- TÉMA DNE:
  - CHARAKTERISTIKA TĚLES
  - MATICE A OPERACE S NIMI

- CHARAKTERISTIKA
  - T TĚLESO, BUDEME PŘIČÍTAT 1 SAMU K SOBĚ

$$1 = 1$$
$$2 := 1+1$$
$$3 := 1+1+1$$
$$4 := 1+1+1+1$$
$$\vdots$$

  - CO KDYŽ TŘEBA $T = \mathbb{Z}_3$?

$1, 2, 3, 4, \ldots \in \mathbb{Z}_3$, POZOR: V $\mathbb{Z}_3$ PLATÍ $3 = 0$!

V $\mathbb{Z}_3$ NEMAJÍ SMYSL VÝRAZY TYPU $\frac{a+b+c}{3}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$

- DÁLE: $6 = \underbrace{1+\ldots+1}_{6} = 3+3 = 0+0 = 0$

- **DEF:** BUĎ T TĚLESO. PAK <u>CHARAKTERISTIKOU</u> T ROZUMÍME NEJMENŠÍ KLADNÉ CELÉ ČÍSLO n TAKOVÉ, ŽE

$$\underbrace{1+1+\dots+1}_{n}=0,$$

POKUD EXISTUJE. JINAK ŘEKNEME, ŽE T MÁ CHARAKTERISTIKU 0.

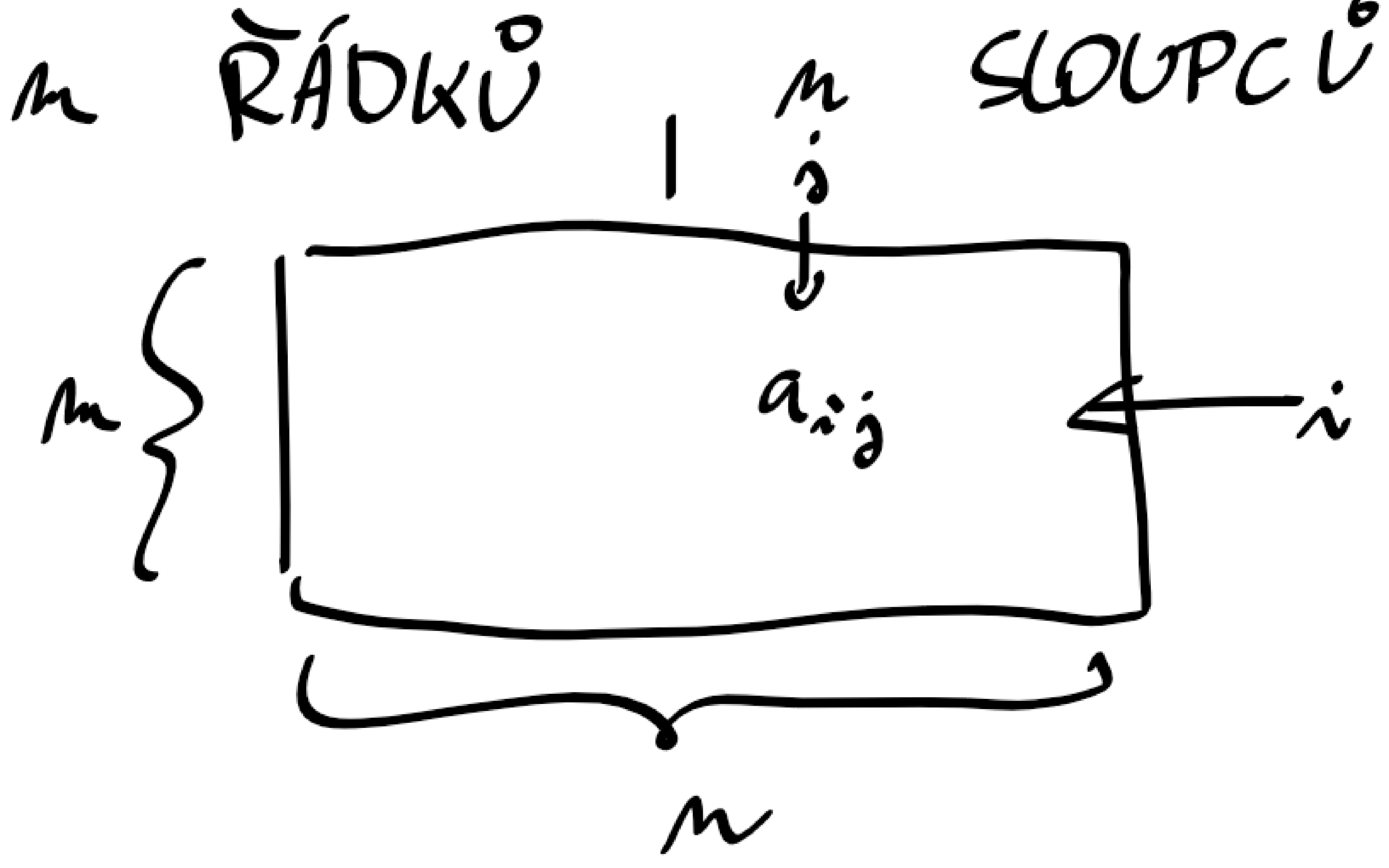
- **PŘ.:** CHAR. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$ JE 0.
  CHAR $\mathbb{Z}_p$ JE p.

- **T:** JE-LI T TĚLESO, PAK CHARAKTERISTIKA T JE BUĎ 0 NEBO PRVOČÍSLO.

- **DK:** - PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE CHAR. T JE $\underbrace{n \neq 0}_{v\ \mathbb{N}}$ A n JE SLOŽENÉ ČÍSLO, TJ. $n=k\cdot l$, $1<k,l<n$.
  - VŠIMNĚME SI: $\underbrace{(1+\dots+1)}_{n=k\cdot l}=\underbrace{(1+\dots+1)}_{k}\cdot\underbrace{(1+\dots+1)}_{l}$ $\quad (n=k\cdot l$ v $T)$
  - Z PŘEDPOKLADU $n=0$ V T, TAK $0=k\cdot l$ V T, $k,l\neq 0$ $(k,l<n)$ **SPOR!**

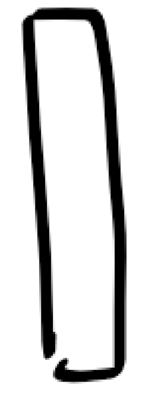
- MATICE A OPERACE S NIMI:

- MATICE TYPU $m \times n$ NAD TĚLESEM T JE OBDÉLNÍKOVÉ SCHÉMA PRVKŮ T, m ŘÁDKŮ, n SLOUPCŮ



, $a_{ij} \in T$

- SPECIÁLNÍ PŘÍPADY:

$n=1$ ....  (SLOUPCOVÝ ARITMETICKÝ) VEKTOR

$m=1$ ....  ŘÁDKOVÝ VEKTOR

- PODOBNĚ JAKO VEKTORY LZE MATICE SČÍTAT A NÁSOBIT PRVKEM Z T

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ .... $A+B := (a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ .... $-A := (-1)\cdot A$

$B=(b_{ij})_{m\times n}$ $\quad t\cdot A := (t\cdot a_{ij})_{m\times n}$ $\quad A-B := A+(-B)$

$t \in T$ $\quad O_{m\times n} = (0)_{m\times n}$

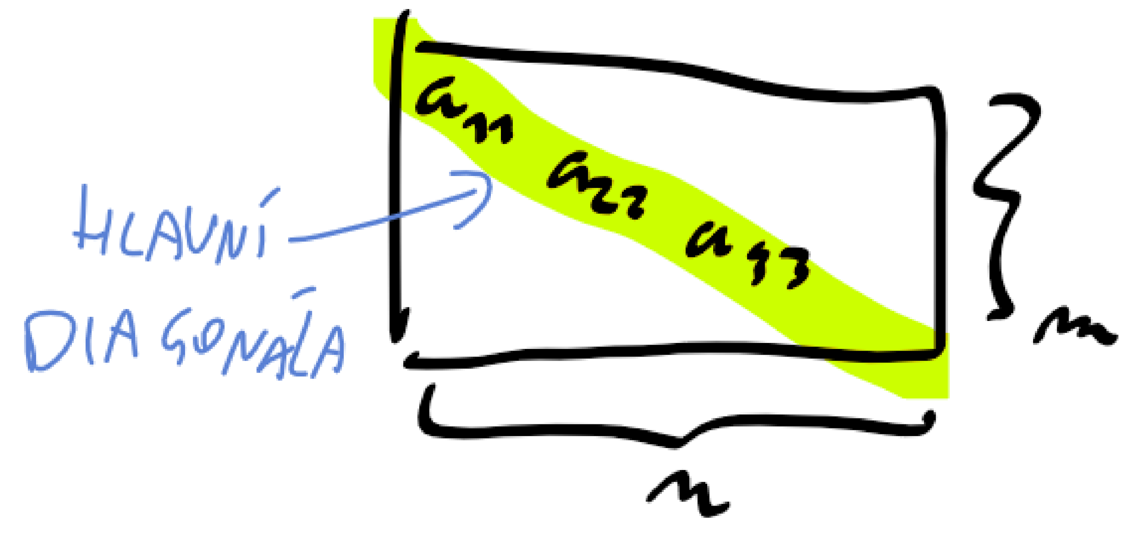
- VLASTNOSTI OPERACÍ:

• $(A+B)+C = A+(B+C)$

$\quad\;\| \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \|$

$((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}) \qquad (a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}))$

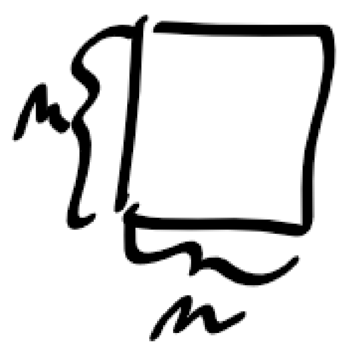
MÁ-LI JEDNA STRANA SMYSL (A, B, C STEJNÉHO TYPU) !



• $A+B = B+A$, $0+A = A$

• $(s+t)\cdot A = s\cdot A + t\cdot A$, $(s\cdot t)\cdot A = s\cdot(t\cdot A)$, $s\cdot(A+B) = s\cdot A + s\cdot B$

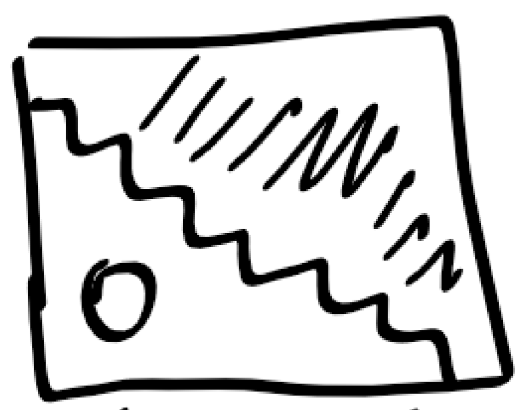
- MATICE A JE ČTVERCOVÁ, POKUD JE TYPU $n\times n$, $n\geq 1$



• JEDNOTKOVÁ MATICE ($n\geq 1$):

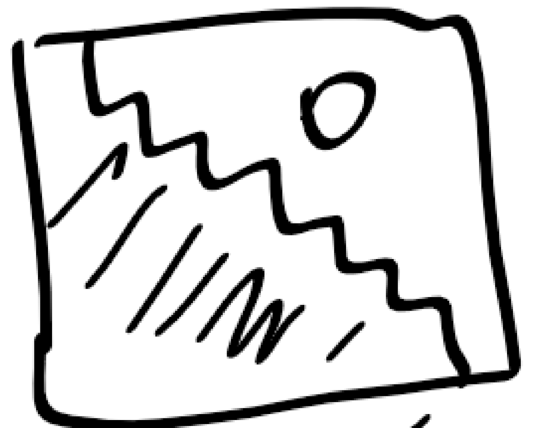
$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

• TROJÚHELNÍKOVÉ MATICE



HORNÍ

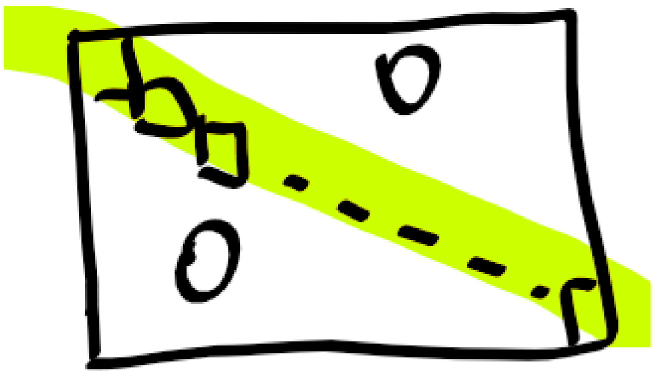
(TJ. $a_{ij}=0 \ \forall i>j$)



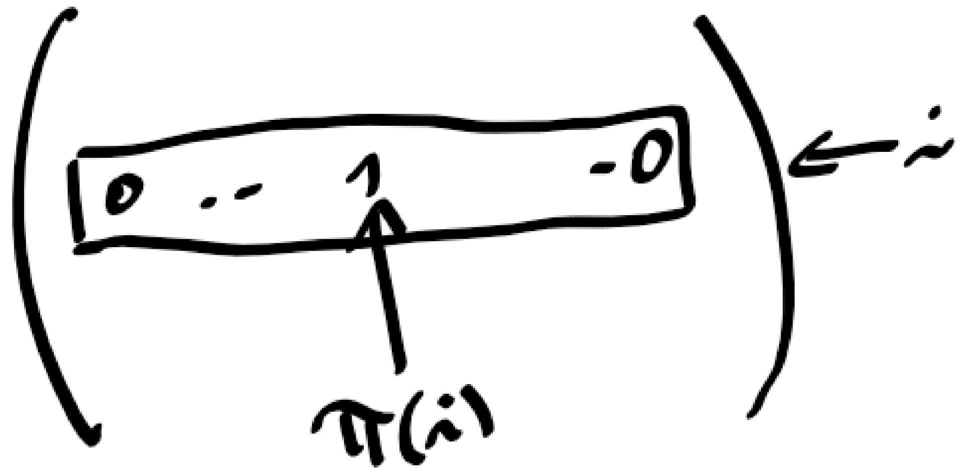
DOLNÍ

(TJ. $a_{ij}=0 \ \forall i<j$)

• DIAGONÁLNÍ



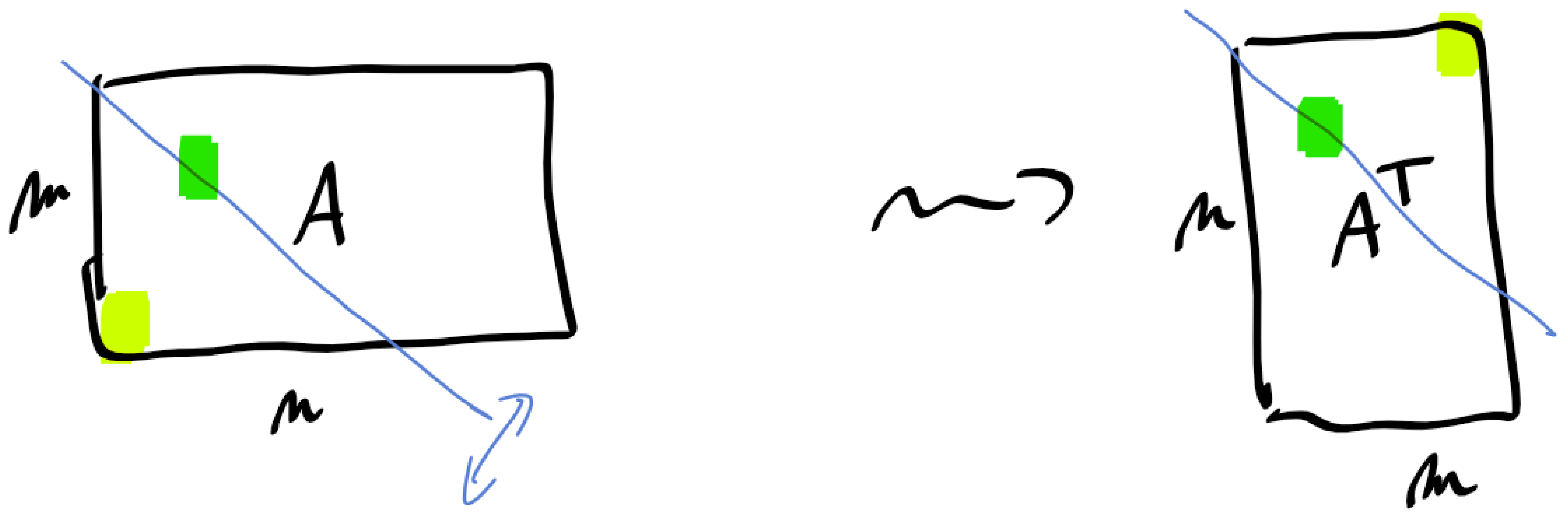
• PERMUTAČNÍ: $A=(a_{ij})_{n\times n}$, V KAŽDÉM ŘÁDKU I V KAŽDÉM SLOUPCI PRÁVĚ JEDNA 1, JINAK 0



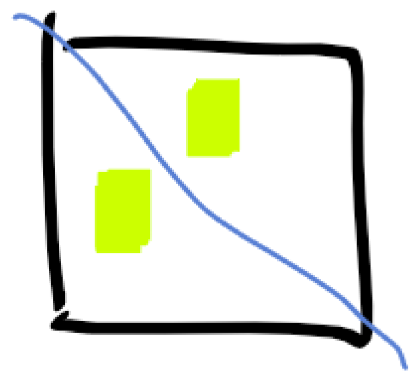
$\pi: \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ JE BIJEKCE (TJ. JE TO PERMUTACE NA $\{1,\dots,n\}$)

– **TRANSPONOVÁNÍ**: JE-LI $A=(a_{ij})_{m\times n}$, PAK

$A^T=(b_{ij})_{n\times m}$, KDE $b_{ij} := a_{ji}$



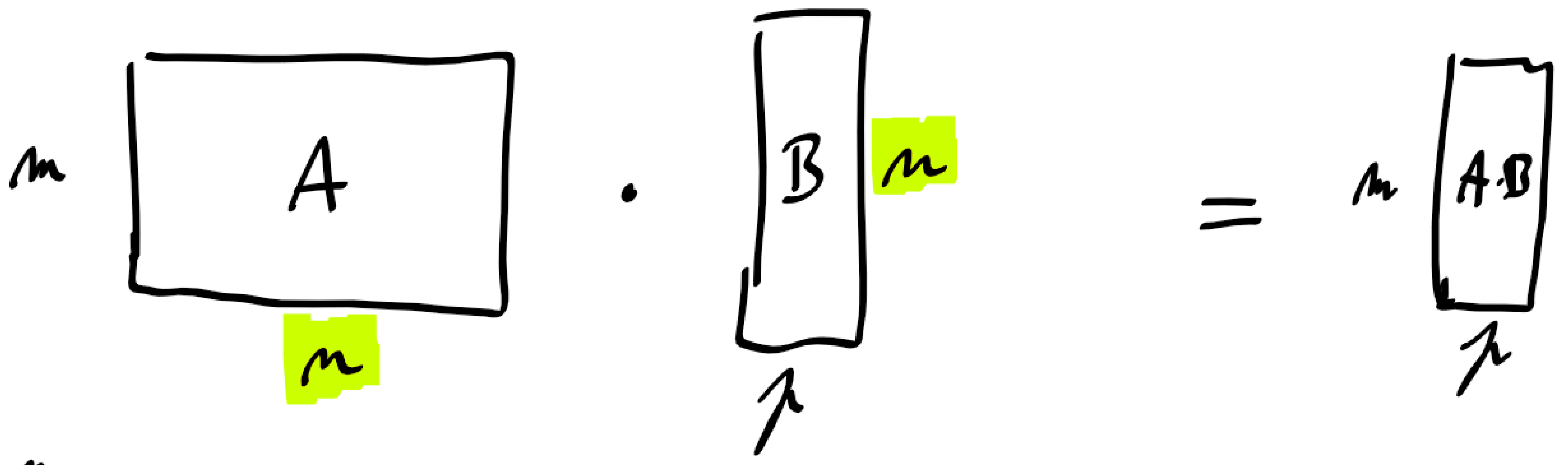
– **DALŠÍ TYP MATIC**: $A=(a_{ij})$ JE SYMETRICKÁ, POKUD JE ČTVERCOVÁ A $A=A^T$.



(NEBOLI $a_{ij}=a_{ji}$ $\forall\, i,j\in\{1,\dots,n\}$)

– NÁSOBENÍ MATIC:

- AŤ A, B JSOU MATICE NAD TĚLESEM T, $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{jk})_{n\times p}$

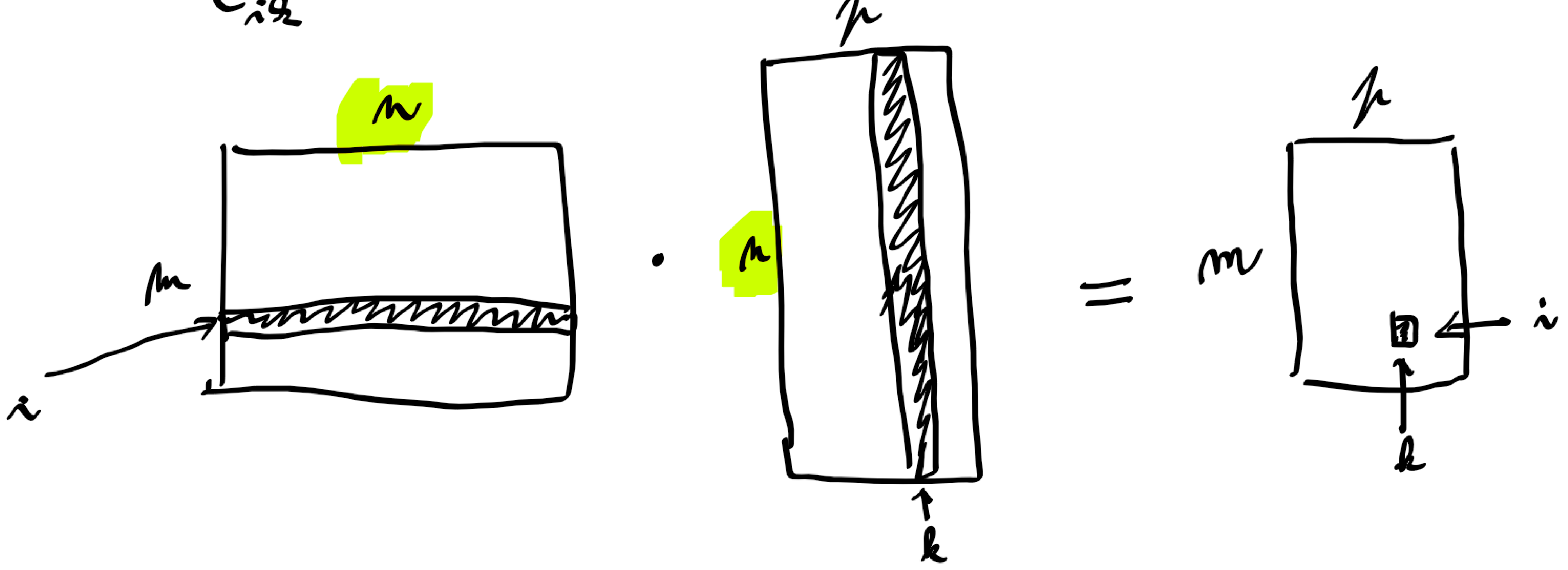


- $A\cdot B = \Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{jk}}_{c_{ik}}\Big)_{m\times p} = (c_{ik})_{m\times p}$, $c_{ik} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{jk}$

  $i\in\{1,\dots,m\}$, $k\in\{1,\dots,p\}$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\ 6\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}17\\ 39\\ 16\end{pmatrix}$$



PROČ NÁSOBENÍ MATIC?

- UVAŽUJME SLR

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

NAD T

- TOTO SE DÁ ZAPSAT JAKO:

$$m\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n}\right. \overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}^{1}\Big\}n = \overbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}^{1}\Big\}m$$

- POKUD OZNAČÍME MATICI SOUSTAVY A, VEKTOR PRAVÝCH STRAN b, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, PAK MÁ SLR TVAR

$$A \cdot x = b$$

– DALŠÍ POHLEDY NA SOUČIN MATIC:

– SLOUPCOVÝ:

$A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{jk})_{n \times p}$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{array}\right) \cdot \underbrace{\begin{array}{c} k \\ \left(\begin{array}{ccc} & \downarrow & \\ & \vdots & \\ & & \end{array}\right) \end{array}}_{p} = \underbrace{\begin{array}{c} k \\ \left(\begin{array}{ccc} & \downarrow & \\ & \boxed{c_k} & \\ & & \end{array}\right) \end{array}}_{p} =: C$$

$$c_k = b_{1k} \cdot a_1 + b_{2k} \cdot a_2 + \dots + b_{nk} \cdot a_n = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \cdot a_j$$

LINEÁRNÍ KOMBINACE SLOUPCŮ MATICE A

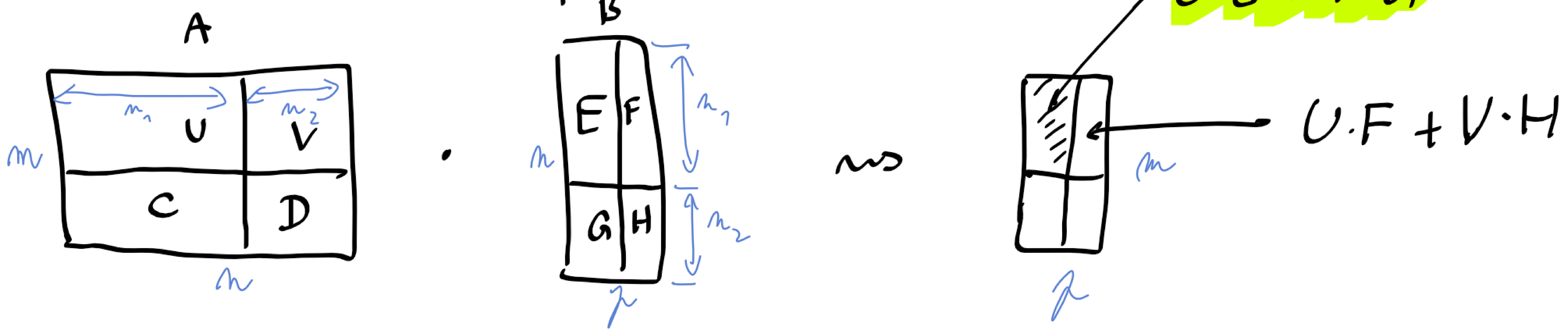
– ŘÁDKOVÝ POHLED: TOTÉŽ TRANSPONOVANĚ

- BLOKOVÉ NÁSOBENÍ:

• $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot e + b \cdot g & a \cdot f + b \cdot h \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$

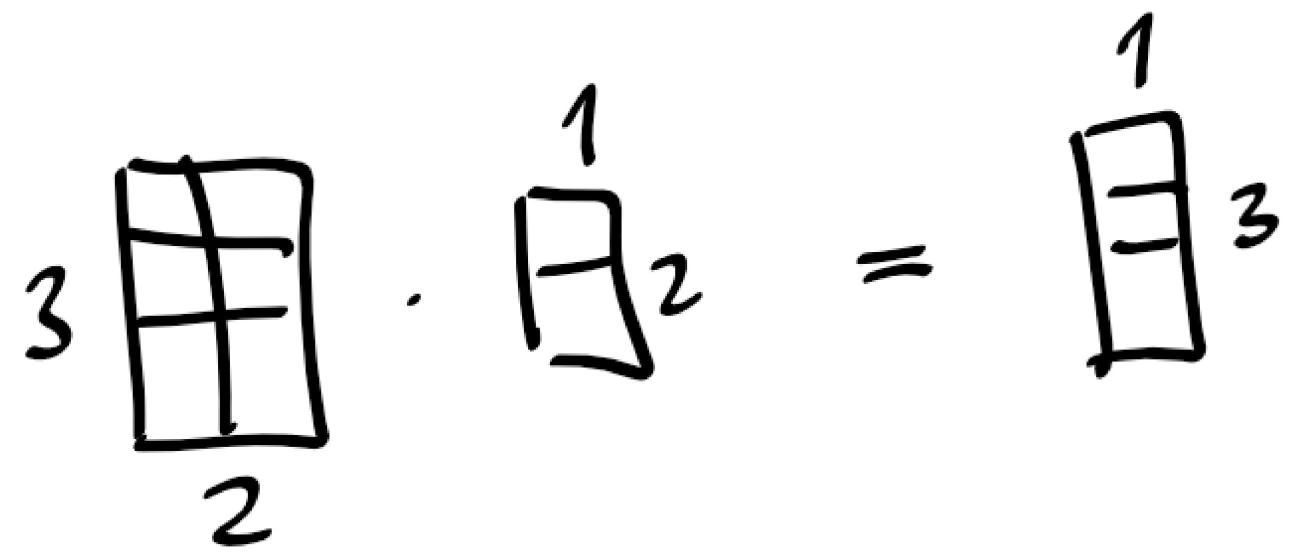
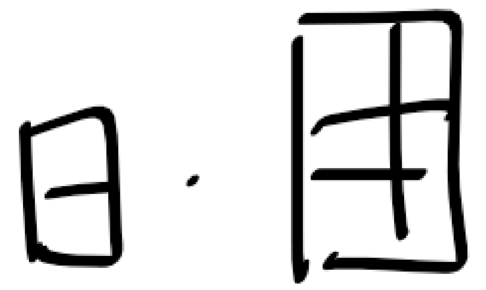
MATICE 2×2 NAD T

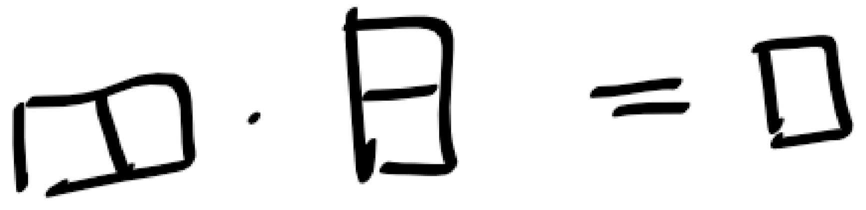
• UVAŽUJME MATICE A, B NÁSLEDOVNĚ



– VLASTNOSTI NÁSOBENÍ MATIC

– VAROVÁNÍ: $AB \neq BA$ (I V PŘÍPADĚ, ŽE OBA NÁSOBKY JSOU DEFINOVÁNY!)

– PŘ:  , ALE  NEJDE !

– PŘ:  , ALE 

– PŘ: $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19&\cdot\\ \cdot&\cdot\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23&\cdot\\ \cdot&\cdot\end{pmatrix}$

– JINAK SE CHOVÁ PĚKNĚ:

- $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$ MÁ-LI JEDNA STRANA SMYSL (MATICE MAJÍ TYPY, ABY ŠLY NÁSOBIT)
- $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$, $C\cdot(E+F) = C\cdot E + C\cdot F$ —"—
- A TYPU $m\times n$, PAK $I_m\cdot A = A = A\cdot I_n$
- $s \in T$, $s\cdot(A\cdot B) = (s\cdot A)\cdot B = A\cdot(s B)$

– MOCNĚNÍ MATIC: $n \geq 1$ ... $A^n = \underbrace{A\cdot A\cdots A}_{n}$, $A^0 := I_n$ (A TYPU $n\times n$)