r = n$

-T5.69: BUĎ V KON. GEN. V. P. NAD TĚLESEM T A
BUĎ $W \subseteq V$ PODPROSTOR, PAK PLATÍ:

$$\textcircled{1} \dim(W) \leq \dim(V),$$

$$\textcircled{2} \dim(W) = \dim(V) \iff W = V.$$

-POZNÁMKA K DK: MUSÍME NAPŘED DOKÁZAT, ŽE W JE KON. GEN.!