- ORGANIZAČNÍ POZNÁMKY

  - MIDTERMY
  - PŘEHLEDY PROBRANÉ LÁTKY
  - ANKETA KE SKUPINOVÝM DÚ
  - PŘÍŠTÍ TÝDEN NEBUDE KVÍZ ANI DÚ

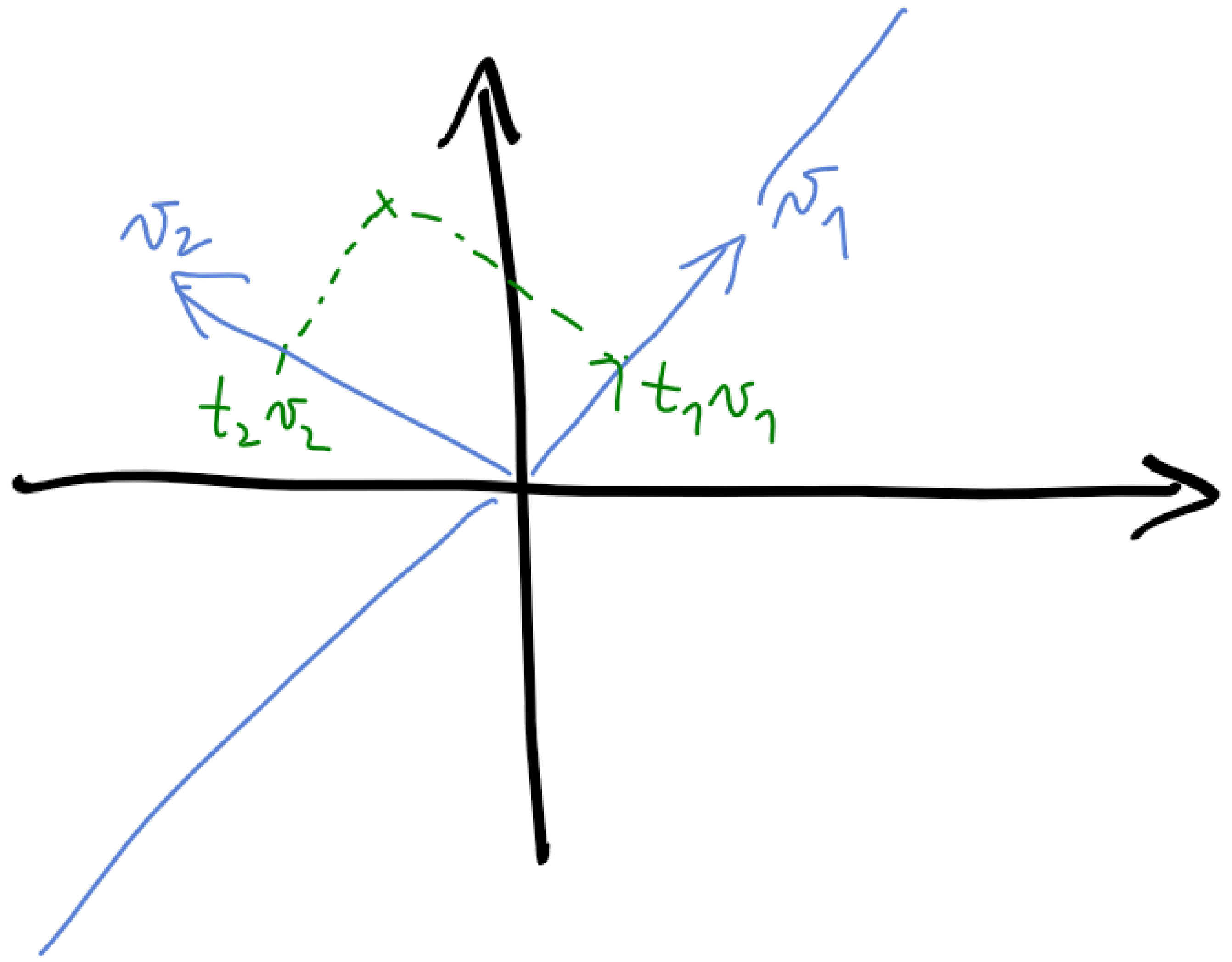
BÁZE VEKTOROVÝCH PROSTORŮ

- **DEF 5.47:** V vektorový prostor nad T.
  Pak posloupnost vektorů $(v_1, \dots, v_m)$ je <u>BÁZE</u> V,
  pokud je LINEÁRNĚ NEZÁVISLÁ a $LO\{v_1, \dots, v_m\} = V$.

- **POZOROVÁNÍ 5.48:** V vektorový prostor, $(v_1, \dots, v_m)$ posloupnost vektorů,
  pak

$$\big((v_1, \dots, v_m) \text{ je báze} \big) \iff \big(\forall v \in V \ \exists!\, t_1, \dots, t_m \in T : \ v = t_1 v_1 + \dots + t_m v_m \big)$$

- **PŘ:** $T = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$



(v_1, v_2)

- **PŘ/DEF (5.50):** T těleso, $V = T^n$ $(n \geq 1)$

- Uvažujme posloupnost $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, kde $e_i = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \hspace{-0.5em} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

- Toto je báze $V = T^n$: (použijeme pozorování 5.48):

$$T^n \ni v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} + \ldots + x_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \ldots + x_n \cdot e_n$$

- $(e_1, \ldots, e_n)$ se nazývá kanonickou bází T^n.

- Jak vypadají jiné báze T^n? Máme-li posloupnost $(v_1, \ldots, v_n)$ z T^n, jak poznáme, jestli jde o bázi?

$$A = \underbrace{\left(v_1 \,\middle|\, v_2 \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, v_n \right)}_{n} \Big\} n \text{ je regulární} \overset{\text{použijeme např. 4.81}}{\iff} (v_1, \ldots, v_n) \text{ báze } T^n$$

A regulární $\iff$ $Ax = b$ má $\forall b \in T^n$ jednoznačné řešení

- **PŘ:** $T = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^2$

- PŘ: BUĎ $T = \mathbb{Z}_7$, $V = LO\left\{ \begin{pmatrix}2\\1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\6\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\2\\3\end{pmatrix} \right\}$ $(\leq T^4)$

(5.53)

NAJDĚTE BÁZI V (NĚJAKOU!).

- NAPÍŠEME SI VEKTORY DO ŘÁDKŮ MATICE:

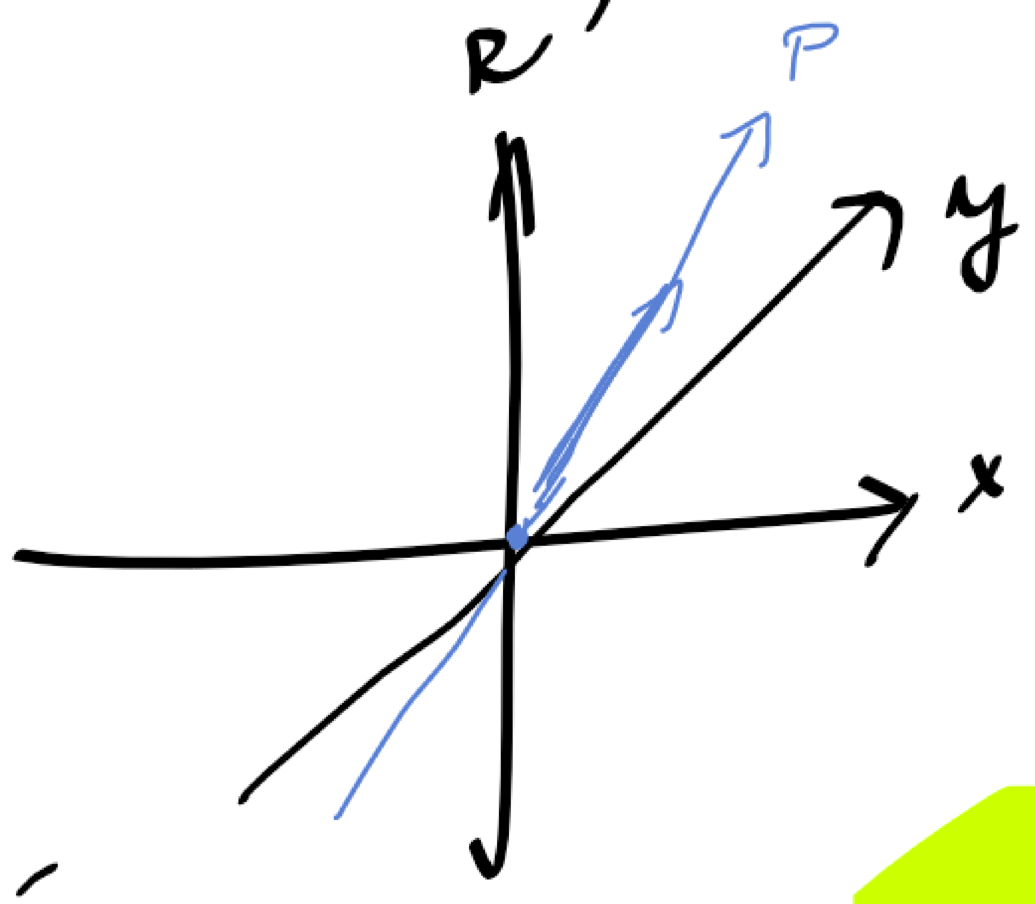
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{EŘÚ} \\ (\text{NEMĚNÍ } \operatorname{Im} A^T)}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PODLE T5.43 JSOU PRVNÍ 3 ŘÁDKY LN!

$$\Rightarrow \left(\begin{pmatrix}2\\1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\6\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\4\end{pmatrix} \right) \text{ JE BÁZE } V.$$

- <u>KVÍZ</u>: MÁME-LI V $\mathbb{R}^3$ DANOU PŘÍMKU P SE SMĚR. VEKTOREM $(1,1,1)$ PROCHÁZEJÍCÍ POČÁTKEM, JAK VYPADAJÍ BÁZE P?



$\left(\begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \right)$ JE BÁZÍ, KDYKOLI $t \neq 0$.

- MÁ NULOVÝ PROSTOR $V = \{o\}$ NAD T BÁZI?

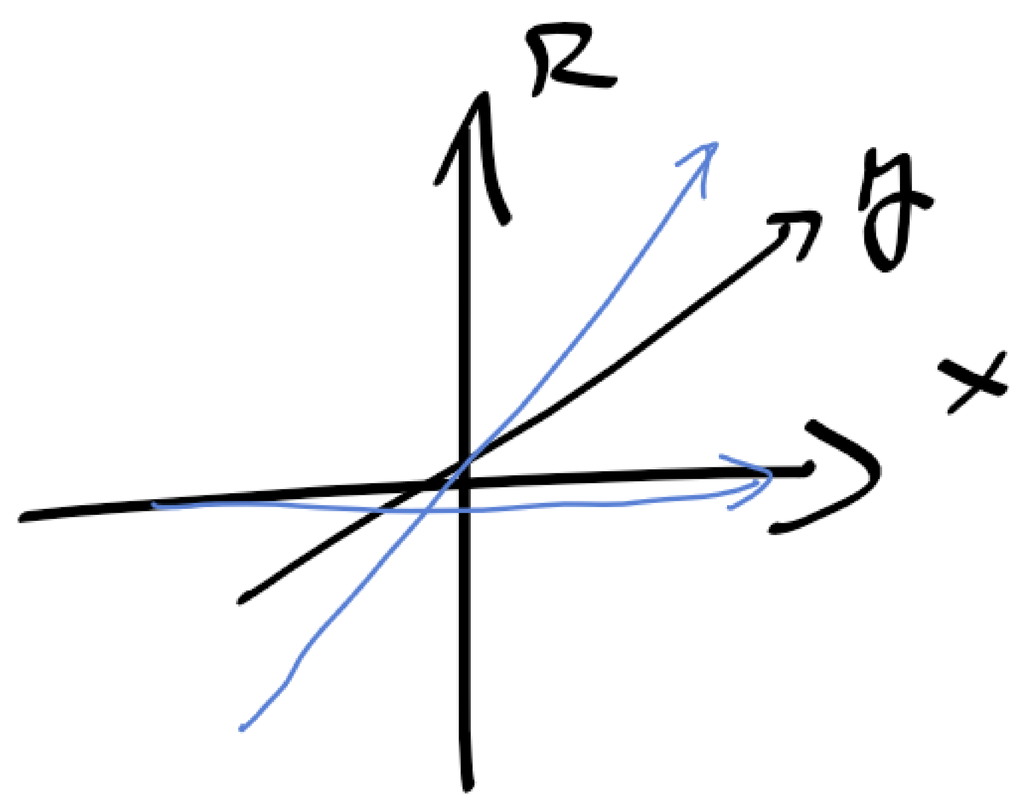
ANO, BÁZE JE $\emptyset$.

- <u>T 5.56</u>: V V.P. NAD T, $(v_1, \ldots, v_n)$ JE MINIMÁLNÍ POSLOUPNOST GENERÁTORŮ (ODEBEREME-LI NĚJAKÉ v_i, VŽ TO NEBUDE POSLOUPNOST GENERÁTORŮ), PAK JDE O BÁZI V.

- <u>DK</u>: - PŘÍMO Z DEF. JSOU $(v_1, \ldots, v_n)$ L.N.

- PŘ (ERÚ MOHOU MĚNIT SLOUPCOVÝ PROSTOR MATICE)

$T = \mathbb{R}$ | $A = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \overset{ERÚ}{\sim} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = B$



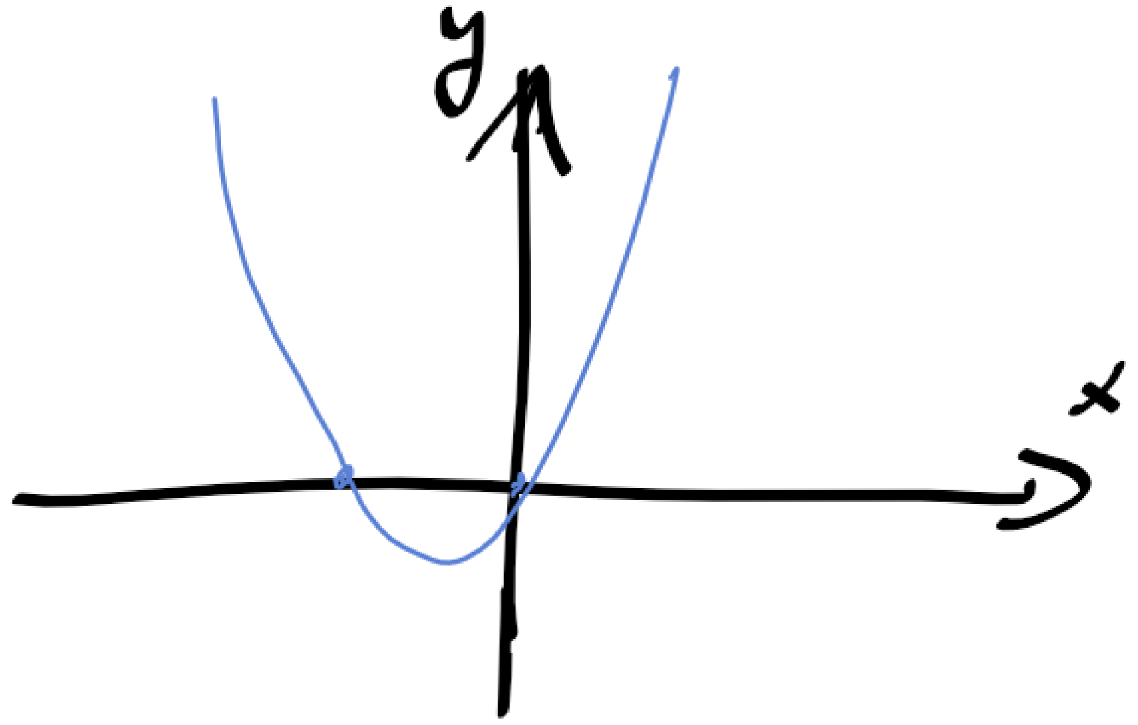
SLOUPCOVÝ PROSTOR A : $LO\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$

—— || —— B : $LO\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

- DOTAZ KE KVÍZU, OT 4. PROČ x^2+x NEMŮŽE BÝT 0.

$x^2+x \in \mathbb{R}[x]$

NENÍ NULOVÝ POLYNOM



JSOU LN

$(x^2+x,\ x+1,\ x) \rightsquigarrow ax^2+bx+c \rightsquigarrow$

JE POPSÁN VEKTOREM KOEFICIENTŮ $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

$(1,1,0)^T$ — VEKTOR KOEFICIENTŮ x^2+x

$(0,1,1)^T$ — —— || —— $x+1$

$(0,1,0)^T$ — —— || —— x