SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

JAK VYPADÁ MNOŽINA ŘEŠENÍ SLR

$$\begin{aligned} x_3 + 2x_5 &= -3 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 6x_4 + 2x_5 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 2 \end{aligned}$$

– ROZŠÍŘENÁ MATICE SOUSTAVY:

MATICE SOUSTAVY

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -1 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

VEKTOR PRAVÝCH STRAN

– GAUSSOVA ELIMINACE

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim$$

-2

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim$$

-1

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

EKVIV. ÚPRAVY !!!

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 2 \\ x_3 + 2x_5 &= -3 \end{aligned}$$

EKVIVALENTNĚ:

BÁZOVÉ PROMĚNNÉ

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= 2 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 \\ x_3 &= -3 - 2x_5 \end{aligned} \right.$$

– ZA x_2, x_4, x_5 MŮŽEME VZÍT JAKÉKOLIV REÁLNÉ ČÍSLO

VOLNÉ PROMĚNNÉ

– ZPĚTNÁ SUBSTITUCE:

$x_5 = t_5, \quad t_5 \in \mathbb{R}$

$x_4 = t_4, \quad t_4 \in \mathbb{R}$

$x_3 = -3 - 2t_5$

$x_2 = t_2, \quad t_2 \in \mathbb{R}$

$x_1 = 2 - 2t_2 + (-3 - 2t_5) - 3t_4 = -1 - 2t_2 - 3t_4 - 2t_5$

MNOŽINA ŘEŠ.:

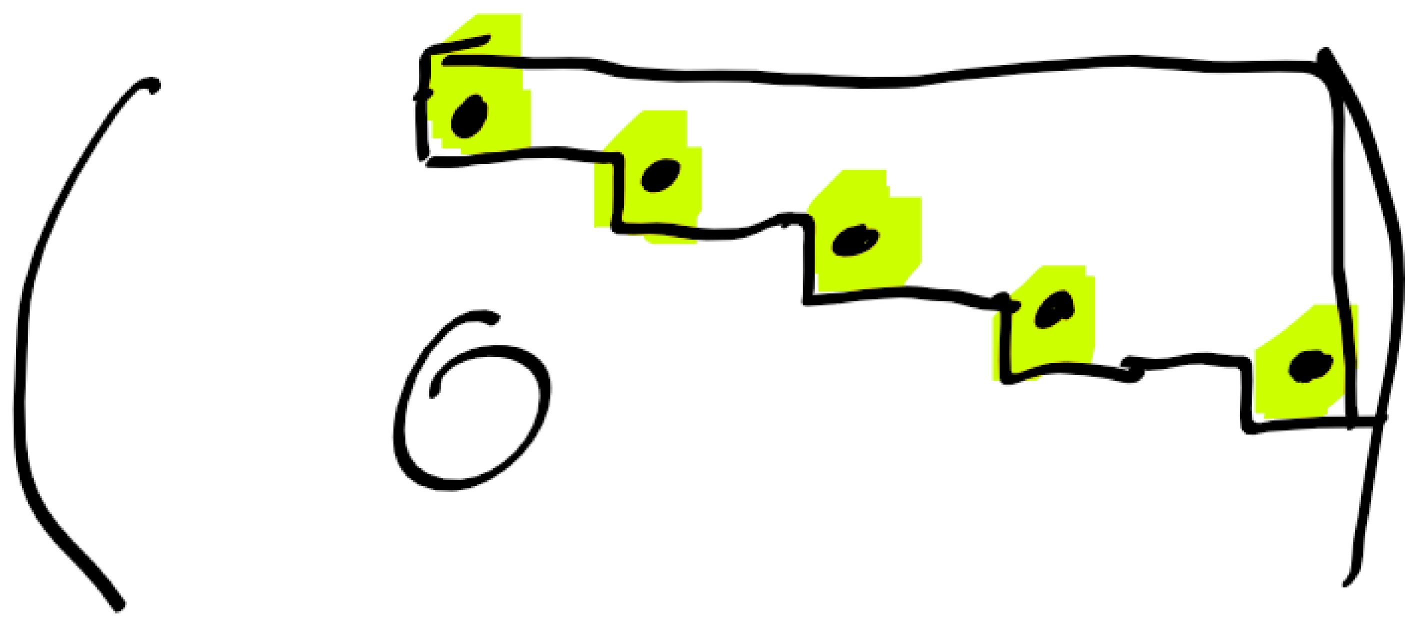
$$\left\{ \begin{pmatrix} -1-2t_2-3t_4-2t_5 \\ t_2 \\ -3-2t_5 \\ t_4 \\ t_5 \end{pmatrix} ; t_2, t_4, t_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\| $$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t_2, t_4, t_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

– ŘEŠENÍ SLR OBECNĚ:

1) $(A|b) \xrightarrow[\text{ŘÁDKOVÉ ÚPRAVY (EŘÚ)}]{\text{ELEMENTÁRNÍ}} (C|d)$ V TZV. ODSTUPŇOVANÉM TVARU



= PIVOTY

2) ROZHODNEME, EXISTUJÍ-LI ŘEŠENÍ A JAK VYPADAJÍ.

3) POKUD ŘEŠENÍ EXISTUJÍ, DOPOČÍTÁME ZPĚTNOU SUBSTITUCÍ

$\#$ PIVOTŮ = $\#$ BÁZOVÝCH PROMĚNNÝCH

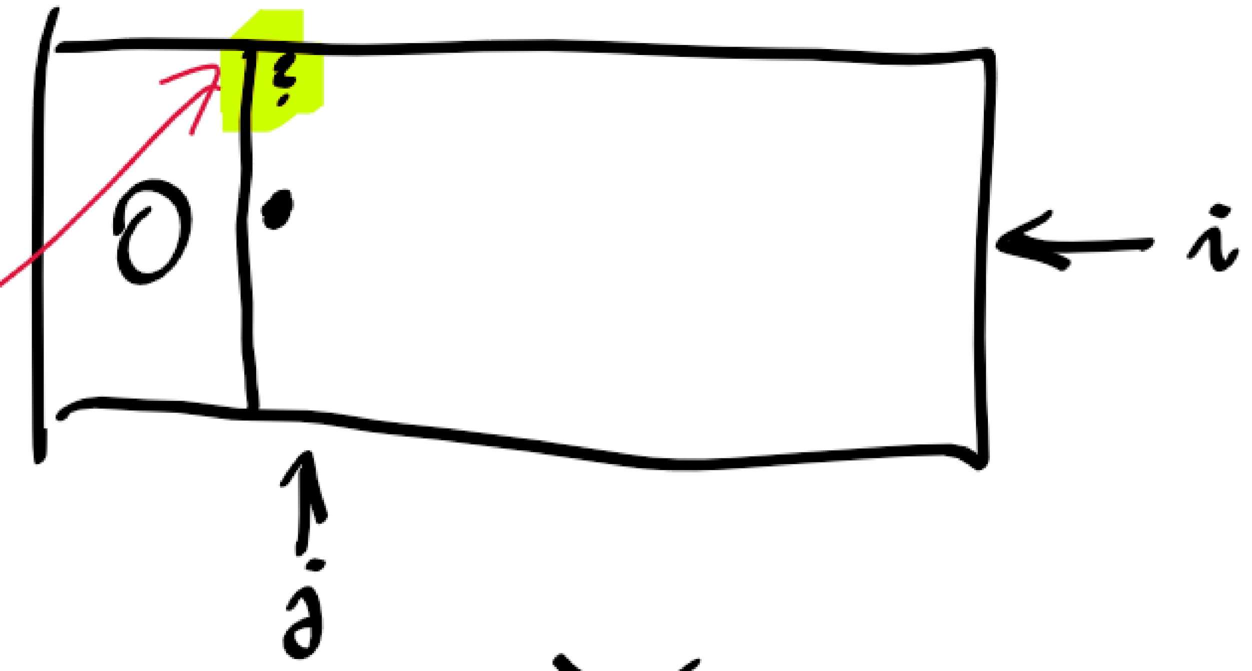
$\#$ NEZNÁMÝCH − $\#$ PIVOTŮ = $\#$ VOLNÝCH PROMĚNNÝCH (PARAMETRŮ)

– DEF: MATICE $C = (c_{ij})_{m\times n}$ JE V (ŘÁDKOVĚ) ODSTUPŇOVANÉM TVARU, POKUD $\exists r \in \{0, \dots, m\}$ TAKOVÉ, ŽE

- ŘÁDKY S INDEXEM $r+1, \dots, m$ JSOU NULOVÉ
- PLATÍ $k_1 < k_2 < \dots < k_r$, KDE $k_i = \min\{l : c_{il} \neq 0\}$, A ŘÁDKY $1, \dots, r$ JSOU $\neq 0$.

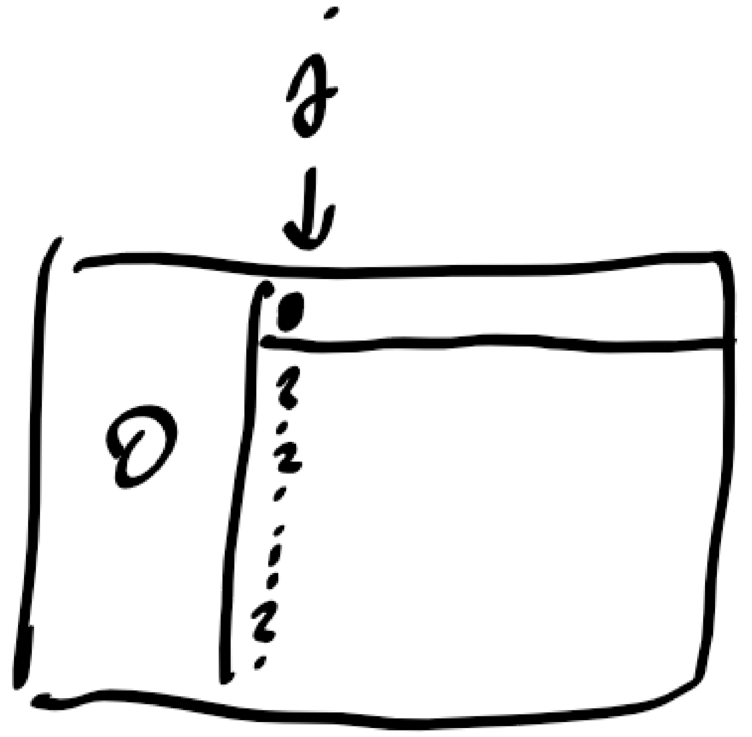
– PŘEVOD MATICE $A=(a_{ij})_{m\times n}$ DO ODSTUPŇOVANÉHO TVARU POMOCÍ EŘÚ:

1) POKUD JE A NULOVÁ, SKONČÍME.
JINAK NAJDEME INDEX j PRVNÍHO NENULOVÉHO SLOUPCE



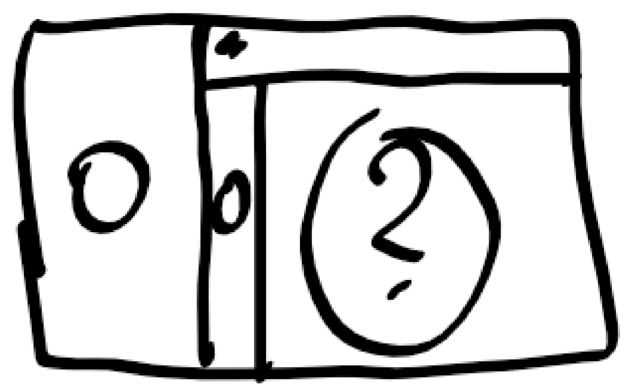
$a_{ij}\neq 0$

2) POKUD $a_{1j}=0$, PROHODÍME ŘÁDKY 1 A i:



$a_{1j}\neq 0$

3) OD KAŽDÉHO Z ŘÁDKŮ $i\in\{2,\dots,m\}$ ODEČTEME $\frac{a_{ij}}{a_{1j}}$ – NÁSOBEK 1. ŘÁDKU



4) REKURZIVNĚ PROVEDEME TOTÉŽ NA MATICI BEZ 1. ŘÁDKU

– HODNOST MATICE (ANGL. RANK)

- $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $r(A)$ (rank(A))
- VEZMEME A $\xrightarrow[\text{(ELIMINACE)}]{\text{ERÚ}}$ MATICE C V ODSTUPŇOVANÉM TVARU

- HODNOST A DEFINUJEME JAKO # NENULOVÝCH ŘÁDKŮ V C

– **PŘ.:** $r\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 1$ (NEZÁVISÍ VOLBÁCH V ALGORITMU!)
DOKONCE INDEXY SLOUPCŮ S PIVOTY NEZÁVISÍ NA VOLBÁCH!

$$-3 \curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– **POZOROVÁNÍ:** $r(A) \le m$ A $r(A) \le n$

GEOMETRICKÝ VÝZNAM SLR:

- MĚJME SLR POPSANOU $(A|b)$ O n NEZNÁMÝCH

ŘÁDKY $(A|b)$: ŘÁDKY POPISUJÍ JEDNOTLIVÉ ROVNICE,
NETRIV. ROVNICE MÁ ZA MNOŽINU ŘEŠENÍ NADROVINU V $\mathbb{R}^n$

⇝ JAK VYPADÁ ŘEŠENÍ

SLOUPCE $(A|b)$: $A: \underbrace{\left(u_1 \,\middle|\, u_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, u_n \right)}_{n} \Big\} m$

$\forall i \;\; a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$

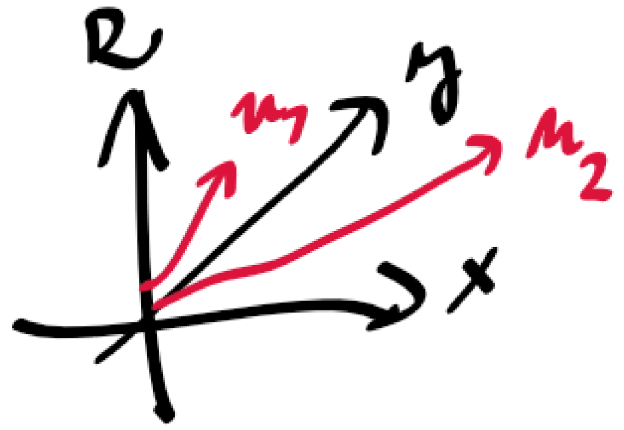
LINEÁRNÍ KOMBINACE

$x_1 u_1 + \dots + x_n u_n = b$

HLEDÁME $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, ABY

⇝ EXISTUJE ŘEŠENÍ?

- PŘ: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & b_1 \\ 2 & 5 & b_2 \\ 3 & 6 & b_3 \end{array}\right)$ MÁ ŘEŠENÍ?



LEŽÍ b V ROVINĚ PROCHÁZEJÍCÍ $(0,0,0)$ DANÉ u_1, u_2?

– PŘ:

$$-5\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \end{array}\right)$$

$x_3 = t \in \mathbb{R}$

$x_2 = 3 - 2x_3 = 3 - 2t \qquad (-4x_2 - 8x_3 = -12, \text{ TJ. } x_2 + 2x_3 = 3)$

$x_1 = 4 - 2x_2 - 3x_3 = 4 - 2(3 - 2x_3) - 3x_3 = -2 + t$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \{ v + t \cdot w : t \in \mathbb{R} \}$$

$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = v$, $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$

2 ŘEŠENÍ: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = v + w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(t = 1)$

$$\begin{array}{rl} & \tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 + 3\tilde{x}_3 = 4 \\ - & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ \hline & w_1 + 2w_2 + 3w_3 = 0 \end{array}$$

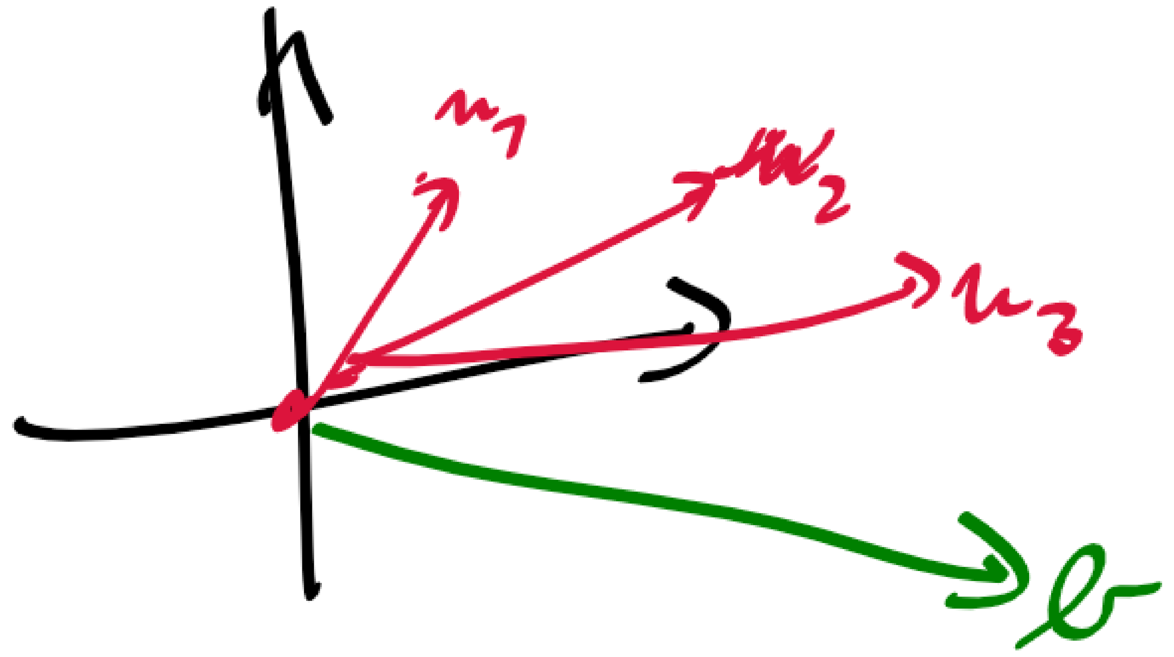
ANEB PROČ PO DOSAZENÍ SLOŽEK w DO SOUSTAVY VYJDOU NULY

$$(A\,|\,b) = \left(u_1 \,\middle|\, u_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, u_n \,\middle|\, b\right)$$

- SLR MÁ ŘEŠENÍ, PRÁVĚ KDYŽ b JE LINEÁRNÍ KOMBINACE $u_1, \dots, u_n$

- $\underline{n = 3}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & -5 \\ 2 & 5 & 8 & 33 \\ 3 & 6 & 9 & 21 \end{array}\right)$$



$$b \overset{?}{\in} \{t_1 u_1 + t_2 u_2 + t_3 u_3 : t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}\}$$

$\uparrow$

PROSTOR NEBO ROVINA NEBO PŘÍMKA NEBO BOD

– ŘEŠÍME SLR, 2 ROVNICE, $n = 2$

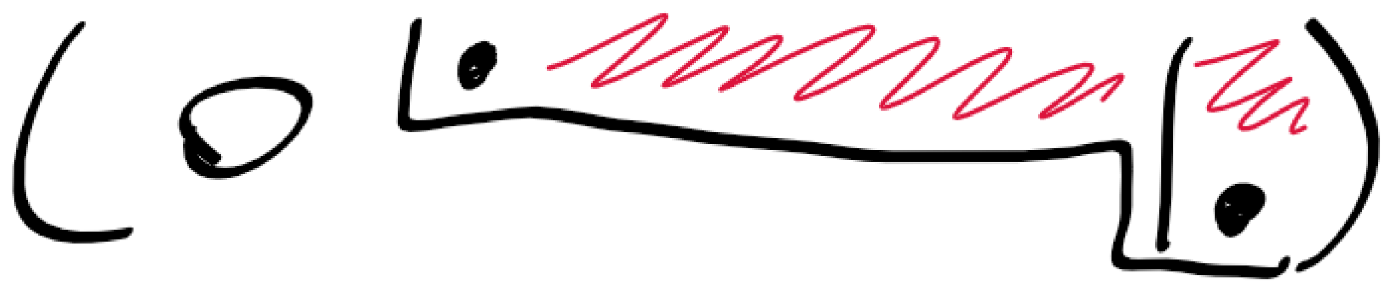
$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \end{array}\right)$$

– MŮŽEME PTÁT PO HODNOSTI MATICE A (MATICE SOUSTAVY)

$(A|b)$ (ROZŠ. MATICE SOUSTAVY)

ELIMINACE $\rightsquigarrow$

NEBO



NEBO ...

$r(A) = 2$

$r((A|b)) = 2$ $\Rightarrow$

$\# \text{PARAMETRŮ} = n - r(A)$

MÁ ŘEŠENÍ

$r(A) = 1$

$r((A|b)) = 2$ $\not\Rightarrow$

NEMÁ ŘEŠENÍ