VEKTOROVÉ PROSTORY A PODPROSTORY

- PŘIPOMENUTÍ

  - VEKTOROVÝ PROSTOR NAD TĚLESEM T JE TVOŘEN
    1. MNOŽINOU V A
    2. OPERACEMI $V \times V \xrightarrow{+} V$, $T \times V \xrightarrow{\cdot} V$,

    KTERÉ SPLŇUJÍ NĚJAKÉ AXIOMY.
  - VEKTOROVÝ PODPROSTOR $U \leq V$ JE TVOŘEN NEPRÁZDNOU PODMNOŽINOU V TAKOVOU, ŽE

$$\left.\begin{array}{lll} (1)\ u, v \in U & \Rightarrow & u + v \in U \quad \text{A} \\ (2)\ t \in T,\ u \in U & \Rightarrow & t \cdot u \in U, \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \in U$$

SPOLU S OPERACEMI VZNIKLÝMI ZÚŽENÍM TĚCH Z V.

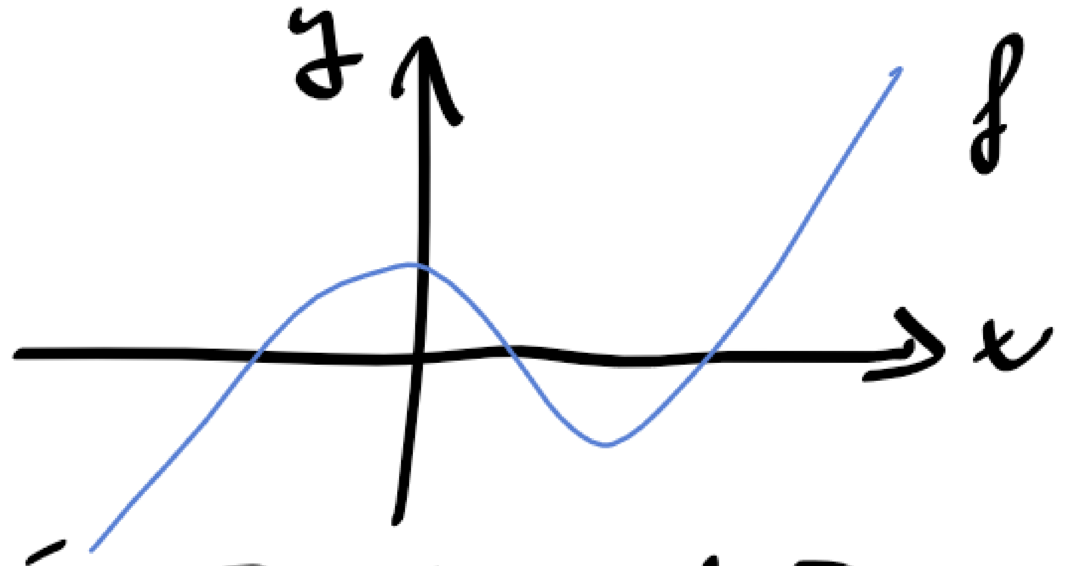
- PŘ: $V = T^n$ (MNOŽINA SLOUPCOVÝCH VEKTORŮ) SPOLU S PŘIROZENÝMI OPERACEMI

- PŘ: T TĚLESO, $m, n \in \mathbb{N}$, OZNAČÍME

$$T^{m \times n} = \{ A \mid A \text{ MATICE TYPU } m \times n \text{ NAD } T \}$$

S OPERACEMI SČÍTÁNÍ PO SLOŽKÁCH A NÁSOBENÍ SKALÁREM JE V.P.
(T^n JE TOTÉŽ CO $T^{n \times 1}$)

- **PŘ**: POLYNOM NAD $\mathbb{R}$ JE VÝRAZ TVARU $f = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$



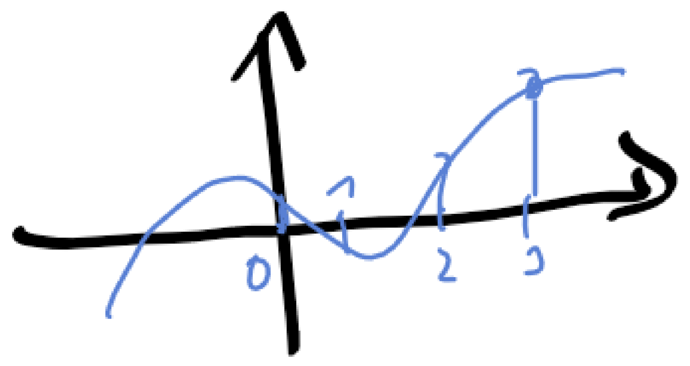
VŠECHNY POLYNOMY NAD $\mathbb{R}$ TVOŘÍ VEKTOROVÝ PROSTOR NAD $\mathbb{R}$. ZNAČENÍ: $\mathbb{R}[x]$.
OPERACE: SČÍTÁNÍ POLYNOMŮ A NÁSOBENÍ POLYNOMU KONSTANTOU Z $\mathbb{R}$.

- POKUD ZVOLÍME $n \in \mathbb{N}$ $\rightsquigarrow$ PODMNOŽINA $U_n = \{ f \in \mathbb{R}[x] : \text{STUPEŇ } f \text{ JE } \le n \}$ $(0 \in U_n)$
- PAK $U_n \le \mathbb{R}[x]$, DOKONCE $U_0 \le U_1 \le U_2 \le \dots \le U_{173} \le \dots \le \mathbb{R}[x]$

- **POZN**: U_n SE DÁ ZTOTOŽNIT S ARITMETICKÝM V.P.!

$$U_n \xrightarrow{\text{BIJEKCE}} \mathbb{R}^{n+1}$$
$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \longmapsto \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

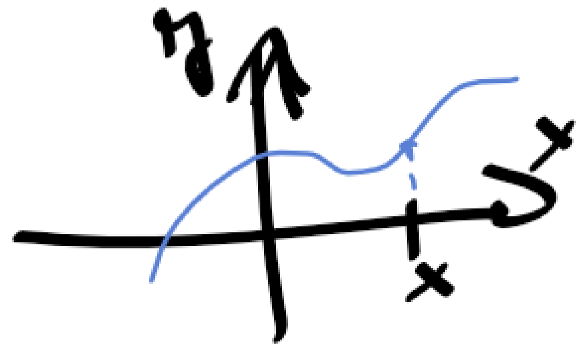
$$U_n \xrightarrow{\text{BIJEKCE}} \mathbb{R}^{n+1}$$
$$f \longmapsto \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix}$$



- **PŘ**: $T = \mathbb{R}$

$$\{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} : f \text{ POLYNOMIÁLNÍ} \} \leq \{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} : f \text{ SPOJITÁ} \} \leq \{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} : f \text{ ZOBRAZENÍ} \}$$

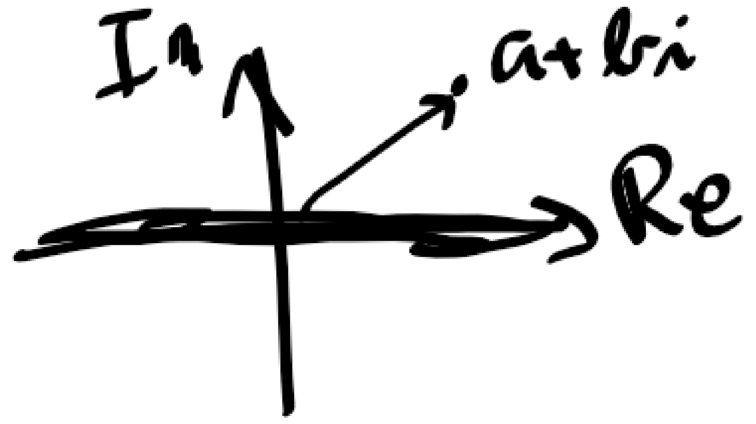
$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \lim\limits_{x_0 \to x} f(x_0)$



SPOLU SE SČÍTÁNÍM FUNKCÍ A NÁSOBENÍM FUNKCE KONSTANTOU JE V.P. NAD $\mathbb{R}$

- **PŘ**: $\mathbb{R} \leq \mathbb{C}$

PODPROSTOR NAD $\mathbb{R}$



$\mathbb{C}$ JE V.P. NAD $\mathbb{R}$

$+ : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$\cdot : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ZÚŽÍME NA $\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\rightsquigarrow$ SPLŇUJÍ AXIOMY V.P.

- **OBECNĚJI**: T TĚLESO, $S \subseteq T$ JE PODTĚLESO, PAK T LZE UVAŽOVAT JAKO V.P. NAD S; OPERACE:

$T \times T \xrightarrow{+} T$

$S \times T \xrightarrow{\cdot} T$ (ZÚŽENO Z $T\times T \xrightarrow{\cdot} T$)

- PODPROSTORY:

  - PŘ: PODPROSTORY $\mathbb{R}^3$ JSOU PŘESNĚ:
    - $\{0\}$
    - PŘÍMKY PROCHÁZEJÍCÍ POČÁTKEM } VLASTNÍ
    - ROVINY PROCHÁZEJÍCÍ POČÁTKEM }
    - $\mathbb{R}^3$

- JAK VYPADAJÍ PODPROSTORY T^n, T TĚLESO A $n \in \mathbb{N}$?

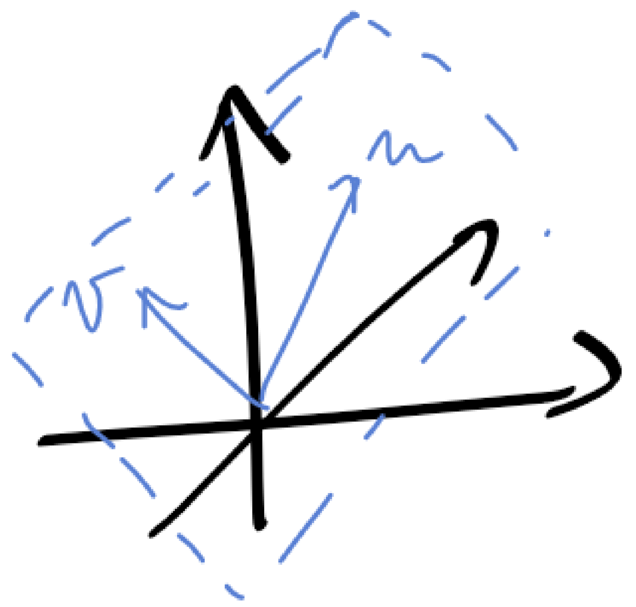
- T5.13: T TĚLESO, A MATICE TYPU $m \times n$, $m, n \in \mathbb{N}$.
  PAK $\ker(A) = \{x \in T^n : A\cdot x = 0\} \leq T^n$.

- Dk: - VÍME: $0 \in \ker(A)$, JÁDRO JE NEPRÁZDNÉ
  - POKUD $x, y \in \ker(A)$, PAK $A\cdot(x+y) = A\cdot x + A\cdot y = 0 + 0 = 0$.
    ČILI $x+y \in \ker(A)$
  - PODOBNĚ: $x \in \ker(A)$, $t \in T \Rightarrow A\cdot(tx) = t\cdot(Ax) = t\cdot 0 = 0 \Rightarrow t.x \in \ker(A)$

! $\{x \in T^n : A\cdot x = b\}$ PRO $b \neq 0$ NENÍ PODPROSTOR T^n!
$\not\ni$
0

- <u>OTÁZKA</u>: BUĎ V VEKTOROVÝ PROSTOR NAD T.
BUĎ $X \subseteq V$ PODMNOŽINA.
JAK VYPADÁ NEJMENŠÍ VEKTOROVÝ PODPROSTOR V OBSAHUJÍCÍ X?

- <u>NAPŘ</u>: $V = \mathbb{R}, \; T = \mathbb{R}$



$X = \{u, v\}$

$$U = \{ \underbrace{s u + t \cdot v}_{\text{LINEÁRNÍ KOMBINACE } u,\, v \text{ (DEF 2.21)}} \; : \; s, t \in \mathbb{R} \} \subseteq V$$

- <u>DEF</u>: BUĎ V V.P. NAD T, VEZMĚME $v_1, \dots, v_k \in V$, $t_1, \dots, t_k \in T$. PAK VEKTOR
(5.18)

$$t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2 + \dots + t_k \cdot v_k$$

SE NAZÝVÁ **LINEÁRNÍ KOMBINACE** VEKTORŮ $v_1, \dots, v_k$ (S KOEFICIENTY $t_1, \dots, t_k$).

- <u>DEF</u>: BUĎ V V.P. NAD T, VEZMĚME $X \subseteq V$ PODMNOŽINU. PAK
(5.19)

$$\mathrm{LO}\, X = \{ t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2 + \dots + t_k \cdot v_k : k \in \mathbb{N}_0, \; v_1, \dots, v_k \in X, \; t_1, \dots, t_k \in T \} \subseteq V$$

SE NAZÝVÁ **LINEÁRNÍ OBAL** X (V PROSTORU V).

- DEF (5.19): BUĎ V V.P. NAD T, VEZMĚME $X \subseteq V$ PODMNOŽINU. PAK

$$\mathrm{LO}\, X = \{ t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2 + \dots + t_k \cdot v_k : k \in \mathbb{N}_0,\ v_1, \dots, v_k \in X,\ t_1, \dots, t_k \in T \} \subseteq V$$

SE NAZÝVÁ LINEÁRNÍ OBAL X (V PROSTORU V).

- T 5.23: $\mathrm{LO}\, X \leq V$ (JE PODPROSTOREM V).

- POZN: CO ZNAMENÁ $t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$ PRO $k = 0$? PAK $t_1 \cdot v_1 + \dots + t_k v_k := 0$.
ČILI $\mathrm{LO}\, X$ VŽDY OBSAHUJE $0 \in V$.

- DEF (5.26): BUĎ V VEKTOROVÝ PROSTOR NAD T A $X \subseteq V$.
PAK ŘEKNEME, ŽE X GENERUJE V (X JE MNOŽINA GENERÁTORŮ V),
POKUD $V = \mathrm{LO}\, X$.

- PŘ: • $\{ \underbrace{\binom{1}{0}}_{e_1}, \underbrace{\binom{0}{1}}_{e_2} \}$ GENERUJE $\mathbb{R}^2$ (PRO $T = \mathbb{R}$). TOTIŽ $\binom{x_1}{x_2} = x_1 \cdot e_1 + x_2 e_2$.

• $\{ \binom{1}{0}, \binom{1}{1} \}$ NEBO $\{ \binom{1}{0}, \binom{0}{1}, \binom{1}{1} \}$ TAKY GENERUJÍ $\mathbb{R}^2$.

- PŘ: • BUĎ $T = \mathbb{R}$ A $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{ (a_1, a_2, a_3, \dots) : a_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in \mathbb{N} \}$
$X = \{ (1,0,0,\dots), (0,1,0,\dots), (0,0,1,\dots), \dots \}$ NEGENERUJE V !!!

- PŘ: $n \in \mathbb{N}$, $V = \mathbb{R}^n$, $LO\{e_1, \dots, e_n\} = \mathbb{R}^n$
$T = \mathbb{R}$,

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n e_n$$

- ZPĚT K $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{ (a_1, a_2, \dots) : a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R} \}$

$$e_i = (0, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, 0, \dots)$$

- PAK $(1, 1, 1, \dots) \notin LO\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$

$e_1 + e_2 + e_3 + \dots$ $\leftarrow$ NEMÁME VE V.P. DEFINOVÁNO!

- MOCNINY V $\mathbb{Z}_5$:

$$4^3 = (4\cdot 4)\cdot 4 = 1\cdot 4$$

$$4^3 \cdot 4^3 = 4^6$$

$\mathbb{N} \ni n$	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{Z}_5 \ni 4^n$	4	1	4	1	4	1

PROTO, ŽE
$4 = -1$ v $\mathbb{Z}_5$

$$4\cdot 4 \bmod 5 = 16 \bmod 5 = 1$$

---

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
3^n	3	4	2	1	3	4	2	1	...

$3^2 = 9, \quad 9 \bmod 5 = 4$

$3^3 = 3\cdot 3^2 = 3\cdot 4 = 12 = 2$

$3^4 = 3\cdot 3^3 = 3\cdot 2 = 6 = 1$ v $\mathbb{Z}_5$

$3^5 = 3\cdot 3^4 = 3\cdot 1 = 3$