- JE $A = k \times k \times k$ ZÁKLADNÍ ALGEBRA?
- MÁME PRIMITIVNÍ IDEMPOTENTY $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$

$$P_1 = e_1 A = k \times 0 \times 0, \quad P_2 = 0 \times k \times 0, \quad P_3 = 0 \times 0 \times k$$

- ODPOVĚĎ: A JE ZÁKLADNÍ A $P_i \not\cong P_j$ PRO $i \neq j$.

ISO PRAVÝCH A-MODULŮ

- JAK VYPADAJÍ PRO OBECNOU ALGEBRU A A IDEMPOTENTY $e, f \in A$ HOMOMORFISMY

$$\varphi: eA \longrightarrow fA$$
$$e \longmapsto f \cdot a$$
$$e \cdot b \longmapsto f \cdot a \cdot b$$
$$e = e \cdot e \longmapsto \underbrace{f \cdot a \cdot e}_{\in fAe}$$

URČUJE φ

$(\varphi(e \cdot b) = \varphi(e) \cdot b = f \cdot a \cdot b)$

$\boxed{\text{DOSADÍME } b = e}$

- MÁME ZTOTOŽNĚNÍ $\mathrm{Hom}_A(eA, fA) \cong fAe$

$$\varphi \longmapsto \varphi(e)$$
$$(b \mapsto xb) \longleftarrow fae = x$$

- SPECIÁLNĚ PRO $A = k \times k \times k$ A TŘEBA $e = e_1, f = e_2$: $\mathrm{Hom}(e_1 A, e_2 A) \cong e_2 A e_1 = \{(0,0,0)\}$

- PŘ: NEZÁKLADNÍ ALGEBRA:

$$A = M_3(K) = \begin{pmatrix} K & K & K \\ K & K & K \\ K & K & K \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = e_1 A = \begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = e_2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K & K & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = e_3 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K & K & K \end{pmatrix}$$

← JEDNODUCHÉ PROJEKTIVNÍ MODULY!

$$\mathrm{Hom}_A(P_1, P_2) \cong e_2 A e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cong K$$

(TJ. MÁME 1-DIM. PROSTOR HOMOMORFISMŮ)

$$\rightsquigarrow \quad P_1 \xrightarrow{\cong} P_2$$

$$M \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot M$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- A KON. DIM. NAD TĚLESEM $k = \overline{k}$

$$\Rightarrow \quad A/\mathrm{rad}(A) \cong \prod_{j=1}^{\ell} M_{i_j}(k) = M_{i_1}(k) \times \dots \times M_{i_\ell}(k)$$

- A KOMUTATIVNÍ $\Rightarrow$ $\dfrac{A}{\mathrm{rad}(A)}$ KOMUTATIVNÍ $\Rightarrow$ $i_1 = \dots = i_\ell = 1$ $\Rightarrow$ $\dfrac{A}{\mathrm{rad}(A)}$ ZÁKLADNÍ

$\Downarrow$

A ZÁKLADNÍ

- PRO $k \neq \overline{k}$ OBECNĚ

$$A/\mathrm{rad}(A) \cong M_{i_1}(D_1) \times \dots \times M_{i_\ell}(D_\ell) \quad , \quad D_i = \text{NEKOMUTATIVNÍ TĚLESO A } \dim_k D_i < \infty$$

- OPĚT PRO A KOMUTATIVNÍ JE NUTNĚ $\dfrac{A}{\mathrm{rad}(A)}$ KOMUTATIVNÍ

$\Rightarrow$ $i_1 = \dots = i_\ell = 1$ & $D_1, \dots, D_\ell$ KOMUTATIVNÍ

$\Rightarrow$ $\dfrac{A}{\mathrm{rad}\, A} \cong D_1 \times \dots \times D_\ell$ ZÁKLADNÍ $\xRightarrow{\text{PŘEDNÁŠKA}}$ A ZÁKLADNÍ