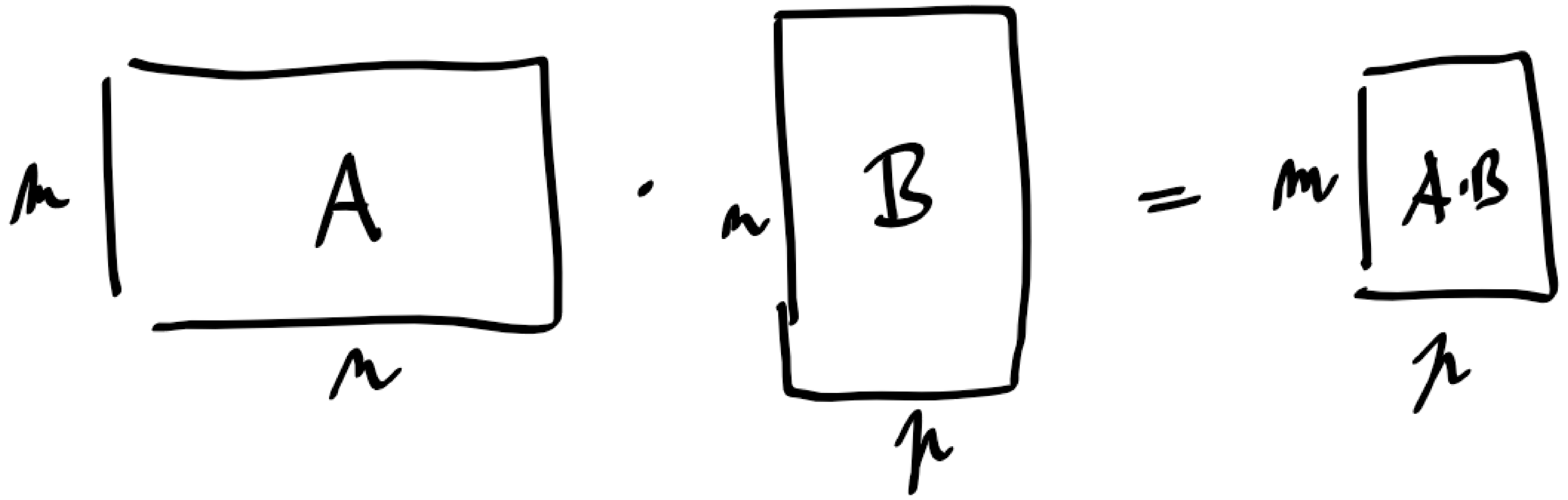
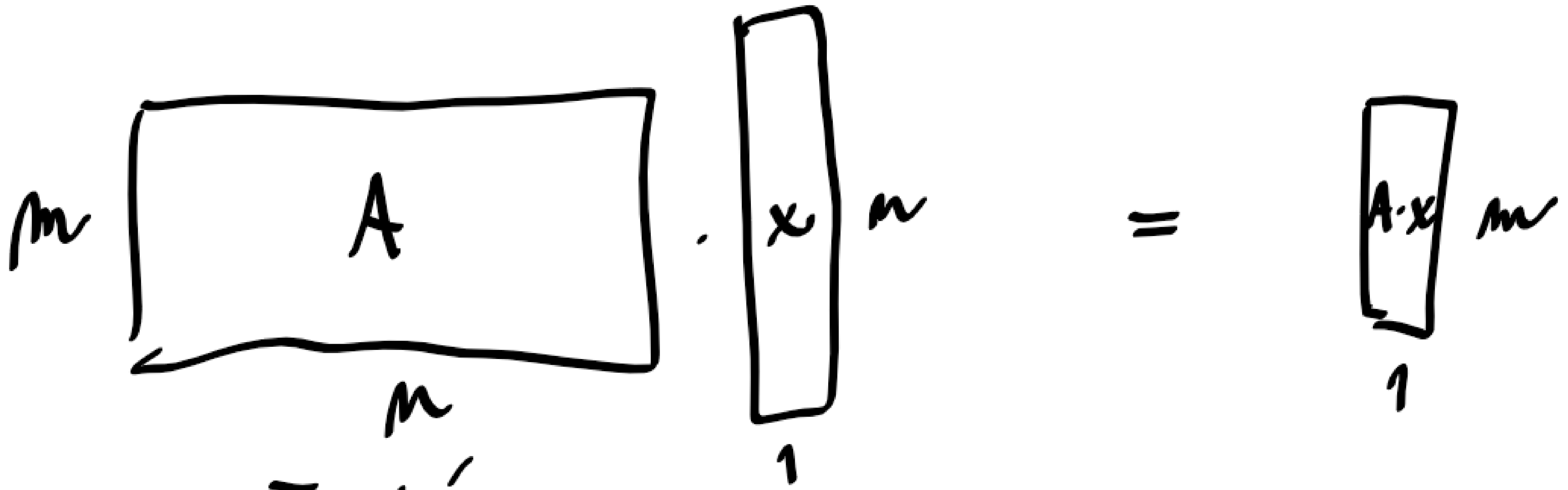
MATICE JAKO ZOBRAZENÍ

- *POSLEDNĚ*: NÁSOBENÍ MATIC:



$$A = (a_{ij}) \qquad B = (b_{jk}) \qquad A \cdot B = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \right)$$

- *SPEC. PŘÍPAD*: $p = 1$, TJ. MÍSTO B MÁME SLOUPCOVÝ VEKTOR $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in T^n$
- TEDY:

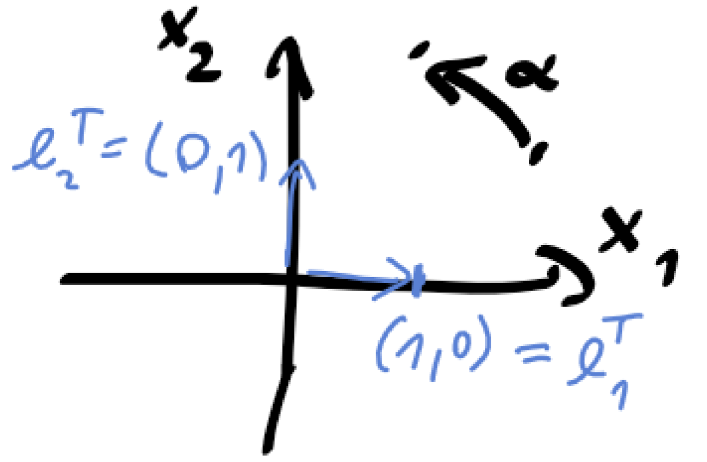


$$, \quad A \cdot x = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} \cdot x_j \end{pmatrix}$$

- *DEF*: BUĎ A NĚJAKÁ MATICE TYPU $m \times n$ NAD T. ZOBRAZENÍM URČENÝM MATICÍ A ROZUMÍME

$$f_A : T^n \longrightarrow T^m$$
$$x \longmapsto A \cdot x$$

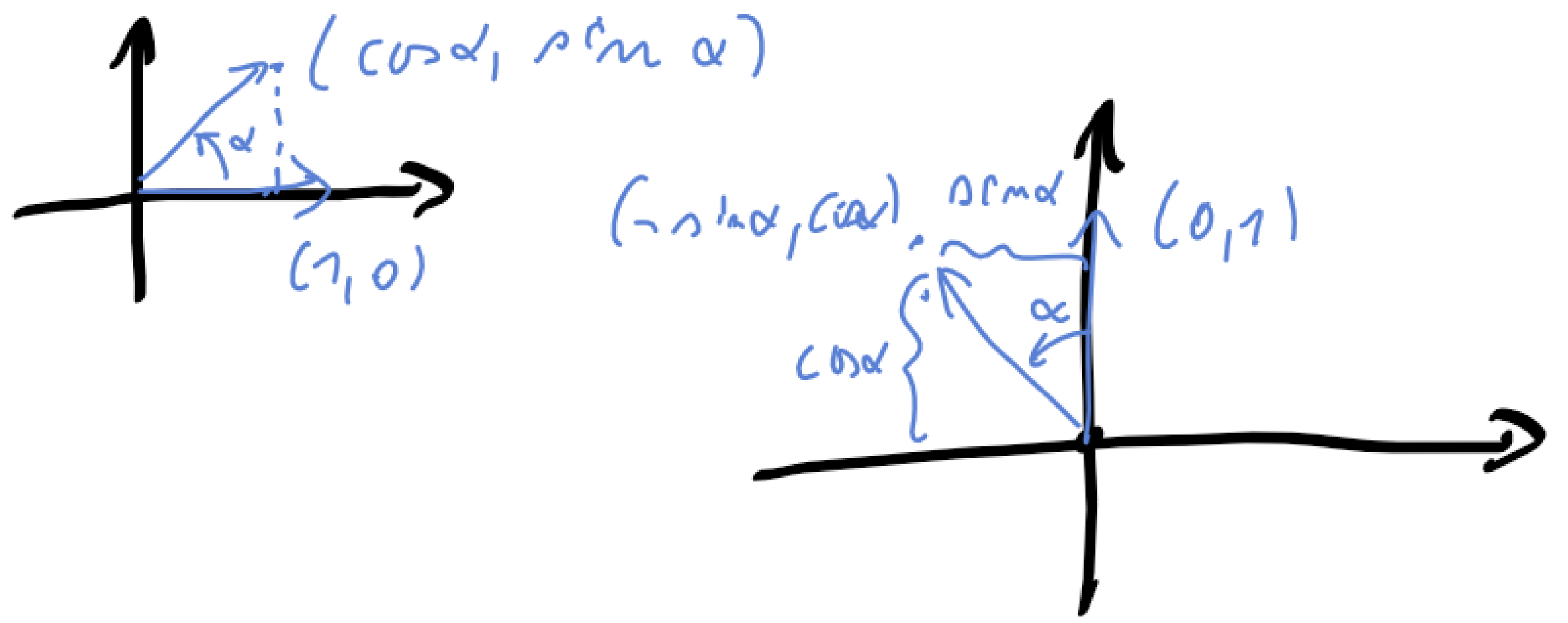
- **PŘ**: JAK POPSAT ZOBRAZENÍ ROTACE $r_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix},$$



$\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$

- JAK SE r_α CHOVÁ NA SPECIÁLNÍCH VEKTORECH?
- KONKRÉTNĚ O VEKTORY TZV. KANONICKÉ BÁZE $\mathbb{R}^2$: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

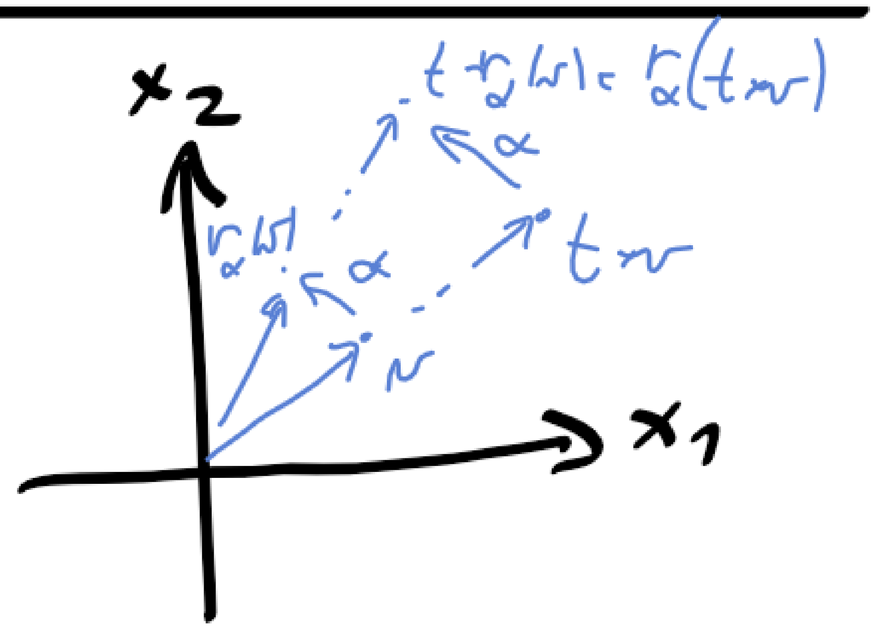
$$r_\alpha(e_1) = r_\alpha\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$
$$r_\alpha(e_2) = r_\alpha\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$



- **POZOROVÁNÍ**: ZOBRAZENÍ r_α JE TZV. LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ:

(1) $\forall v \in \mathbb{R}^2 \ \forall t \in \mathbb{R} : \quad r_\alpha(t \cdot v) = t \cdot r_\alpha(v)$

(2) $\forall u, v \in \mathbb{R}^2 : \quad r_\alpha(u+v) = r_\alpha(u) + r_\alpha(v)$

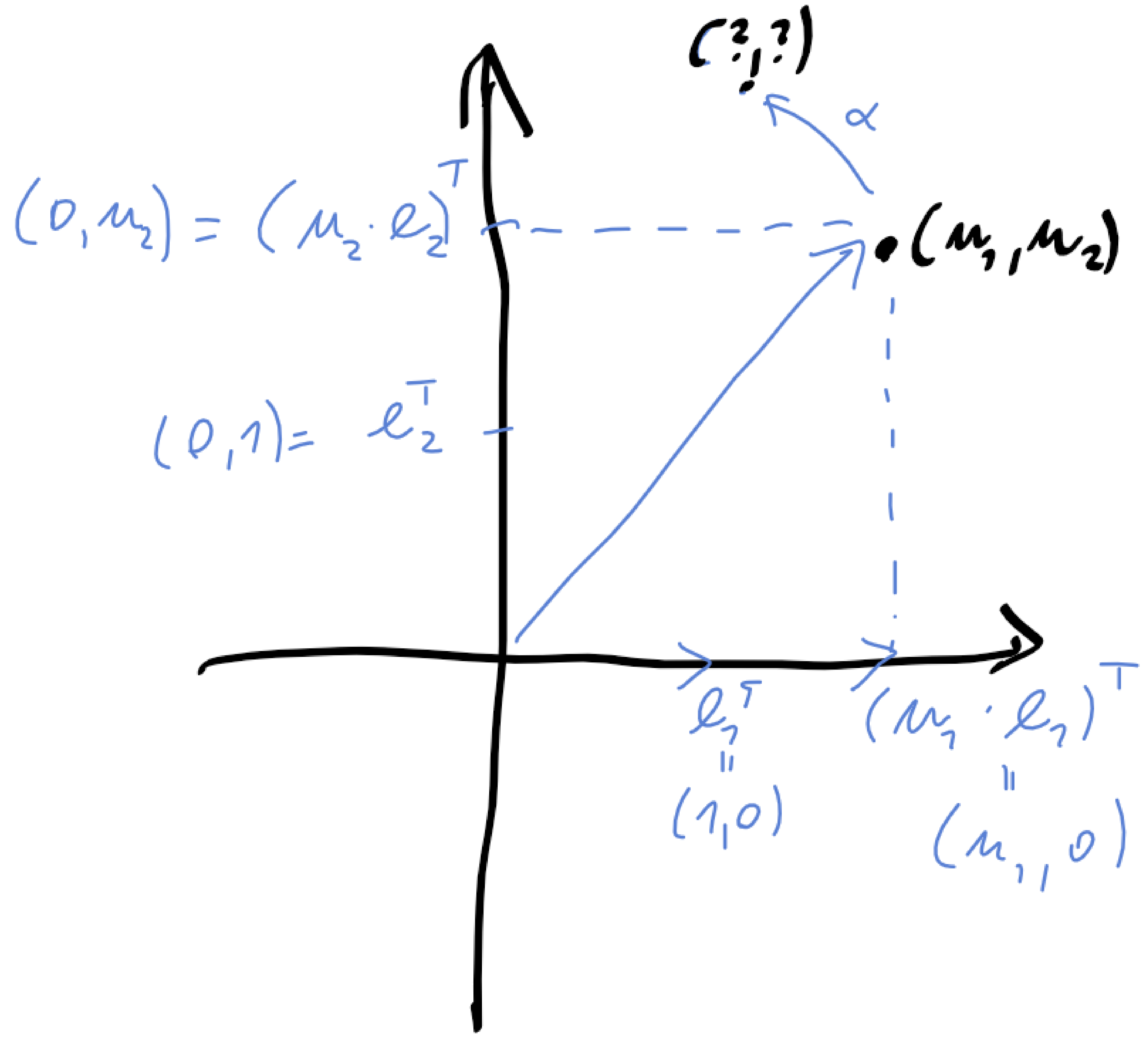


- JE-LI $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ OBECNÝ VEKTOR, PAK

$$u = u_1 \cdot e_1 + u_2 \cdot e_2 = u_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

– JE-LI $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ OBECNÝ VEKTOR, PAK

$$u = u_1 \cdot e_1 + u_2 \cdot e_2 = u_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$r_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow \quad r_\alpha\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) = r_\alpha\left(u_1 \cdot e_1 + u_2 \cdot e_2\right) =$$

$$\overset{2)}{=} r_\alpha(u_1 \cdot e_1) + r_\alpha(u_2 \cdot e_2) =$$

$$\overset{1)}{=} u_1 \cdot r_\alpha(e_1) + u_2 \cdot r_\alpha(e_2)$$

$$= u_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + u_2 \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 \cdot \cos\alpha - u_2 \cdot \sin\alpha \\ u_1 \cdot \sin\alpha + u_2 \cdot \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

T.J. $r_\alpha = f_A$, KDE $A = \begin{pmatrix} \boxed{\cos\alpha} & \boxed{-\sin\alpha} \\ \boxed{\sin\alpha} & \boxed{\cos\alpha} \end{pmatrix}$

MATICE ROTACE

– ZOBRAZENÍ URČENÁ MATICEMI OBECNĚ

- T TĚLESO, A MATICE TYPU $m \times n$ URČUJE ZOBRAZENÍ

$$f_A : T^n \longrightarrow T^m$$
$$x \longmapsto A \cdot x$$

– ZÁKLADNÍ VLASTNOST:

T = TVRZENÍ

– T4,54: BUĎ A MATICE $m \times n$ NAD T, $f_A : T^n \to T^m$ JAKO VÝŠE, $x, y \in T^n$, $s \in T$. PAK PLATÍ

1) $f_A(s \cdot x) = s \cdot f_A(x)$
2) $f_A(x+y) = f_A(x) + f_A(y)$

– DK:

1) $f_A(s \cdot x) \overset{DEF}{=} A \cdot (s x) = s \cdot (A \cdot x) \overset{DEF}{=} s \cdot f_A(x)$

MATICE TYPU $n \times 1$

2) $f_A(x+y) \overset{DEF}{=} A \cdot (x+y) = A \cdot x + A \cdot y \overset{DEF}{=} f_A(x) + f_A(y)$

- **DEF**: PRVKY KANONICKÉ BÁZE T^n JSOU VEKTORY

$$T^n \ni e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \quad , \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

KANONICKÁ BÁZE T^n: $e_1, e_2, \dots, e_n$

- PODLE POSLEDNÍHO TVRZENÍ: (A TYPU $m \times n$, $f_A : T^n \to T^m$)

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = f_A(x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \dots + x_n \cdot e_n) \overset{1),2)}{=}$$

$$= x_1 \cdot f_A(e_1) + x_2 \cdot f_A(e_2) + \dots + x_n \cdot f_A(e_n)$$

$$= m\left\{\underbrace{\left(f_A(e_1) \middle| f_A(e_2) \middle| \dots \dots \middle| f_A(e_n)\right)}_{n}\right. \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- TJ: j-TÝ SLOUPEC MATICE A MUSÍ BÝT $f_A(e_j) = A \cdot e_j = \left(a_1 \middle| \dots \middle| a_j \middle| \dots \middle| a_n\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j = a_j$
- **TEDY**: PRO A, B MATICE $m \times n$ NAD T PLATÍ: $(f_A = f_B) \iff (A = B)$
- **DALŠÍ POZOROVÁNÍ**: SPLŇUJE-LI NĚJAKÉ ZOBRAZENÍ $f : T^n \to T^m$ VLASTNOSTI 1) $f(s \cdot x) = s \cdot f(x)$ $\forall s \in T$, $\forall x \in T^n$ A 2) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $\forall x, y \in T^n$, PAK JDE O ZOBRAZENÍ DANÉ MATICÍ $\left(f(e_1) \middle| f(e_2) \middle| \dots \middle| f(e_n)\right)$

– SKLÁDÁNÍ ZOBRAZENÍ URČENÝCH MATICÍ

$$T^m \xleftarrow{\;f_A \circ f_B\;} T^p$$

$$T^m \xleftarrow{\;f_A\;} T^n \quad , \quad T^n \xleftarrow{\;f_B\;} T^p$$

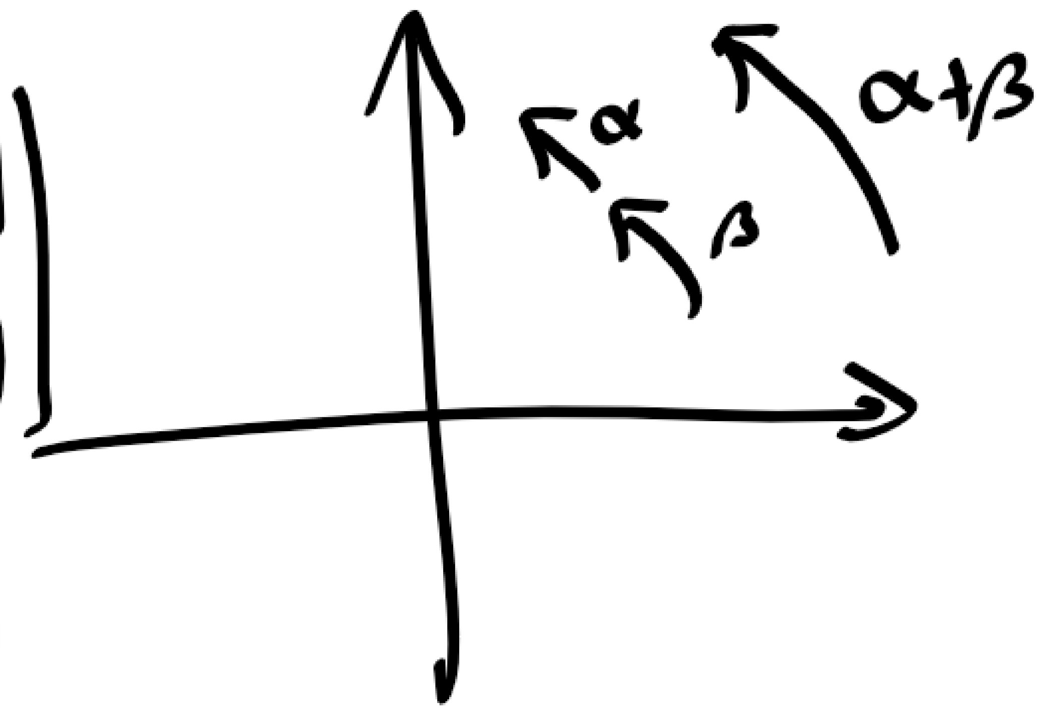
– T 4.55: AŤ T JE TĚLESO, A MATICE $m \times n$, B MATICE $n \times p$ NAD T, $f_A : T^n \to T^m$, $f_B : T^p \to T^n$ (TJ. MÁME $f_A \circ f_B : T^p \to T^m$). PAK PLATÍ

$$f_A \circ f_B = f_{A \cdot B} .$$

– Dk: – TOTIŽ PRO LIBOVOLNÉ $x \in T^p$ PLATÍ:

$$f_A \circ f_B(x) = f_A(f_B(x)) = f_A(B \cdot x) = A \cdot (B \cdot x) = (A \cdot B) \cdot x = f_{A \cdot B}(x) .$$

– PŘ: $r_{\alpha+\beta} = r_\alpha \circ r_\beta$



$$r_{\alpha+\beta} = f_A \quad , \quad A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

$$r_\alpha = f_B \quad , \quad B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$r_\beta = f_C \quad , \quad C = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

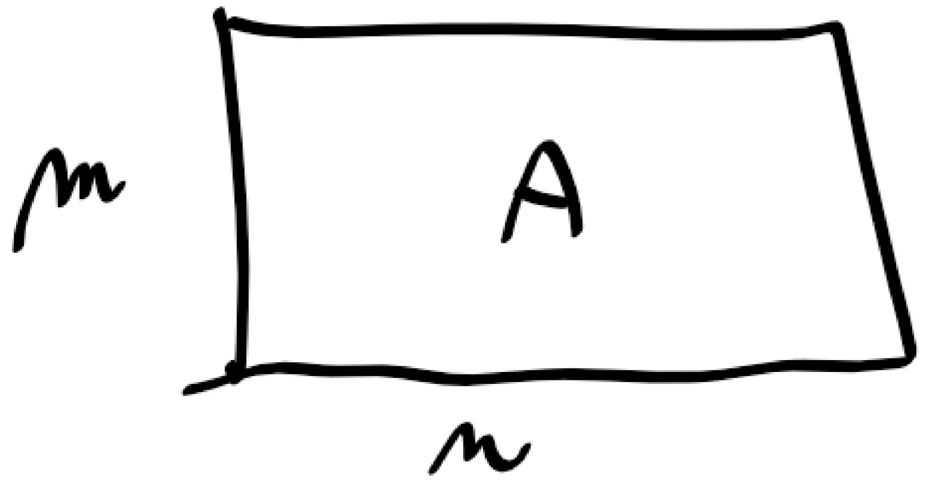
– VÍME $f_A = f_B \circ f_C = f_{B\cdot C}$, TJ. $A = B\cdot C$, COŽ ZNAMENÁ

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

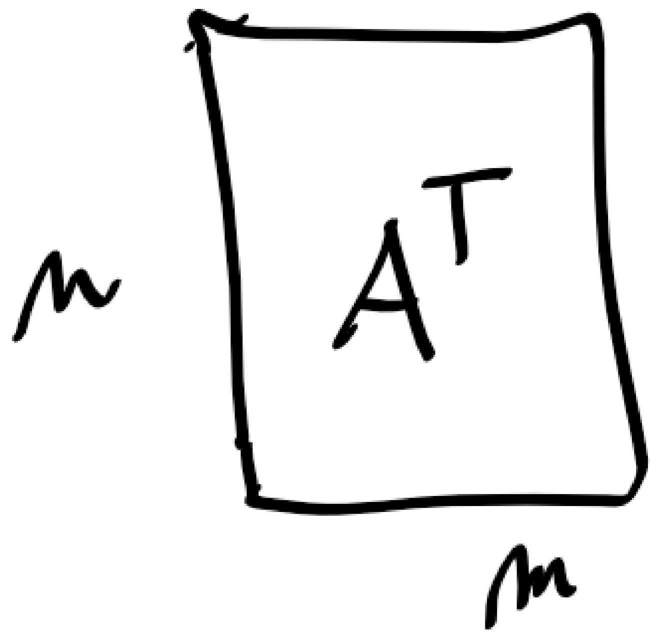
$$\Longrightarrow \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

– **Pozn.:** DUÁLNÍ ZOBRAZENÍ



$\rightsquigarrow \quad f_A : T^n \longrightarrow T^m$

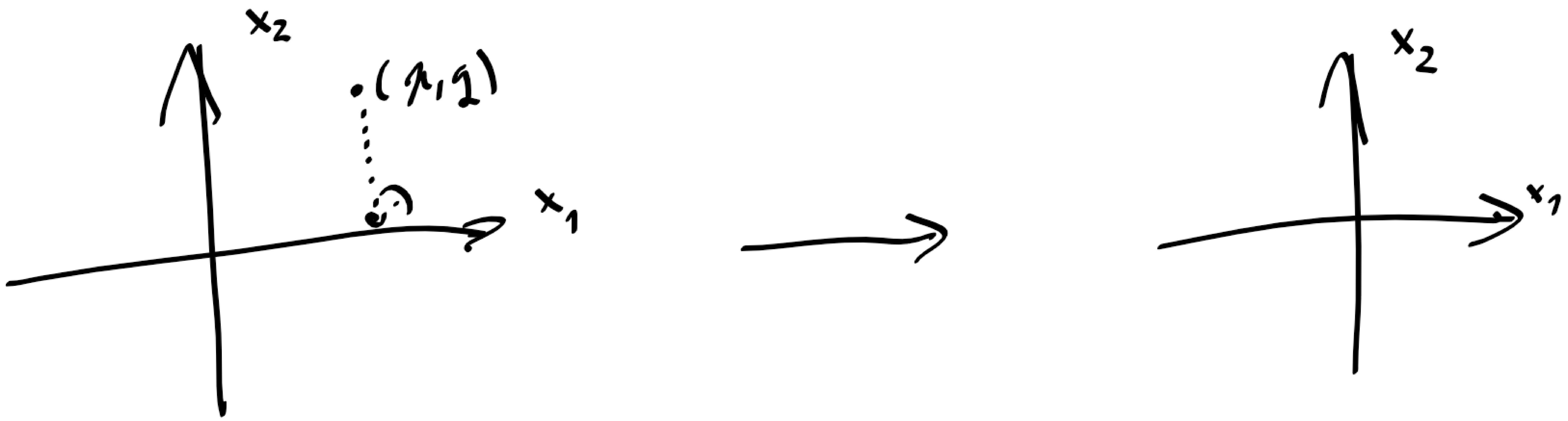


$\rightsquigarrow \quad f_{A^T} : T^m \longrightarrow T^n$

KONCEPČNÍ VZTAH TĚCHTO DVOU ZOBRAZENÍ SE ČASEM VYSVĚTLÍ PŘES ZOBRAZENÍ :

$$\begin{aligned} T^m \times T^n &\longrightarrow T \\ (y, x) &\longmapsto y^T \cdot A \cdot x \end{aligned}$$

– PŘ:



$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (x,0)$$

KOLMÁ PROJEKCE NA OSU x_1

- f JE URČENO MATICÍ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- f NENÍ ANI PROSTÉ ANI NA!