Úlohy k přednášce NMAG 101 a 120: Lineární algebra a geometrie 1, 2014–2015

Verze ze dne 9. prosince 2014

Toto je seznam přímočarých příkladů k přednášce. Úlohy z tohoto seznamu je nezbytně nutné umět řešit. Podobné typy úloh se budou vyskytovat v testech na cvičeních.

1 Opakování

Cvičení 1.1. *Spočítejte* $(1+2i)+(3+4i)$, $(1+2i)(3+4i)$, $(1+2i)/(3+4i)$, $\overline{1+2i}/(3+4i)$.

Cvičení 1.2. *Najděte goniometrický tvar komplexního čísla* $(2+2i)$ *a spočítejte* $(2+2i)^{13}$.

Cvičení 1.3. *Najděte všechny páté odmocniny z komplexního čísla* $i-1$ *(tj. najděte všechna řešení rovnice* $x^5 = i-1$*).*

Cvičení 1.4. *V oboru komplexních čísel řešte soustavu lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} ix + (1-i)y &= 3i+4 \\ (1-i)x - 3iy &= 2i-1 \end{aligned}$$

Cvičení 1.5. *Najděte všechny komplexní kořeny kvadratické rovnice*

$$ix^2 + (i-1)x + 3 = 0 \ .$$

Cvičení 1.6. *Nalezněte obecnou a parametrickou rovnici roviny procházející body* $A=[0,1,1]$, $B=[1,2,3]$, $C=[1,-2,3]$.

2 Soustavy lineárních rovnic

Cvičení 2.1. *Určete, zda matice je v odstupňovaném tvaru.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Cvičení 2.2. *Najděte všechna řešení soustavy rovnic nad* $\mathbb{R}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

Cvičení 2.3. *Najděte všechna řešení soustavy rovnic nad $\mathbb{C}$.*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2+i & 2-3i & 2 & 3 \\ i & 3 & 2 & 4 & 5+i \\ 3 & i & 0 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

Cvičení 2.4. *Najděte všechna řešení homogenní soustavy rovnic (nad $\mathbb{C}$) s maticí*

$$\begin{pmatrix} 0 & 2+i & 2-3i & 2 \\ i & 3 & 2 & 4 \\ 3 & i & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

Cvičení 2.5. *Nadjěte polynom třetího stupně, jehož graf obsahuje body*

$$(0,1), (1,-1), (2,5), (3,37) \ .$$

3 Tělesa a soustavy lineárních rovnic nad tělesy

Cvičení 3.1. *V tělese $\mathbb{Z}_7$ spočítejte*

$$\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{5} \ .$$

Cvičení 3.2. *Najděte všechna řešení soustavy rovnic nad $\mathbb{Z}_{11}$.*

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 3 & 5 & 2 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 10 & 8 & 0 & 9 \\ 0 & 8 & 3 & 3 & 4 & 4 & 7 \end{array}\right)$$

4 Matice

Cvičení 4.1. *Spočítejte součin matic nad $\mathbb{Z}_{13}$.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 7 \\ 2 & 5 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Cvičení 4.2. *Zjednodušte výraz*

$$\left((A + 2(B^T C + A))^T + 2AB^T + A(3B - 4C)^T\right)^T \ ,$$

a určete jaké musí mít matice A, B, C typy, aby byl výraz definován.

Cvičení 4.3. *Spočítejte mocniny reálných matic*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^9 , \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^5$$

Cvičení 4.4. *Vyřešte maticovou rovnici nad* $\mathbb{Z}_3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cvičení 4.5. *Najděte všechny reálné čtvercové matice* X*, pro které platí* $XA = AX$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 4.6. *Rozhodněte, zda jsou dané komplexní matice regulární.*

$$\begin{pmatrix} 1+3i & -40 & 2+3i & 7-i \\ 2i+5 & 1+i & 1-i & 1-i \\ 4i+6 & 66i & -37i+12 & 12 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} i & 1+i & 1-i \\ 1+i & 2 & -i \\ -i & -2i & 1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 4.7. *K matici* A *nad tělesem* $\mathbb{Z}_5$ *najděte inverzní, pokud existuje.*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 4.8. *Řešte maticovou rovnici* $AXB = C$*, kde* A, B, C *jsou reálné.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Cvičení 4.9. *Spočítejte* $((A^{-1}B)^{-1}C)^{-1}C$*, kde* A, B, C *jsou reálné matice.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Cvičení 4.10. *Vyjádřete matici* A *nad* $\mathbb{Z}_7$ *jako součin elementárních matic, pokud to jde.*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Cvičení 4.11. *Najděte* LU *rozklad reálné matice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

5 Lineární prostory

Cvičení 5.1. *Zjistěte, zda množina vektorů*

(a) $\{(x+y, 1+x, 2+y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

(b) $\{(x+2y, 3x, 2x+y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

(c) $\{(x+1, y+1, z+1) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$

(d) $\{(x^3, x^2, x) : x \in \mathbb{R}\}$

je podprostorem $\mathbb{R}^3$.

Cvičení 5.2. *Zjistěte, zda vektor* $(1,3,2,i)^T$ *leží v lineárním obalu vektorů* $(1, 1, 0, 3)^T$, $(i,1,1,0)^T$, $(i,i,2,3)^T \in \mathbb{C}^4$

Cvičení 5.3. *Vyjádřete vektor* $(1,2,3)^T$ *jako lineární kombinaci vektorů* $(1, 1, 0)^T$, $(0,1,1)^T$, $(2,3,4)^T \in \mathbb{Z}_5^3$.

Cvičení 5.4. *Zjistěte, zda množina* $\{(1,2,3)^T, (4,5,6)^T, (1,2,0)^T\}$ *generuje* $\mathbb{R}^3$.

Cvičení 5.5. *Najděte* $\operatorname{Ker} A$ *pro následující matici nad* $\mathbb{Z}_5$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 5.6. *Zjistěte, zda* $(1,2,3)^T \in \mathbb{Z}_5^3$ *leží v* $\operatorname{Im} A^T$ *a zda* $(3,4)^T \in \mathbb{Z}_5^2$ *leží v* $\operatorname{Im} A$ *pro matici* A *nad* Z_5.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Cvičení 5.7. *Zjistěte, zda jsou posloupnosti vektorů ze* $\mathbb{Z}_3^4$ *lineárně závislé nebo nezávislé. Pokud jsou lineárně závislé, vyjádřete jeden z vektorů jako lineární kombinaci ostatních.*

(a) $((2,1,0,2)^T, (1,1,2,2)^T, (1,0,1,2)^T, (2,2,1,2)^T)$

(b) $((1,2,0,1)^T, (2,2,1,1)^T, (2,0,2,1)^T, (1,1,2,1)^T)$

Cvičení 5.8. *Najděte nějakou bázi podprostoru* V *prostoru* $\mathbb{C}^3$.

$$V = \left\langle (1+i, 1-i, 1+i)^T, (1-i, 1+3i, i-1)^T, (1, 1+i, i)^T \right\rangle$$

Cvičení 5.9. *Najděte (nějaké) báze prostorů* $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Ker} A^T$, $\operatorname{Im} A$ *a* $\operatorname{Im} A^T$ *pro matici* A *nad* $\mathbb{Z}_5$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 5.10. *Určete dimenze* $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Ker} A^T$, $\operatorname{Im} A$ *a* $\operatorname{Im} A^T$ *pro matici* A *nad* $\mathbb{Z}_5$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 5.11. *Z vektorů* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^4$ *vyberte nějakou bázi jejich lineárního obalu.*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 17 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -16 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Cvičení 5.12. *Zjistěte zda* $B = ((2,1,3)^T, (-3,1,-2)^T, (5,-2,4)^T)$ *je bází* $\mathbb{R}^3$ *a pokud ano, najděte souřadnice vektoru* $(-10,7,-4)^T$ *vzhledem k* B.

Cvičení 5.13. *Ověřte, že vektor* $\mathbf{u}$ *leží v podprostoru* $V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ *prostoru* $\mathbb{Z}_5^4$*, ověřte, že* $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ *je bází* V *a najděte* $[\mathbf{u}]_B$.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cvičení 5.14. *Určete matici přechodu od báze* B *prostoru* $\mathbb{Z}_7^3$ *k bázi* C.

$$B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right), \quad C = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

Cvičení 5.15. *Ověřte, že* B *a* C *jsou báze prostoru* $\mathbf{V} \leq \mathbb{R}^3$ *a najděte matici přechodu od* B *k* C.

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right), C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

Cvičení 5.16. *Souřadnice vektoru* $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}_7^3$ *vzhledem k bázi* B *jsou* $(x_1, x_2, x_3)^T$. *Určete* $[\mathbf{u}]_C$*, je-li*

$$B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right), \quad C = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \quad .$$

Cvičení 5.17. *Určete bázové sloupce matice* A *nad* $\mathbb{Z}_7$ *a vyjádřete ostatní sloupce jako lineární kombinaci bázových.*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 5.18. *Určete hodnost komplexní matice* A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2+2i & 2i & 1 \\ 1-i & 1+3i & i-1 & 0 \\ 1+i & 1-i & 1+i & 1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 5.19. *Najděte skeletní rozklad matice A nad $\mathbb{Z}_5$.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Cvičení 5.20. *Určete dimenzi průniku a součtu podprostorů $U, V \leq \mathbb{R}^3$.*

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Cvičení 5.21. *Zjistěte, zda $\mathbb{R}^3 = U + V$, kde*

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

6 Lineární zobrazení

Cvičení 6.1. *Lineární zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ je dáno předpisem*

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} .$$

Určete matici f vzhledem k bázím B a C.

$$B = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad C = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

Cvičení 6.2. *Matice lineárního zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ vzhledem k bázím B a C je A. Určete $f((x_1, x_2, x_3)^T)$.*

$$B = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right), C = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right), A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

Cvičení 6.3. *Lineární zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ splňuje*

$$f \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Určete jeho matici vzhledem ke kanonickým bázím.

Cvičení 6.4. *Matice* $f : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^2$ *vzhledem k bázím* B *a* C *je* A. *Určete matici* f *vzhledem k* D *a* E.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right), C = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right),$$

$$D = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right), E = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Cvičení 6.5. *Matice* $f : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^2$ *vzhledem k bázím* B *a* C *je* A. *Určete souřadnice* $f(\mathbf{u})$ *vzhledem bázi* E, *víte-li, že souřadnice* $\mathbf{u}$ *vzhledem k bázi* D *jsou* $(x_1, x_2)^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right), C = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right),$$

$$D = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right), E = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Cvičení 6.6. *Matice* $f : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^2$ *vzhledem k bázím* B *a* C *je* A. *Určete, zda* f *je automorfismus a najděte matici* f^{-1} *vzhledem k* D *a* E.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad C = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right),$$

$$D = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad E = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Cvičení 6.7. *Matice* $f : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^2$ *vzhledem k bázím* B *a* C *je* A, *matice* $g : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^2$ *vzhledem k bázím* D *a* E *je* X. *Určete matici* fg *vzhledem ke kanonickým bázím.*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$C = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right), \quad D = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad E = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Cvičení 6.8. *Matice* $f : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^2$ *vzhledem k bázím* B *a* C *je* A, *matice* $g : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^2$ *vzhledem k bázím* D *a* E *je* X. *Určete matici* $f + 2g$ *vzhledem ke kanonickým bázím.*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$C = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right), \quad D = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad E = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Cvičení 6.9. *Matice $f : \mathbb{Z}_2^4 \to \mathbb{Z}_2^3$ vzhledem k bázím B a C je A. Určete jádro a obraz f.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$C = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

7 Determinant

Cvičení 7.1. *Najděte redukovaný cyklický zápis permutace $\alpha^{-1}\beta\gamma^{-1}$, kde permutace α, β, $\gamma \in S_8$ jsou dány tabulkami.*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 3 & 8 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 & 6 & 7 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Cvičení 7.2. *Najděte redukovaný cyklický zápis permutace $\alpha^{-1}\beta\gamma^{-1}$, kde permutace α, β, $\gamma \in S_8$ jsou dány redukovaným cyklickým zápisem.*

$$\alpha = (1\ 7\ 3\ 4)(2\ 5\ 6), \quad \beta = (2\ 8\ 7\ 5\ 3)(4\ 6), \quad \gamma = (3\ 4)(1\ 8)(2\ 6)$$

Cvičení 7.3. *Najděte všechny permutace $\pi \in S_8$, pro které $\alpha^{-1}\pi\beta = \gamma^{-1}$, kde*

$$\alpha = (1\ 7\ 3\ 4)(2\ 5\ 6), \quad \beta = (2\ 8\ 7\ 5\ 3)(4\ 6), \quad \gamma = (3\ 4)(1\ 8)(2\ 6)$$

Cvičení 7.4. *Vyjádřete permutaci $\rho \in S_8$ danou tabulkou jako složení transpozic.*

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix},$$

Cvičení 7.5. *Určete znaménko permutací α, β, γ a $\gamma\beta^{-1}\alpha$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in S_8$ jsou dány tabulkami.*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 3 & 8 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 & 6 & 7 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Cvičení 7.6. *Vypište všechny sudé a všechny liché permutace v S_4 (v redukovaném cyklickém zápisu).*

Cvičení 7.7. *Spočítejte determinanty následujících matic nad* $\mathbb{Z}_7$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Cvičení 7.8. *S jakým znaménkem vystupují v determinantu matice* $A = (a_{ij})_{7\times 7}$ *sčítanci*

$$a_{31}a_{72}a_{43}a_{14}a_{25}a_{56}a_{67}, \quad a_{24}a_{71}a_{56}a_{35}a_{47}a_{12}a_{63} \ ?$$

Cvičení 7.9. *Spočítejte determinant matice* A *nad* $\mathbb{Z}_7$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Cvičení 7.10. *V závislosti na parametrech* $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n \in \mathbb{R}$ *spočítejte determinant matice* A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 & 0 \\ c & d & e & 0 & f \\ 0 & g & 0 & 0 & 0 \\ h & i & j & k & l \\ m & n & l & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cvičení 7.11. *Užitím Cramerova pravidla spočítejte druhou složku řešení soustavy rovnic (nad* $\mathbb{R}$*)*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) .$$

Cvičení 7.12. *Určete* $\operatorname{adj}(A)$ *a* A^{-1} *pro reálnou matici* A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$