LINEÁRNÍ ALGEBRA

- **KOREKTURY:**
  - ZNAČENÍ $v = (a, b)$
  - $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$

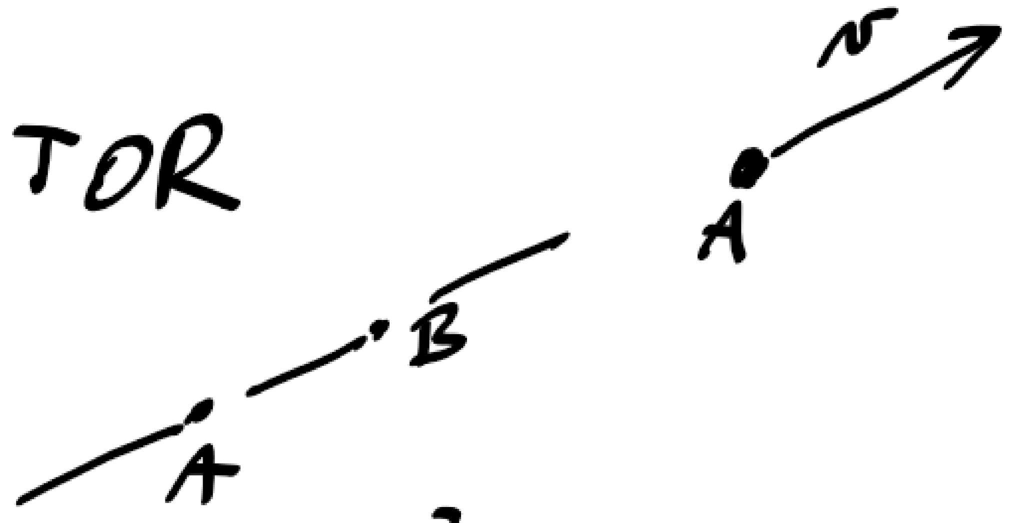
- **ANALYTICKÁ GEOMETRIE:**

Odkaz na web: https://www.geogebra.org/m/absh9hws

- JAK ZADAT PŘÍMKU V $\mathbb{R}^2$?

PARAMETRICKY 1) BOD A SMĚROVÝ VEKTOR, $v \neq (0,0)$, $L = \{A + t \cdot v \mid t \in \mathbb{R}\}$

2) 2 RŮZNÉ BODY



IMPLICITNĚ 3) ROVNICE PŘÍMKY: $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}$ $\quad a, b, c \in \mathbb{R}$

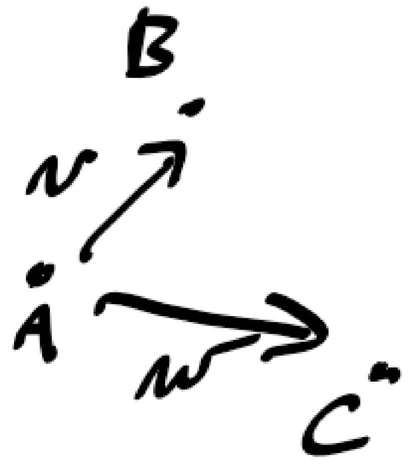
- k 3):
  - $a = b = 0 \rightsquigarrow L = \{(x,y) : 0 = c\}$ $\begin{cases} c = 0 \; \dots \; L = \mathbb{R}^2 \\ c \neq 0 \; \dots \; L = \emptyset \end{cases}$
  - $a \neq 0$ NEBO $b \neq 0$ .... PŘÍMKA $\left(y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} x \right)$

- PŘECHOD 3) $\rightsquigarrow$ 1):

$\uparrow$
ŘEŠENÍ LIN. ROVNICE
$ax + by = c$

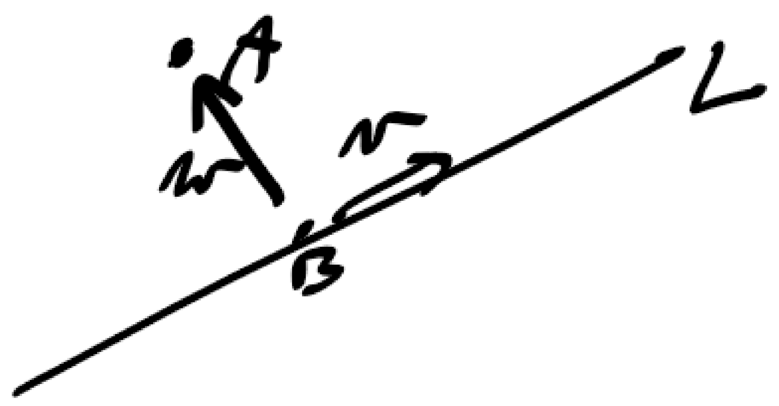
$$2x + 3y = 5$$
$$3y = -2x + 5, \quad y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$
$$x = t, \quad y = -\frac{2}{3}t + \frac{5}{3} \quad t \in \mathbb{R}$$
$$L = \left\{ \left(1 \cdot t, -\frac{2}{3}t + \frac{5}{3}\right) : t \in \mathbb{R} \right\} \stackrel{!}{=} \left\{ \left(0, \frac{5}{3}\right) + t \cdot \left(1, -\frac{2}{3}\right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Odkaz na web: https://www.geogebra.org/m/vgyhbspj



- ROVINA V $\mathbb{R}^3$:

1) BOD A 2 VEKTORY, $\neq 0$, NE STEJNÝ SMĚR
2) TŘI BODY, KTERÉ NELEŽÍ NA PŘÍMCE
3) $P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=d\}$, $a\neq 0$ NEBO $b\neq 0$ NEBO $c\neq 0$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$
4) PŘÍMKA A BOD, KTERÝ NA NÍ NELEŽÍ



- PŘÍMKY V $\mathbb{R}^3$:

1) 2 BODY (RŮZNÉ!)
2) BOD A A VEKTOR $v\neq 0$, $L=\{A+t\cdot v : t\in\mathbb{R}\}$

3) SOUSTAVA ROVNIC + PODMÍNKY NA $a,\dots,h$

$$L=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : ax+by+cz=d \ \& \ ex+fy+gz=h\}$$

3)=>2) ŘEŠENÍ SOUSTAVY:

$$\begin{array}{rrrcl} & x+3y & -2z & = & 10 \quad \cdot(-3) \\ & 3x-2y & -2z & = & 6 \\ \hline & x+3y & -2z & = & 10 \\ & -11y & +4z & = & -24 \end{array}$$

$z=t$, $t\in\mathbb{R}$

$y=\frac{4}{11}t+\frac{24}{11}$

$x=\frac{10}{11}t+\frac{38}{11}$

$$L=\{(\tfrac{38}{11},\tfrac{24}{11},0)+t\cdot(\tfrac{10}{11},\tfrac{4}{11},1) : t\in\mathbb{R}\}$$

$t=0$

Odkaz na web: https://www.geogebra.org/m/mjank8ze

– Zobrazení:

$(:=)$ = takto definujeme

- X, Y množiny

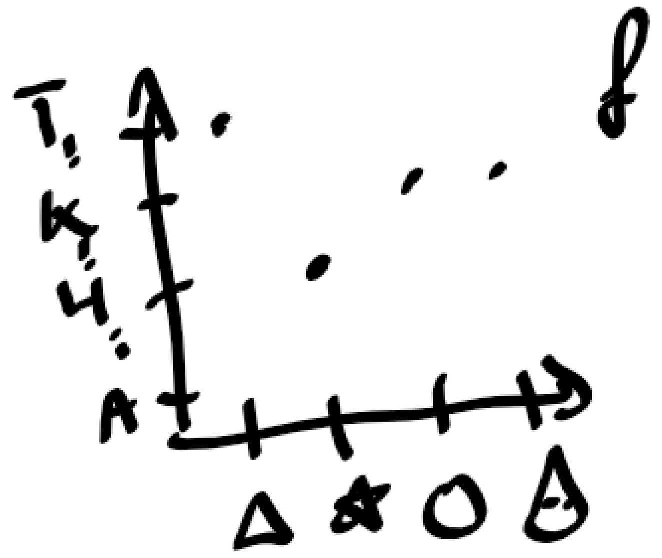
$$f : X \longrightarrow Y \qquad x \in X \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(x) \in Y$$

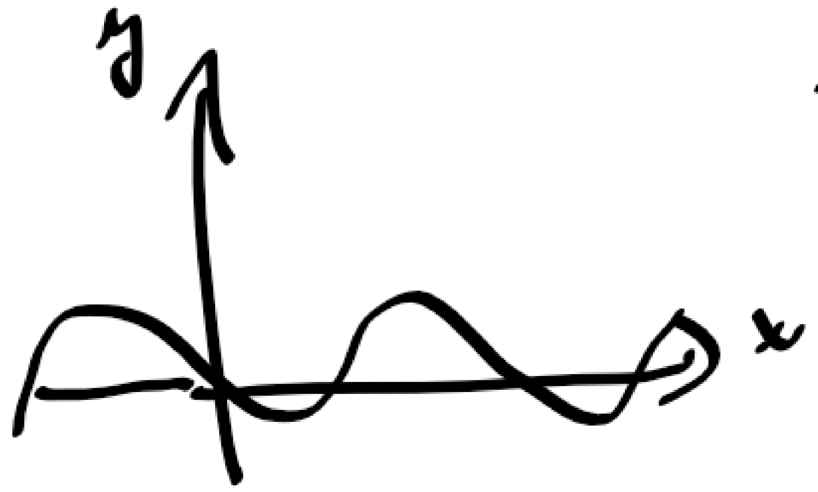
- Př: $X = \{\triangle, \star, \circ, \bigtriangleup\}$, $Y = \{A, B, C, \dots, Z\}$
  - $f(x) :=$ první písmeno tvaru x, $x \in X$

- zadání f pomocí tabulky

x	$\triangle$	$\star$	$\circ$	$\bigtriangleup$
$f(x)$	T	H	K	K

- grafem:





– sin: $\underset{\parallel}{X}\,\mathbb{R} \to \underset{\parallel}{Y}\,\mathbb{R}$

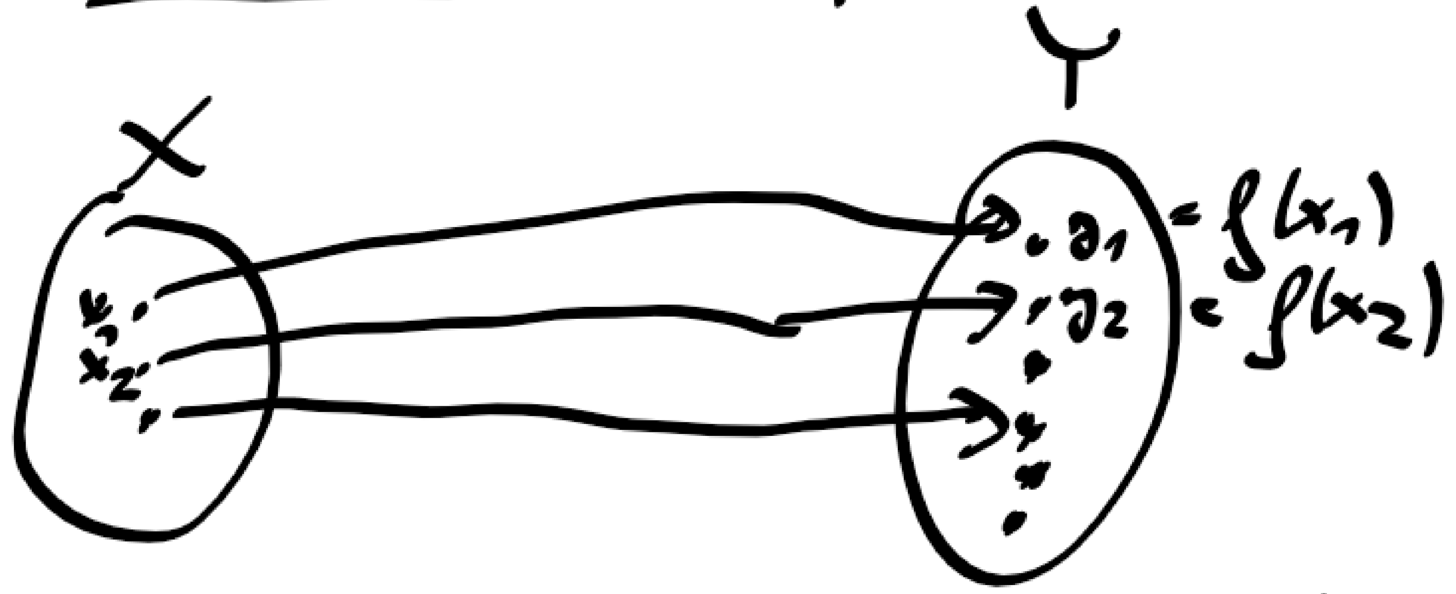
- Rovnost zobrazení $f : X \to Y$, $g : U \to V$:
  - $X = U$ & $Y = V$ (tj máme $f : X \to Y$, $g : X \to Y$)
  - $\forall x \in X : f(x) = g(x)$

– Formálně:

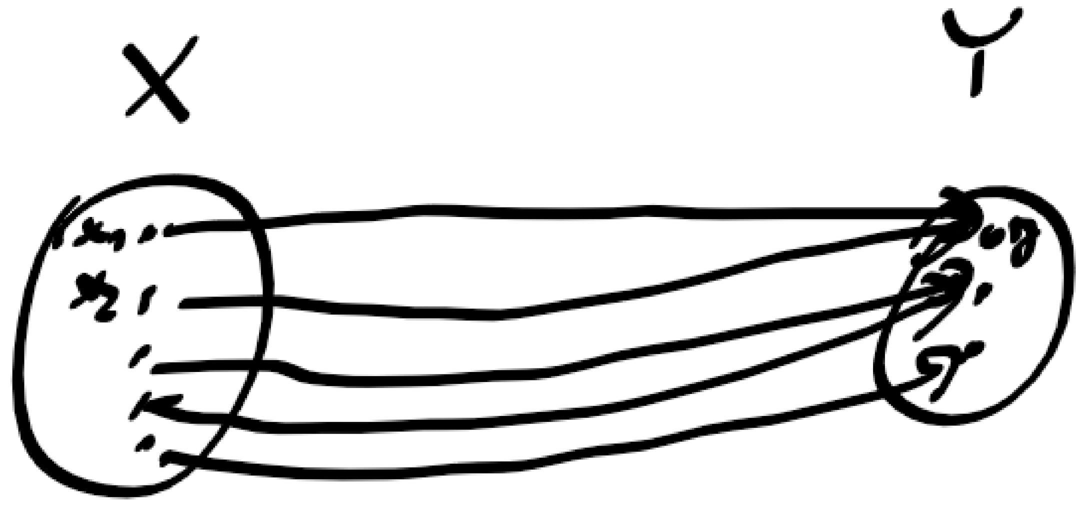
$$f = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$$

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

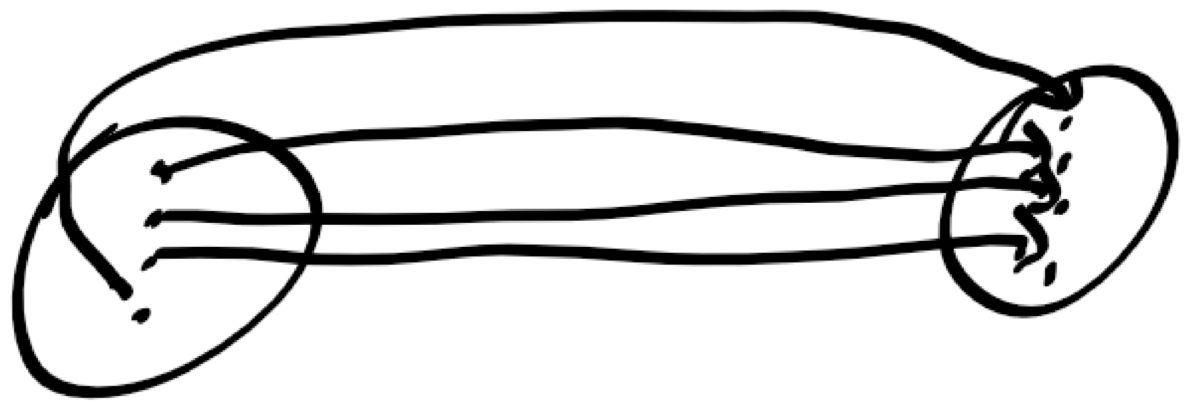
1. $f: X \to Y$ <u>PROSTÉ</u> (<u>INJEKTIVNÍ</u>), POKUD $\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2 : f(x_1) \neq f(x_2)$



2. f JE <u>NA</u> (<u>SURJEKTIVNÍ</u>), POKUD $\forall y \in Y\ \exists x \in X : f(x) = y$
(MNOŽINU Y)

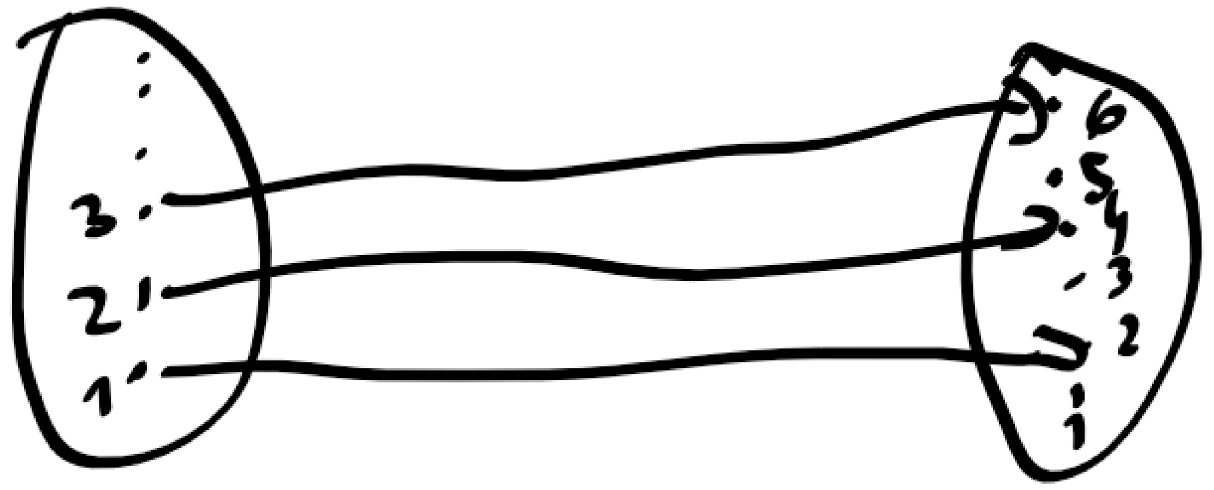


3. f JE <u>VZÁJEMNĚ JEDNOZNAČNÉ</u> (<u>BIJEKTIVNÍ</u>), POKUD JE PROSTÉ I NA



<u>PŘ</u>: $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$n \longmapsto 2n$



- SKLÁDÁNÍ: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{1}{2+\sin x}$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}\setminus\{-2\} \xrightarrow{g} \mathbb{R}\setminus\{0\} \xrightarrow{h} \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$x \mapsto \sin x$

$y \mapsto y+2$

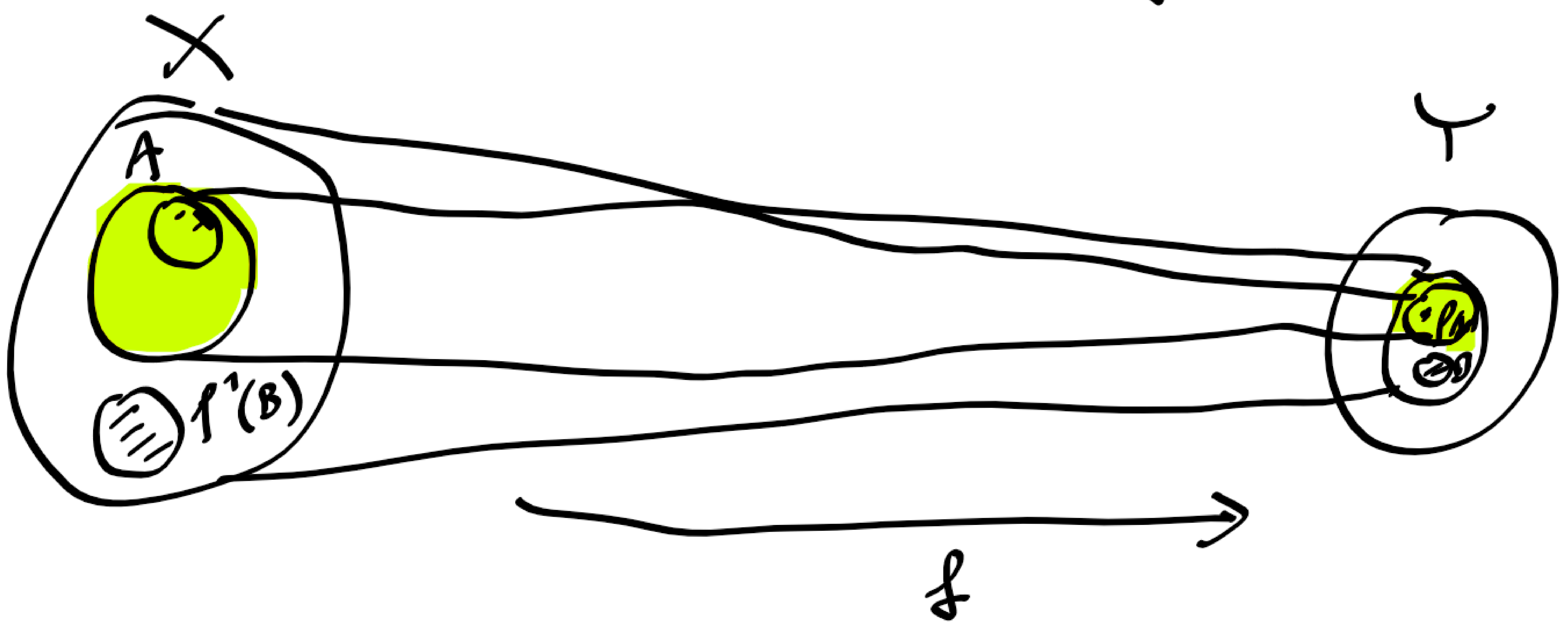
$z \mapsto \frac{1}{z}$

$f: X \to Y$, $g: Y \to Z$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \quad \rightsquigarrow \quad X \xrightarrow{g\circ f} Z, \quad g\circ f(x) = g(f(x))$$

$g\circ f: X \to Z$

- TERMINOLOGIE:



OBRAZ f: $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in X\}$

OBRAZ $A \subset X$: $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$

ÚPLNÝ VZOR $B \subseteq Y$: $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

ÚPLNÝ VZOR $y \in Y$: $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$

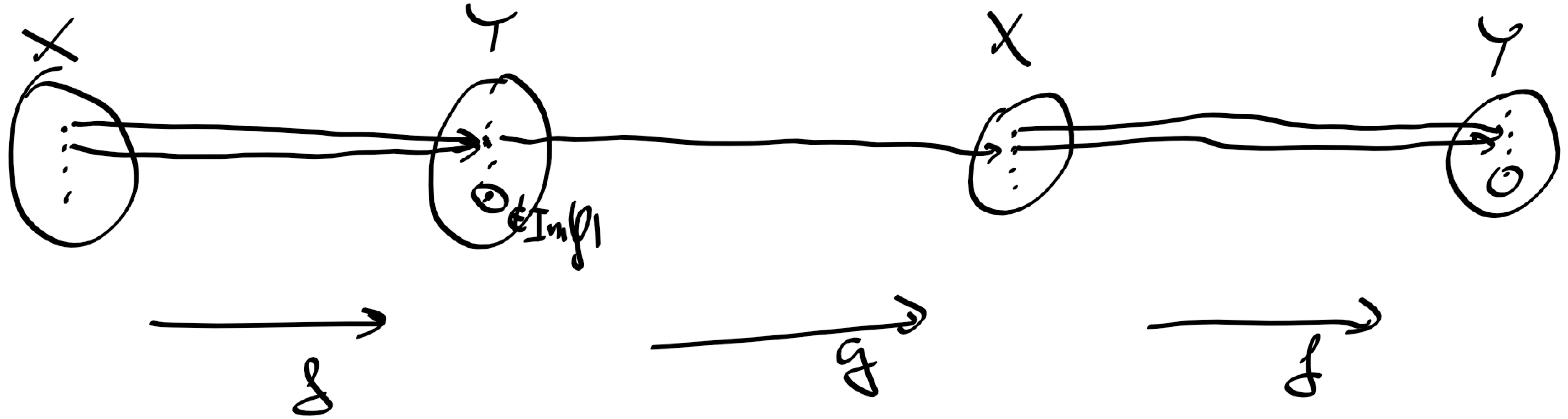
- <u>INVERZE</u>:
  - IDENTICKÉ ZOBRAZENÍ: (1_X) $\quad id_X : X \longrightarrow X$, $\quad x \longmapsto x$

- f MÁ INVERZI g, POKUD $f \circ g = id_Y$ & $g \circ f = id_X$
  $f : X \to Y \qquad g : Y \to X$

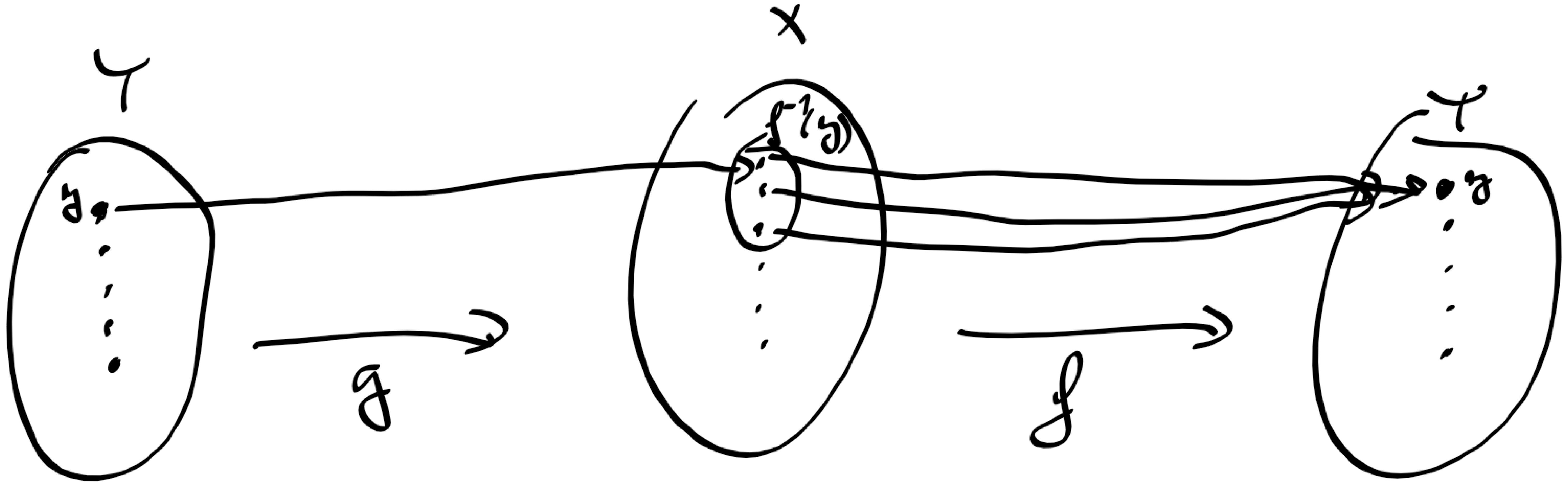
  - <u>PŘ</u>: $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

- <u>T</u>: f MÁ INVERZI, PRÁVĚ KDYŽ JE BIJEKTIVNÍ. (ZNAČENÍ $f^{-1} := g$)
  $\Longleftrightarrow$

  - <u>DK</u>: $\Longrightarrow$:



$f : X \to Y$, INVERT. ZPRAVA, POKUD $\exists g : Y \to X : f \circ g = id_Y$



- **TVRZENÍ:** f INV. ZPRAVA $\iff$ f JE NA

- **PŘ:** $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$n \mapsto \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

$$1 \mapsto 1$$
$$2 \mapsto 1$$
$$3 \mapsto 2$$
$$4 \mapsto 2$$

NENÍ INV.
JE INV. ZPRAVA

- **PŘ:**

$f : X \to Y$

$1, 2 \mapsto *$

$g : * \mapsto 1$

$Y \to X$