

INVERZNÍ MATICE

MOTIVACE:

1) (NAIVNÍ) SLR PÍŠEME VE TVARU $A \cdot x = b$ ($\Leftrightarrow f_A(x) = b$)
CO KDYBYCHOM „VYDĚLILI A “ A DOSTALI: $x = A^{-1} \cdot b$?

2) POHLED PŘES ZOBRAZENÍ:

- A TYPU $m \times n$ DÁVÁ ZOBRAZENÍ $f_A: T^m \rightarrow T^n$
- KDY JE f_A NA, PROSTÉ, BIEKCE ?
- VĚPOHLENNĚ NA TVRZ. 1.37 A 1.38 SKRIPT: $f: X \rightarrow Y$ ZOBRAZENÍ
 - f JE NA $\Leftrightarrow f$ MÁ PRAVOU INVERZI ($\exists g: Y \rightarrow X: f \circ g = id_Y$)
 - f JE PROSTÉ $\Leftrightarrow f$ MÁ LEVOU INVERZI ($\exists h: Y \rightarrow X: h \circ f = id_X$)
- OTÁZKA: $f = f_A: T^m \rightarrow T^n$, MOHOU BÝT g, h TAKÉ MATICOVÁ ?
- POZN: f MÁ LEVOU INVERZI h A PRAVOU INVERZI g , PAK $h = g =: f^{-1}$.
($g = id_X \circ g = (h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g) = h \circ id_Y = h$)
 $\Rightarrow f^{-1}$ URČENO JEDNOZNAČNĚ

- PŘÍPADOVÁ NUTNOST (4.55): $f_A \circ f_B = f_{AB}$, $f_{I_m} = \text{id}_{T^m}: T^m \rightarrow T^m$

- DEF: BUĎ A MATICE TYPU $m \times m$ NAD T . PAK:

• A JE ZPRAVA INVERTOVATELNÁ, POKUD $\exists X: A \cdot X = I_m$.

$$\left(\text{NUTNĚ } X \text{ TYPU } m \times m \right), \quad \begin{matrix} m \\ \boxed{A} \\ m \end{matrix} \cdot \begin{matrix} m \\ \boxed{X} \\ m \end{matrix} = \begin{matrix} m \\ \boxed{\begin{smallmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{smallmatrix}} \\ m \end{matrix}$$

• A JE ZLĚVA INVERTOVATELNÁ, POKUD $\exists Y: Y \cdot A = I_m$

$$\left(\text{NUTNĚ } Y \text{ TYPU } m \times m \right), \quad \begin{matrix} \boxed{Y} \\ m \end{matrix} \cdot \begin{matrix} m \\ \boxed{A} \\ m \end{matrix} = \begin{matrix} m \\ \boxed{\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}} \\ m \end{matrix}$$

• A JE INVERTOVATELNÁ, POKUD JE ČTVERCOVÁ A EXISTUJE
 X TAKOVÁ, ŽE $A \cdot X = I_m = X \cdot A$ (A ŘÁDU m , T.J. TYPU $m \times m$)
 X —||—

- POZN: V POSLEDNÍM PŘÍPADĚ ZNAČÍME X SYMBOLEM A^{-1} .
 A^{-1} JE JEDNOZNAČNÁ: KDYBY $AX = I_m = XA$ A $AY = I_m = YA$, PAK
 $Y = I_m \cdot Y = X \cdot A \cdot Y = X \cdot I_m = X$

- PR: ELEMENTÁRNÍ MATICE JSOU INVERTOVATELNÉ

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & t & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

ŘÁDU n

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -t & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & t & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$(t \neq 0)$

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & t^{-1} & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$E^{-1} = E$$

- POZOROVÁNÍ: A, B INVERTOVATELNÉ MATICE ŘÁDU n NAD T , PAK $A \cdot B$ JE INVERTOVATELNÝ.
 $(A \cdot B)(B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$, $(B^{-1} A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = I_n$

I. INVERZE ZPRAVA

- PR: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}$, $T = \mathbb{R}$, EXISTUJE INVERZE X ZPRAVA?

$$(A \cdot x_1 | A \cdot x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (e_1 | e_2) \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$$

↑
TYP 2×3

↑
TYP 3×2

~> ŘEŠÍME SLR $Ax_1 = e_1$, $Ax_2 = e_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 8 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & | & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim x_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim X = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -11 & 0 \\ 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 & -11 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

← VŠECHNY
INVERZE
ZPRAVA K A

- POZN! $f_A \notin NA$, NENÍ PROSTÉ: $A \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\cap t \in \mathbb{R}$

- T (4.67): BUĎ A MATICE TYPU $m \times m$ NAD T. PNJE:

(1) A JE ZPRAVA INVERTOVATELNÁ.

(2) $f_A : T^m \rightarrow T^m$ JE NA ($\Leftrightarrow Ax = b$ MÁ ŘEŠENÍ $\forall b \in T^m$)

PRAKTICKÉ
KRITÉRIUM

(3) MATICE C, KTEROU DOSTANEME Z A GAUSSOVOU ELIMINACÍ,
MÁ VŠECHNY ŘÁDKY NENULOVÉ.

ELEGANTNÍ FORMU-
LACE

(4) $\text{rang}(A) = m$ (= # ŘÁDKŮ)

- D_k: (1) $\Rightarrow$ (2): . PŘEDPOKLAD : $\exists X : AX = I_m$ (X TYPU $m \times m$)

. VZĚNĚNE $b \in T^m$, PAK $A(X \cdot b) = (AX)b = I_m \cdot b = b$

. TJ. $X \cdot b$ JE ŘEŠENÍM $A \cdot x = b$

(2) $\Rightarrow$ (3): . PŘEDPOKLAD : f_A JE NA ($Ax = b$ MÁ ŘEŠENÍ $\forall b$)

. CO KDYBY C MĚLA i -TÝ ŘÁDEK NULOVÝ?

. VZTAH A A C : $A \sim E_1 A \sim E_2 E_1 A \sim \dots \sim E_2 \dots E_1 \cdot A = C$

($E_1, \dots, E_2$ NĚJAKÉ ELEM. MATICE)

. TJ. $C = E_2 \dots E_1 \cdot A$ A $A = E_1^{-1} \dots E_2^{-1} \cdot C$

. PAK BY $C \cdot x = d_i$ NE MĚLA ŘEŠENÍ

$$C \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$\leadsto A \cdot x = E_1^{-1} \dots E_2^{-1} \cdot C \cdot x = E_1^{-1} \dots E_2^{-1} \cdot d_i$ NE MÁ ŘEŠENÍ, STOP!

- $T(4.67)$: BUĎ A MATICE TYPU $n \times m$ JE:

(1) A JE ZPRAVA INVERTOVATELNÁ.

(2) $f_A: T^m \rightarrow T^m$ JE NA ($\Leftrightarrow Ax=b$ MÁ ŘEŠENÍ $\forall b \in T^m$)

PRAKTICKÉ
KRITÉRIUM

(3) MATICE C, KTEROU DOSTANEME Z A GAUSSOVOU ELIMINACÍ,
MÁ VŠECHNY ŘÁDKY NENULOVE.

ELEGANTNÍ FORMU-
LACE

(4) $\text{rank}(A) = m$ (= # ŘÁDKŮ)

- DL (POKR.): (3) $\Rightarrow$ (4): ! NÁVOD, JA PRAVĚ INVERZE POČÍTAT!

- PŘEDPOKLÁDÁME (3)

- HLEDÁME X : $A \cdot X = I_m$, ČILI $A \cdot \left(x_1 \mid \dots \mid x_m \right) = \left(e_1 \mid \dots \mid e_m \right) (= I_m)$

- ČILI ŘEŠÍME SLR $A \cdot x_j = e_j$, $j = 1, \dots, m$

- $(A \mid e_j) \sim \dots \sim (C \mid d_j) \Rightarrow C \cdot x_j = d_j$ MÁ ŘEŠENÍ!
 $\uparrow$ MÁ VŠECHNY ŘÁDKY $\neq 0$ $(C \mid d_j) = \begin{bmatrix} c_{1j} & \dots & c_{mj} & d_j \end{bmatrix}$

(3) $\Leftrightarrow$ (4): PŘÍMO DEFINICE HODNOSTI.

- DŮSLEDEK: POKUD A JE INVERTOVATELNÁ ZPRAVA, PAK $m = \text{rank}(A) \leq n$
 $\uparrow$
2.18



II. ČTVERCOVÉ MATICE POPRVÉ

• CO SE DĚJE, POKUD JE A ČTVERCOVÁ A INVERTOVATELNÁ ZPRAVA?

• $n \times n$ $A \sim \dots \sim n \times n$ C HORNÍ TROJÚHELNÍKOVÁ,
NA DIAGONÁLE NEJSOU NULY
(MUSÍ TAM BYT PIVOTY)

• NŮŽEME UPRAVOVAT DÁL:

$$C \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & \cdot \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 1 & \cdot & \cdot \\ & & 1 & \cdot \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

PR: $T = \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c} -3 \\ \downarrow \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \begin{array}{c} C \\ \uparrow \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \begin{array}{c} A^{-1} \\ \uparrow \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

• $(A \mid I_n) \sim (E_1 \cdot A \mid E_1) \sim \dots \sim (I_n \mid E) = (E_2 \dots E_1 \cdot A \mid E_2 \dots E_1)$
 • OZNAČME $E := E_2 \dots E_1$, PAK $E \cdot A = I_n$, $I_n = A \cdot X$ PRO NĚJAKÉ X
 $\Rightarrow X = E$ TJ. A MÁ INVERZI $A^{-1} = E (=X)$

$$X = I_n \cdot X = E \cdot A \cdot X = E \cdot I_n = E$$

PR, $T = \mathbb{Z}_3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = C$

$-2 \cdot -1 \uparrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$
 $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$
