Teorie reprezentací konečně dimenzionálních algeber (NMAG 442)

Jan Šťovíček

4. června 2021

Katedra algebry MFF UK

Table of contents

Coxeterova transformace

Coxeterova transformace – připomenutí [Kra, §4.4]

Definice

Buď Q toulec s přípustným uspořádáním vrcholů

$Q_0 = \{1, 2, \ldots, n\}$, tj. $(\exists \alpha \colon i \to j) \implies (i > j)$.

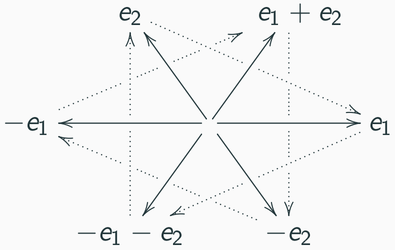
Pak Coxeterovou transformací rozumíme automorfismus grupy

$$c \colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n, \quad x \mapsto \sigma_n \cdots \sigma_2 \sigma_1(x).$$

Příklad

Je-li $Q = (2 \to 1)$, pak

$$c = \sigma_2\sigma_1 \colon e_2 \mapsto e_1, \quad e_1 \mapsto -e_1 - e_2.$$



Lemma ([Kra, Lemma 4.4.3])
Buď $x \in \mathbb{Z}^n$. Pak $c(x) = x$, právě když $x \in \operatorname{rad} q$.

Důkaz.
Všimněme si, že pro každé $x \in \mathbb{Z}^n$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

- $c(x) = x$,
- $x_i = \sigma_i(x)_i \ \big(= x_i - (x, e_i)\big)$ pro každé $i \in Q_0$,
- $(x, e_i) = 0$ pro každé i. $\square$

Coxeterova transformace a kladnost kořenů [Kra, §4.4]

- Je-li Q Dynkinův, pak $c\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ permutuje konečnou množinu Δ.
- Speciálně pro každé i existuje $h_i > 0$ takové, že $c^{h_i}(e_i) = e_i$.
- Odtud plyne, že $c^h = 1_{\mathbb{Z}^n}$ pro nějaké $h > 0$. Nejmenší takové h se nazývá Coxeterovo číslo.

Lemma ([Kra, Lemma 4.4.4])
Je-li Q Dynkinův a $x \in \mathbb{Z}^n$, pak existuje $\exists r \geq 0$ takové, že $c^r(x)$ není kladné.

Důkaz.

- Položme $y = \sum_{r=0}^{h-1} c^r(x)$.
- Pak $c(y) = y$, tedy $y \in \operatorname{rad} q = \{0\}$.
- To znamená, že $c^r(x)$ není kladné pro nějaké $0 \leq r < h$. $\square$

Systematické hledání kořenů pro Dynkinovy diagramy

- Buď Q Dynkinův toulec s přípustně uspořádanými vrcholy $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ a x kladný kořen.
- Buď $0 \leq r < h$ a $1 \leq s \leq n$ nejmenší celá čísla taková, aby

$$\sigma_s \sigma_{s-1} \cdots \sigma_1 (\sigma_n \cdots \sigma_2 \sigma_1)^r (x) < 0.$$

- Pak nutně $\sigma_{s-1} \cdots \sigma_1 (\sigma_n \cdots \sigma_2 \sigma_1)^r (x) = e_s$ pro nějaké $s \in Q_0$ (e_s je jediný kladný kořen, který σ_i pošle na záporný).
- Tedy každý kladný kořen lze zapsat ve tvaru

$$(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n)^r \sigma_1 \cdots \sigma_{s-1} (e_s),$$

kde všechny kořeny

$$\sigma_t \cdots \sigma_n (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n)^{r'} \sigma_1 \cdots \sigma_{s-1} (e_s)$$

pocházející z kratších složenin reflexí jsou také kladné!

Coxeterovy funktory

Coxeterovy funktory [Kra, §3.4]

- Buď Q toulec s přípustně uspořádanými vrcholy $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$.
- Připomenutí: Pro každé $i \in Q_0$ je i stok v toulci $\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1 Q$.
- Pak definujeme Coxeterovy funktory $C^- \colon \operatorname{Rep}_K(Q) \rightleftarrows \operatorname{Rep}_K(Q) \colon C^+$ jako složení

$$C^- \colon \operatorname{Rep}_K(Q) \underset{S_n^+}{\overset{S_n^-}{\rightleftarrows}} \operatorname{Rep}_K(\sigma_{n-1} \cdots \sigma_1 Q) \underset{S_{n-1}^+}{\overset{S_{n-1}^-}{\rightleftarrows}} \cdots$$

$$\cdots \underset{S_3^+}{\overset{S_3^-}{\rightleftarrows}} \operatorname{Rep}_K(\sigma_2 \sigma_1 Q) \underset{S_2^+}{\overset{S_2^-}{\rightleftarrows}} \operatorname{Rep}_K(\sigma_1 Q) \underset{S_1^+}{\overset{S_1^-}{\rightleftarrows}} \operatorname{Rep}_K(Q) \colon C^+$$

Nezávislost na volbě přípustného uspořádání vrcholů

Lemma ([Kra, Lemma 3.4.1])
Funktory $C^{\pm}\colon \mathrm{Rep}_K(Q) \to \mathrm{Rep}_K(Q)$ nezávisí na konkrétní volbě přípusného uspořádání vrcholů Q.

Důkaz.

- Klíčové pozorování: Máme-li dva stoky $i \neq j$ v Q, pak $S_i^+ S_j^+ = S_j^+ S_i^+$.
- Předpokládejme, že $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ je přípustně uspořádaná a $Q_0 = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ je jiné přípustné uspořádání.
- Jelikož i_1 je nutně stok, platí podle výše uvedeného
$$S_{i_1}^+ S_{i_1-1}^+ \cdots S_1^+ = S_{i-1}^+ \cdots S_1^+ S_{i_1}^+,$$
tj.
$$S_n^+ \cdots S_1^+ = S_n^+ \cdots \widehat{S_{i_1}^+} \cdots S_1^+ S_{i_1}^+.$$
- Podobně $S_n^+ \cdots \widehat{S_{i_1}^+} \cdots S_1^+ S_{i_1}^+ = S_n^+ \cdots \widehat{S_{i_1}^+} \cdots \widehat{S_{i_2}^+} \cdots S_1^+ S_{i_2}^+ S_{i_1}^+$ atd. $\square$

Projektivní moduly jako iterované reflexe jednoduchých

Lemma ([Kra, Lemma 3.4.2(1)])
Buď Q toulec s přípustně uspořádanými vrcholy $Q_0 = \{1, 2, \ldots, n\}$. Pak pro každé $i \in Q_0$ platí, že $\underline{\dim} P(i) = \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}(e_i)$ a $\underline{\dim} I(i) = \sigma_n \cdots \sigma_{i+1}(e_i)$.

Důkaz.

- Toto dostaneme přímým výpočtem:

$$\begin{aligned}
\sigma_{i-1}(e_i) &= e_i - (e_i, e_{i-1})e_{i-1} = e_i + \left|\{\alpha : i \to i{-}1\}\right| \cdot e_{i-1}, \\
\sigma_{i-2}\sigma_{i-1}(e_i) &= \sigma_i(e_i) - (\sigma_i(e_{i-1}), e_{i-2})e_{i-2} \\
&= e_i - (e_i, e_{i-1})e_{i-1} \\
&\quad - (e_i, e_{i-2})e_{i-2} + (e_i, e_{i-1})(e_{i-1}, e_{i-2})e_{i-2} \\
&= e_i + \left|\{\alpha : i \to i{-}1\}\right| \cdot e_{i-1} + \left|\{\alpha : i \rightsquigarrow i{-}2\}\right| \cdot e_{i-2}.
\end{aligned}$$

- Obecně indukcí dostaneme pro každé $0 \leq \ell \leq i-1$, že

$$\sigma_{i-\ell} \cdots \sigma_{i-1}(e_i) = \sum\nolimits_{j=0}^{\ell} \left|\{\alpha : i \rightsquigarrow i{-}\ell\}\right| \cdot e_{i-\ell}. \qquad \square$$

Projektivní moduly jako iterované reflexe jednoduchých – pokr.

Lemma ([Kra, Lemma 3.4.2(2)])
Buď Q toulec s přípustně uspořádanými vrcholy $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$. Pak pro každé $i \in Q_0$ platí, že

1. $P(i) \cong S_1^- \cdots S_{i-1}^-\big(S(i)\big)$ (kde $S(i) \in \mathrm{rep}_K(\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1 Q)$),
2. $I(i) \cong S_n^+ \cdots S_{i+1}^+\big(S(i)\big)$ (kde $S(i) \in \mathrm{rep}_K(\sigma_{i+1} \cdots \sigma_n Q)$).

Důkaz.

- Už víme, že $\underline{\dim} P(i) = \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}(e_i)$.
- Tedy pro každé $0 \leq \ell \leq i-1$:

$$\underline{\dim} S_\ell^+ \cdots S_1^+\big(P(i)\big) = \sigma_{\ell+1} \cdots \sigma_{i-1}(e_i).$$

- Speciálně (pro $\ell = i-1$) máme $\underline{\dim} S_{i-1}^+ \cdots S_1^+\big(P(i)\big) = e_i$, tj.

$$S_{i-1}^+ \cdots S_1^+\big(P(i)\big) \cong S(i).$$

- Odtud už $P(i) \cong S_1^- \cdots S_{i-1}^-\big(S(i)\big)$. $\square$

Nerozložitelné moduly anihilované Coxeterovými funktory

Tvrzení ([Kra, Proposition 3.4.3])
Buď Q konečný acyklický toulec, K těleso a $M \in \mathit{ind}\text{-}KQ$.

1. $C^+(M) = 0$, právě když M je projektivní. Je-li M neprojektivní, pak $C^-C^+(M) \cong M$ a $\underline{\dim} C^+(M) = c(\underline{\dim} M)$.
2. $C^-(M) = 0$, právě když M je injektivní. Je-li M neinjektivní, pak $C^+C^-(M) \cong M$ a $\underline{\dim} C^-(M) = c^{-1}(\underline{\dim} M)$.

Důkaz.

- Buď $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ přípustné uspořádání.
- Předpokládejme, že $C^+(M) = 0$, a buď $1 \leq i \leq n$ nejmenší takové, že $S_i^+ \cdots S_1^+(M) = 0$.
- Pak $S_{i-1}^+ \cdots S_1^+(M) \cong S(i)$, čili
$$M \cong S_1^- \cdots S_{i-1}^-\big(S(i)\big) \cong P(i).$$
- V opačném případě $C^-C^+(M) \cong M$ a $\underline{\dim} C^+(M) = c(\underline{\dim} M)$ podle věty o reflexních funktorech. $\square$

Akce Coxeterových funktorů na nerozložitelných modulech

Důsledek
Buď Q konečný acyklický toulec. Pak funktory C^+ a C^- indukují vzájemně inverzní bijektivní korespondence mezi

1. třídami isom. nerozložitelných neprojektivních reprez. Q a
2. třídami isom. nerozložitelných neinjektivních reprez. Q.

Navíc $\underline{\dim} C^{\pm}(M) = c^{\pm 1}(\underline{\dim} M)$ pro nerozložitelnou M neprojektivní (pro C^+) respektive neinjektivní (pro C^-) reprez.

Příklad
Buď $Q = (3 \to 2 \to 1)$. Pak

$$\begin{tikzcd}
 & & (K \xrightarrow{1} K \xrightarrow{1} K) & & \\
 & (0 \to K \xrightarrow{1} K) & & (K \to K \xrightarrow{1} 0) \arrow[ll, dotted, "C^+"'] & \\
(0 \to 0 \to K) & & (0 \to K \to 0) \arrow[ll, dotted, "C^+"'] & & (K \to 0 \to 0) \arrow[ll, dotted, "C^+"']
\end{tikzcd}$$

Lemma ([Kra, Lemma 4.4.1])
Buď Q konečný acyklický toulec ($n = |Q_0|$) a K těleso.

- $c(\underline{\dim} P(i)) = -\underline{\dim} I(i)\ \forall\, i \in Q_0$ (vizte [ASS, Lem. III.3.16]!)
- $\{\underline{\dim} P(i) \mid i \in Q_0\}$ a $\{\underline{\dim} I(i) \mid i \in Q_0\}$ jsou báze $\mathbb{Z}^n$.

Důkaz.

1. $c(\underline{\dim} P(i)) = c\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}(e_i) = \sigma_n \cdots \sigma_{i+1}\sigma_i(e_i) = -\sigma_n \cdots \sigma_{i+1}(e_i) = -\underline{\dim} I(i)$.
2. Pro každé $i \in Q_0$ máme $e_i = \underline{\dim} P(i) - \sum_{\alpha\colon i \to j} \underline{\dim} P(j)$, protože $\operatorname{rad} P(i) \cong \bigoplus_{\alpha\colon i \to j} P(j)$. Podobně pro injektivní moduly. $\square$

Důsledek
Coxeterova transformace $c = \sigma_n \cdots \sigma_2 \sigma_1 \colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ nezávisí na volbě přípustného uspořádání vrcholů toulce Q.

Preprojektivní a preinjektivní reprezentace

Preprojektivní a preinjektivní reprezentace [Kra, §3.5]

Značení
Buď K těleso a Q konečný acyklický toulec a $r \in \mathbb{Z}$. Položíme

$$C^r = \begin{cases} (C^+)^r & \text{if } r > 0, \\ 1_{\mathrm{Rep}_K(Q)} & \text{if } r = 0, \\ (C^-)^{|r|} & \text{if } r < 0. \end{cases}$$

Definition
Nerozložitelnou reprezentaci M toulce Q nad K nazveme

1. preprojektivní, pokud $M \cong C^r P(i)$ pro nějaké $i \in Q_0$ a $r \leq 0$,
2. preinjektivní, pokud $M \cong C^r I(i)$ pro nějaké $i \in Q_0$ a $r \geq 0$,
3. regulární jinak (ekvivalentně: $C^r(M) \neq 0 \; \forall r \in \mathbb{Z}$).

Příklady

Příklad

Buď $Q = (1 \to 2 \to 3)$. Pak je každá nerozložitelná reprezentace preprojektivní i preinjektivní zároveň (mj. tedy nejsou regulární reprezentace):

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & (K \xrightarrow{1} K \xrightarrow{1} K) & & \\
 & (0 \to K \xrightarrow{1} K) & & (K \to K \xrightarrow{1} 0) \arrow[ll, dotted, "C^{+}"'] & \\
(0 \to 0 \to K) & & (0 \to K \to 0) \arrow[ll, dotted, "C^{+}"'] & & (K \to 0 \to 0) \arrow[ll, dotted, "C^{+}"']
\end{tikzcd}$$

Příklad

Buď $Q = (2 \rightrightarrows 1)$ tzv. Kroneckerův toulec, $(0,0) \neq (\lambda, \mu) \in K \times K$ a $M = \left(K \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightrightarrows}} K\right)$. Pak přímým výpočtem dostaneme, že $C^{\pm}M \cong M$, tedy M je regulární nerozložitelná reprezentace.

Reprezentace určené dimenzním vektorem

Tvrzení ([Kra, Proposition 3.5.2])
Buď K toulec a Q konečný acyklický toulec. Jsou-li M, N nerozložitelné reprezentace a M je preprojektivní nebo preinjektivní, pak

$$M \cong N \quad \iff \quad \underline{\dim} M = \underline{\dim} N.$$

Důkaz.

- Uvažujme M preprojektivní, tj. $M \cong C^r P(i)$ pro nějaké $i \in Q_0$ a $r \leq 0$.
- Pokud $\underline{\dim} M = \underline{\dim} N$, potom

$$\underline{\dim} N = (\sigma_1 \cdots \sigma_n)^r \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}(e_i).$$

- Speciálně $S_{i-1}^{+} \cdots S_1^{+} C^{-r}(N) \cong S(i)$, a proto

$$N \cong C^r S_1^{-} \cdots S_{i-1}^{-}\big(S(i)\big) \cong C^r P(i) \cong M. \qquad \square$$

Konečný reprezentační typ

Gabrielova věta

Věta (Gabriel) [Kra, Theorem 5.1.1 and Corollary 5.3.3]
Buď K těleso a Q konečný souvislý toulec. Pak platí:

1. V $\mathrm{rep}_K(Q)$ existuje pouze konečně mnoho tříd isomorfismů nerozložitelných reprezentací, právě když Q je Dynkinův toulec.
2. Pokud Q je Dynkinův toulec, pak přiřazení $M \mapsto \underline{\dim} M$ určuje bijekci

$$\left\{\begin{matrix}\text{nerozložitelné}\\ \text{reprezentace } Q\end{matrix}\right\} / \cong \quad \longleftrightarrow \quad \left\{\begin{matrix}\text{kladné}\\ \text{kořeny } Q\end{matrix}\right\}$$

Dynkinův případ

- Buď Q Dynkinův toulec.
- Je-li $M \in \mathit{ind}\text{-}Q$, uvažujme nejkratší výraz takový, že
$$\sigma_i \sigma_{i-1} \cdots \sigma_1 (\sigma_n \cdots \sigma_2 \sigma_1)^r (\underline{\dim} M) < 0$$
- Pak $\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1 c^r(\underline{\dim} M) = e_i$, tj. $S_{i-1}^+ \cdots S_1^+ C^r(M) \cong S(i)$.
- Odtud plyne, že $M \cong C^{-r}P(i)$ je preprojektivní (a podobnou úvahou i preinjektivní). Už víme, že preprojektivní nerozložitelné reprezentace jsou až na isomorfismus určeny dimenzními vektory.
- Na druhou stranu, každý kladný kořen $x \in \mathbb{Z}^n$ lze vyjádřit jako $c^{-r}\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}(e_i)$ pro nějaké $i \in Q_0$ a $r \geq 0$ tak, že všechny mezivýpočty jsou také kladné kořeny.
- Odtud plyne, že $\underline{\dim} M = x$ pro $M = C^{-r}P(i)$.

Ostatní případy

- Protože každý toulec, který není Dynkinův, má eukleidovský podtoulec, stačí ukázat, že eukleidovské toulce mají nekonečně mnoho nerozložitelných reprezentací.
- Metoda 1: Najdeme ∞ regulárních reprezentací.
- Pro jednoduchost předpokládejme, že těleso K je nekonečné. Pak pro Dynkinovy toulce typů $\tilde{A}$ a $\tilde{D}$ můžeme vzít například

$$\tilde{A}_n: \quad \begin{tikzcd}
 & & K \arrow[dll, dash, "1"'] \arrow[drr, dash, "\lambda"] & & \\
K \arrow[r, dash, "1"'] & K \arrow[r, dash, "1"'] & \cdots \arrow[r, dash, "1"'] & K \arrow[r, dash, "1"'] & K,
\end{tikzcd}
\qquad
\tilde{D}_n: \quad \begin{tikzcd}
K \arrow[dr, dash, "(1\ \lambda)"] & & & & K \arrow[dl, dash, "(1\ 1)"'] \\
 & K^2 \arrow[r, dash, "1"] & \cdots \arrow[r, dash, "1"] & K^2 & \\
K \arrow[ur, dash, "(0\ 1)"'] & & & & K. \arrow[ul, dash, "(1\ 0)"]
\end{tikzcd}$$

- Metoda 2: Ukážeme, že pro Q acyklický existuje ∞ preprojektivních (i preinjektivních) reprezentací ([Kra, Theorem 5.3.1]).