

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC PODRUHÉ

(ODDÍL 4.5.1, SKRIPTA)

- ZVOLÍME TĚLESO T

- SOUSTAVU m LINEÁRNÍCH ROVNIC V n NEZNÁMÝCH MŮŽEME ZAPSAT JAKO

$$A \cdot x = b, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\nearrow$
MATICE TYPU
 $m \times n$

$\in T^m$

- OTÁZKA: JAK VYPADÁ MNOŽINA ŘEŠENÍ

$$\{v \in T^n : A \cdot v = b\} = f_A^{-1}(b)$$

(ÚPLNÝ VZOR $b \in T^m$)

$$(f_A = A \cdot - : T^n \rightarrow T^m)$$
$$f_A(v) = A \cdot v$$

- MNOŽINA ŘEŠENÍ JE NEPRÁZDNÁ $\Leftrightarrow b$ JE LINEÁRNÍ KOMBINACÍ SLOUPCŮ A

TOTIŽ: $A = \left(a_1 \mid a_2 \mid \dots \mid a_n \right), \quad A \cdot x = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \dots + x_n \cdot a_n$

- KDYŽ ŘEŠÍME $A \cdot x = b$, PŘEVEDEME SOUSTAVU DO ODSTUPŇOVANÉHO TVARU $C \cdot x = d$

$$\begin{matrix} m \\ \boxed{A} \\ n \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \boxed{x} \\ n \end{matrix} = \begin{matrix} \boxed{b} \\ m \end{matrix}$$

GAUSSOVA
ELIMINACE
→
POSLoupNOST
ELEn. ŘÁDKOVÝCH
ÚPRAV

$$\boxed{C} \cdot \begin{matrix} \boxed{x} \end{matrix} = \begin{matrix} \boxed{d} \end{matrix}$$

$$(C|d) = \left(\begin{array}{cccc|c} \bullet & & & & \\ 0 & \bullet & & & \\ & & \bullet & & \\ & & & \bullet & \\ & & & & \bullet \end{array} \right)$$

• = PIVOTY

- SOUSTAVA JE ŘEŠITELNÁ $\Leftrightarrow$ V POSLEDNÍM SLOUPCI $(C|d)$ NEMÍ PIVOT

- V JAKÉM VZTAHU JSOU RŮZNÁ ŘEŠENÍ SOUSTAVY $Ax = b$?
- PĚJME 2 ŘEŠENÍ $u, v \in T^m$, TJ. $A \cdot u = b$ A $A \cdot v = b$
- PAK

$$A \cdot (u - v) = A \cdot u - A \cdot v = b - b = \mathbf{0}$$

NULOVÝ
VEKTOR $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \}_m$

- JINÝMI SLOVY, VEKTOR $u - v \in T^m$ JE ŘEŠENÍM SLR $A \cdot x = 0$

↑
HOMOGENNÍ SLR (PŘÍSLUŠNÁ)
 $A \cdot x = 0$

- DEF: JE-LI A MATICE TYPU $m \times n$, PAK

$$\{ v \in T^m : A \cdot v = 0 \} (= f_A^{-1}(0) = \{ v : v \text{ ŘEŠÍ } A \cdot x = 0 \})$$

SE NAZÝVÁ JÁDREM (ANGL. KERNEL) NEBO TÉŽ NULOVÝM PROSTOREM MATICE A. ZNAČÍME $\ker A$.

- JAK TĚDY $\ker A$ SOUVISÍ PŘESNĚ S ŘEŠENÍM $A \cdot x = b$?

- V 4.96: MÁME-LI SLR $A \cdot x = b$ A ZNÁME-LI JEDNO ŘEŠENÍ $v \in T^m$,
PAK MNOŽINA VŠECH ŘEŠENÍ JE TVARU

$$\{v + w : w \in \ker A\} =: v + \ker A$$

- Důk: - OZNAČME $S = \{u \in T^m : A \cdot u = b\}$

- CHCĚME UKÁZAT $S = \{v + w : w \in \ker A\}$

• $S \subseteq v + \ker A$:

• Vezměme libovolné $u \in S$, tj. $A \cdot u = b$

• Pak $A \cdot (u - v) = 0$ (minulá tabule), $w := u - v \in \ker A$

• Tj. $u = v + w \in v + \ker A$

• $v + \ker A \subseteq S$:

• Vezměme libovolné $u \in v + \ker A$, tj. $u = v + w$, $w \in \ker A$

• Pak $A \cdot u = A \cdot (v + w) = A \cdot v + A \cdot w = b + 0 = b$

• Tj. $u \in S$

- POSTUP ŘEŠENÍ SLR $Ax=b$

- 1) ROZHODNĚME, MÁ-LI ŘEŠENÍ
- 2) NAJDĚME PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ $v \in T^n$
- 3) NAJDĚME $\ker A = \{w \mid A \cdot w = 0\}$

- PŘ: $T = \mathbb{R}$ | SLR DÁNA $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array} \right)$ | BÁZOVÉ: x_1, x_3
VOLNÉ: x_2, x_4, x_5

• PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ $v^T = (-1 \quad \underline{0} \quad -3 \quad \underline{0} \quad \underline{0})$

• JÁDRO

$$S = \left\{ v + t_2 \cdot w_2 + t_4 \cdot w_4 + t_5 \cdot w_5 \mid t_2, t_4, t_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} w_2^T = (-2 \quad \underline{1} \quad 0 \quad \underline{0} \quad \underline{0}) \\ w_4^T = (-3 \quad \underline{0} \quad 0 \quad \underline{1} \quad \underline{0}) \\ w_5^T = (-2 \quad \underline{0} \quad -2 \quad \underline{0} \quad \underline{1}) \end{array} \right\}$$

$$t_2, t_4, t_5 \in \mathbb{R},$$

PAK

$$t_2 \cdot w_2^T + t_4 \cdot w_4^T + t_5 \cdot w_5^T =$$
$$(\quad \underline{t_2} \quad \quad \underline{t_4} \quad \underline{t_5})$$

- POZOROVÁNÍ:

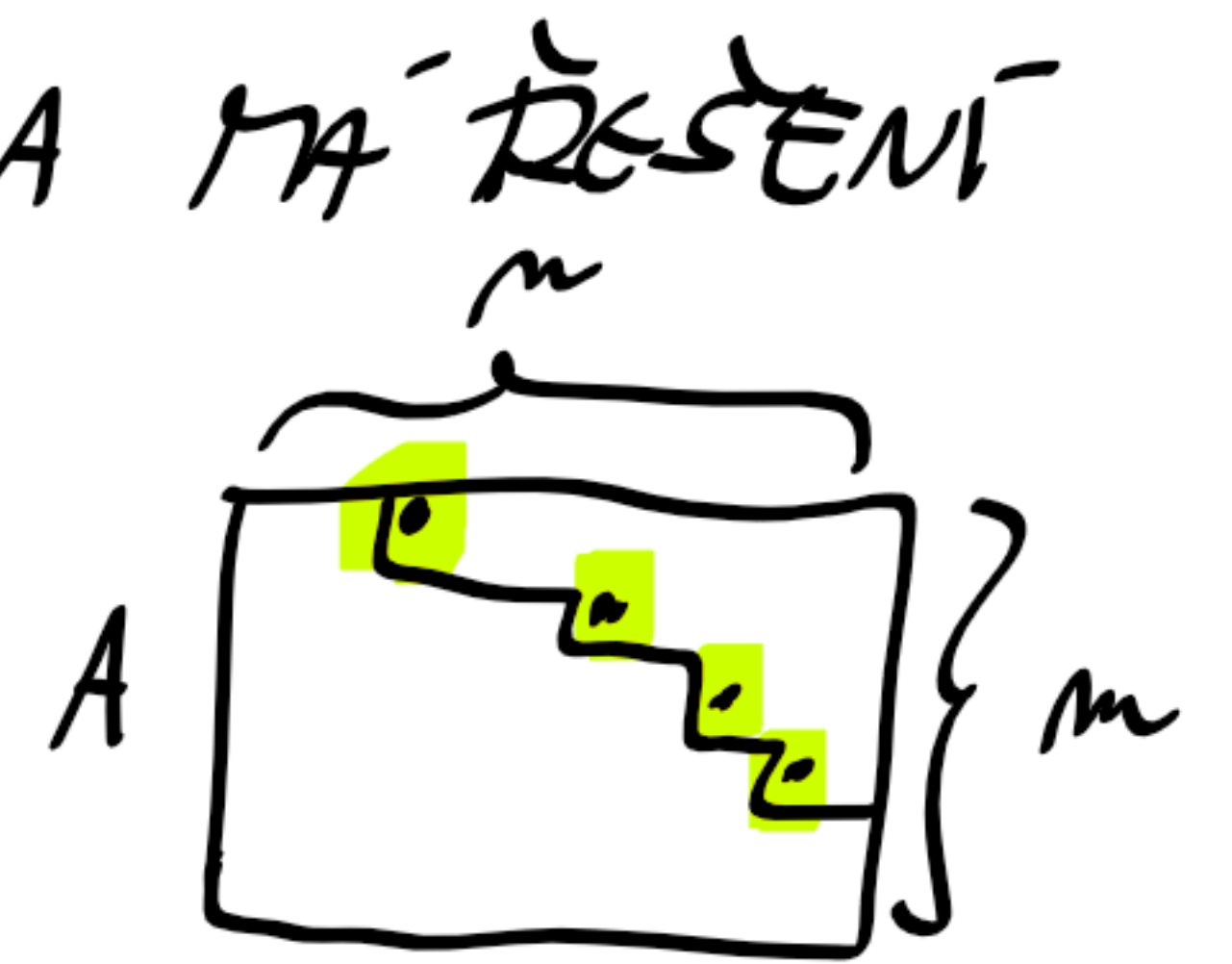
$$1) \forall w \in \ker A \quad \forall t \in T : t \cdot w \in \ker A$$

$$2) \forall w, r \in \ker A : w + r \in \ker A$$

$$(A(w+r) = Aw + Ar = 0 + 0 = 0)$$

- HLEDÁNÍ PARTIKULÁRNÍHO ŘEŠENÍ A JÁDRA

- PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE SLR $(A|b)$ JE UŽ V Odstupňovaném tvaru a má řešení (SEM SE DOSTAŤME GAUSSOVOU ELIMINACÍ)
 - OZNAČÍME $P \subseteq \{1, \dots, n\}$ INDEXY VOLNÝCH PROMĚNNÝCH (V POSLEDNÍM PŘÍKLADĚ $P = \{2, 4, 5\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$)
 - PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ VYPOČÍTÁME TAK, ŽE ZA VOLNÉ PROMĚNNÉ DOSADÍME NULY A BÁZOVÉ ODZADU DOPOČÍTÁME ZE SOUSTAVY $Ax = b$
 - SPOČÍTÁME "REPREZENTATIVNÍ" VEKTORY $w_p, p \in P$ Z JÁDRA $\ker A = \{w : Aw = 0\}$
 - ▶ V w_p ZVOLÍME p -TOU PROMĚNNOU ROVNOU 1 A OSTATNÍ VOLNÉ PROMĚNNÉ ROVNÉ 0
 - ▶ BÁZOVÉ PROMĚNNÉ DOPOČÍTÁME ODZADU Z ROVNIC **HOMOGENNÍ SOUSTAVY**
 - PAK $\ker A = \left\{ \sum_{p \in P} t_p \cdot w_p : t_p \in T \right\}$
 - PODLE VĚTY (4.96) JE MNOŽINA ŘEŠENÍ SLR ROVNA $N + \ker A =$
 $= \left\{ N + \sum_{p \in P} t_p w_p : t_p \in T \right\}$, NAVÍC: RŮZNÉ VOLBY $(t_p)_{p \in P}$ DÁVÁNÍ RŮZNÁ ŘEŠENÍ
- POZN: JE-LI $P = \emptyset$, PAK $\ker A = \{0\}$.



ROZNY SLETE SI PROZ!

- ELEMENTÁRNÍ ŘÁDKOVÉ ÚPRAVY (ERÚ) A ELEMENTÁRNÍ MATICE:

- PĚJME MATICI $m \times m$ NAD T ,

$$A = \left(\begin{array}{c} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \vdots \\ \tilde{a}_m \end{array} \right) \Bigg\}_m$$

- VZME $i \neq j$ MEZI 1 A m , $t \in T$ A MATICI

$$\left(\begin{array}{c} \vdots \\ \tilde{a}_i \\ \vdots \\ \tilde{a}_j + t \cdot \tilde{a}_i \\ \vdots \end{array} \right)$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{j} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ t \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right) \cdot A = E \cdot A$$

$\uparrow$
TYPU $m \times m$

$\nearrow$
PŘÍČTENÍ $t \cdot$ i -TÝ ŘÁDEK K j -TĚMU

- E JE PŘÍKLAD ELEM. MATICE, PODOBNĚ PRO DALŠÍ TYPY ERÚ (ODD. 4.2.3)

$\leadsto E$ VÝŠE SE DOSTANE Z I_m PŘÍČTENÍM t -NÁSOBKU i -TÉHO ŘÁDKU K j -TĚMU