

Teorie reprezentací konečně dimenzionálních algeber (NMAG 442)

Jan Šťovíček

1. června 2021

Katedra algebry MFF UK

Table of contents

Reflexe a reflexní funktory

Kořenové systémy

Coxeterova transformace

Reflexe a reflexní funktory

Připomenutí [Kra, §§3.2 a 3.3]

- Pro konečný toulec Q bez smyčky ve vrcholu i definujeme **reflexi** $\sigma_i: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$,

$$x \mapsto x - 2 \frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i = x - (x, e_i) e_i.$$

► použití (Coxeterova transformace)

- Je-li $i \in Q_0$ stok a $Q' := \sigma_i Q$, pak máme aditivní funktory $S_i^-: \text{Rep}_K(Q') \rightleftharpoons \text{Rep}_K(Q): S_i^+$, kde S_i^+ je definovaný pomocí posloupnosti $0 \rightarrow M'_i \xrightarrow{(f'_\alpha)} \bigoplus_{(\alpha: j \rightarrow i) \in Q_1} M_j \xrightarrow{(f_\alpha)} M_i$,



Vlastnosti reflexních funktorů [Kra, §3.3]

- Uvažujme opět Q se stokem $i \in Q_0$, $Q' := \sigma_i Q$ a

$$S_i^- : \text{Rep}_K(Q') \rightleftarrows \text{Rep}_K(Q) : S_i^+.$$

- Pak máme přirozené homomorfismy

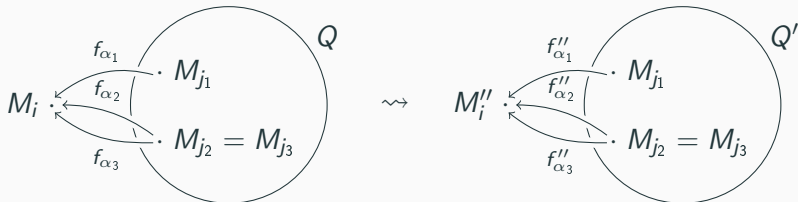
$$\iota_i : S_i^- S_i^+(M) \rightarrow M, \quad \text{a} \quad \pi_i : N \rightarrow S_i^+ S_i^-(N).$$

- Je-li totiž $M \in \text{Rep}_K(Q)$, pak máme exaktní posloupnosti

$$0 \rightarrow M'_i \xrightarrow{(f'_\alpha)} \bigoplus_{(\alpha: j \rightarrow i) \in Q_1} M_j \xrightarrow{(f_\alpha)} M_i \text{ a}$$

$$0 \rightarrow M'_i \xrightarrow{(f'_\alpha)} \bigoplus_{(\alpha: j \rightarrow i) \in Q_1} M_j \xrightarrow{(f''_\alpha)} M''_i \rightarrow 0,$$

kde $M''_i \rightarrow M_i$ a $S_i^+ S_i^-$ zobrazuje



Lemma ([Kra, Lemma 3.3.2])

1. $M \cong (S_i^- S_i^+(M)) \oplus \text{Coker } \iota_i$ a
Coker ι_i je direktní suma kopií jednoduché reprezentace $S(i)$.
2. $N \cong (S_i^+ S_i^-(N)) \oplus \text{Ker } \pi_i$ a
Ker π_i je direktní suma kopií jednoduché reprezentace $S(i)$.
3. Pokud $M \in \text{rep}_K(Q)$ a M nemá direktní sumandy isomorfní $S(i)$, pak $\underline{\dim} S_i^+(M) = \sigma_i(\underline{\dim} M)$.
4. Pokud $N \in \text{rep}_K(Q')$ a N nemá direktní sumandy isomorfní $S(i)$, pak $\underline{\dim} S_i^-(N) = \sigma_i(\underline{\dim} N)$.

Lemma ([Kra, Lemma 3.3.3])

Bud' Q toulec, $i \in Q_0$ stok a $M = (M_j, f_\alpha) \in \text{rep}_K(Q)$

nerozložitelná. Pak NPJE:

1. $M \not\cong S(i)$.
2. $S_i^+(M) \neq 0$.
3. $S_i^+(M)$ je nerozložitelná.
4. $S_i^- S_i^+(M) \cong M$.
5. Zobrazení $(f_\alpha): \bigoplus_{\alpha: j \rightarrow i} M_j \rightarrow M_i$ je na.
6. $\sigma_i(\underline{\dim} M) > 0$.
7. $\sigma_i(\underline{\dim} M) = \underline{\dim} S_i^+(M)$.

Theorem ([Kra, Theorem 3.3.5])

Bud' Q toulcec se stokem $i \in Q_0$ a položme $Q' = \sigma_i Q$. Pak funktoři S_i^+ a S_i^- dávají vzájemně inverzní bijekce mezi

1. isomorfními třídami nerozložitelných reprezentací Q a
2. isomorfními třídami nerozložitelných reprezentací Q' ,

a to s výjimkou reprezentace $S(i)$ (jak nad Q , tak nad Q'), kterou naopak oba funktoři anihilují.

Navíc $\underline{\dim} S^\pm M = \sigma_i(\underline{\dim} M)$ pro libovolnou konečně dimenzionální nerozložitelnou reprezentaci $M \not\cong S(i)$ libovolného z těchto toulců.

Kořenové systémy

Kořeny [Kra, §4.3]

- Buď Γ Dynkinův nebo eukleidovský diagram a $(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$, kde

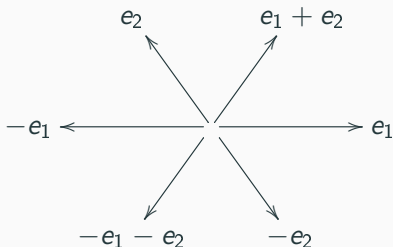
$$q(x) = \sum_{i \in \Gamma_0} x_i^2 - \sum_{i \leq j} d_{ij} x_i x_j = \frac{1}{2}(x, x)$$

jako dříve.

- Položíme $\Delta = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid q(x) \leq 1\}$.
- **Kořenem** rozumíme nenulový prvek množiny Δ .
- **Význam**: Je-li Q acyklický toulec, který vznikl orientováním hran diagramu Γ , ukáže se, že kladné kořeny jsou přesně dimenzní vektory nerozložitelných konečně generovaných KQ -modulů.
- Pozorování: e_i je kořen pro každý vrchol $i \in \Gamma_0$.
- Pozorování: $x \in \Delta \iff -x \in \Delta$.

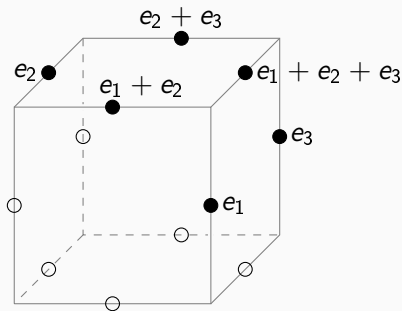
Příklad: Dynkinův diagram A_2

- Vezměme $\Gamma = A_2 = (2 - 1)$, tj.
 $q(x) = \frac{1}{2} \cdot (x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2)$.
- Kořeny (nakreslené ve vhodných souřadnicích, aby $(-, -)$ byl standardní skalární součin):



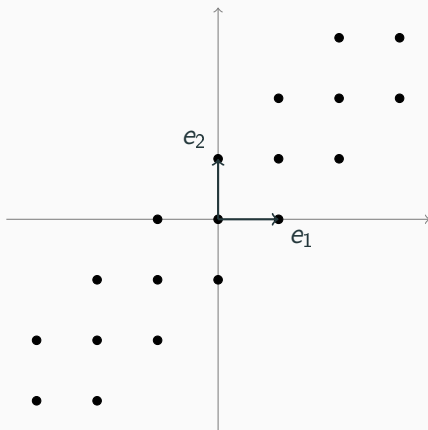
Příklad: Dynkinův diagram A_3

- Vezměme $\Gamma = A_3 = (3 - 2 - 1)$, tj.
 $q(x) = \frac{1}{2} \cdot (x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2)$.
- Kořeny (nakreslené ve vhodných souřadnicích, aby $(-, -)$ byl standardní skalární součin):



Příklad: eukleidovský diagram \tilde{A}_1

- Vezměme $\Gamma = \tilde{A}_1 = (2 \text{---} 1)$, tj. $q(x) = (x_1 - x_2)^2$.
- Kořeny (nakreslené vzhledem ke kanonické bázi $\{e_1, e_2\}$):



Lemma (Proposition 4.3.1(3))

Bud' Γ Dynkinův nebo eukleidovský. Pak každý kořen $x \in \Delta$ splňuje $x > 0$ nebo $x < 0$.

Důkaz.

- Můžeme psát $x = x^+ - x^-$, kde $x^+, x^- \geq 0$ mají disjunktní nosiče.
- Ze vzorce $(y, z) = \sum_{i \in \Gamma_0} (2 - 2d_{ii})y_i z_i - \sum_{i \neq j} d_{ij} y_i z_j$ plyne, že $(x^+, x^-) \leq 0$.
- $1 \geq q(x) = q(x^+) + q(x^-) - (x^+, x^-) \geq q(x^+) + q(x^-) \geq 0$.
- Tedy $q(x^+) = 0$ nebo $q(x^-) = 0$.
- Pokud by x^+, x^- byly oba nenulové, pak jeden z nich musel být v rad q , tedy poctivý – spor ζ □

Kořeny a reflexe [Kra, §4.3]

Lemma ([Kra, Lemma 4.3.2])

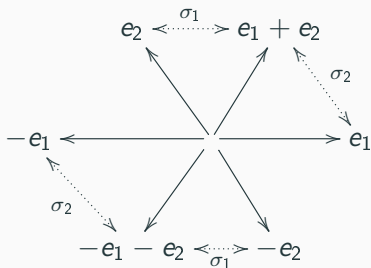
Buď Γ Dynkinův nebo eukleidovský diagram a zvolme $i \in \Gamma_0$.

Pokud je x kladný kořen a $\sigma_i(x)$ není kladný, pak $x = e_i$.

Důkaz.

- Pokud $\sigma_i(x)$ není kladný, pak $\sigma_i(x) < 0$.
- Ze vzorce $\sigma_i(x) = x - (x, e_i)e_i$ ale $\sigma_i(x)_j = x_j$ pro každé $j \neq i$.
- Odtud $x_j = 0$ pro každé $j \neq i$, tj. $x = e_i$. □

Příklad



Tvrzení (Proposition 4.3.1(2) and (4))

Je-li Γ eukleidovský diagram, pak

1. pro každé $x \in \Delta$ a $y \in \text{rad } q$ je $x + y \in \Delta$,
2. $\Delta / \text{rad } q$ je konečná množina.

Důkaz.

- Rovnosti $q(x + y) = q(x) + (x, y) + q(y) = q(x)$ dokazují 1.
- Buď $\delta \in \mathbb{Z}^n$ nejmenší kladný radikálový vektor a $i \in \Gamma_0$ vrchol takový, že $\delta_i = 1$.
- Pokud $x \in \Delta$, pak $y := x - x_i \delta \in \Delta$ zjevně splňuje $x + \text{rad } q = y + \text{rad } q \in \Delta / \text{rad } q$ a navíc $y_i = 0$.
- Dále $\delta + y$ a $\delta - y$ jsou nutně kladné (vizte i -tou souřadnici!)
- Tedy $-\delta < y < \delta$. □

Důsledek (Proposition 4.3.1(5))

Je-li Γ Dynkinův diagram, pak Δ konečná množina.

Důkaz.

- Máme totiž eukleidovský diagram $\tilde{\Gamma}$ takový, že Γ vznikne odebráním nějakého vrcholu i z $\tilde{\Gamma}$.
- Kořeny Γ pak můžeme ztotožnit s kořeny $\tilde{\Gamma}$ s nulovou i -tou souřadnicí. □

Coxeterova transformace

Přípustná uspořádání vrcholů toulce [Kra, §3.1]

Definice

Uspořádání vrcholů $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ konečného toulce Q nazveme **přípustné** (angl. **admissible**), pokud $(\exists \alpha: i \rightarrow j) \implies (i > j)$.

Příklad

$Q = (3 \rightarrow 2 \rightarrow 1)$.

Lemma

Uspořádání $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ je přípustné, právě když pro $i \in Q_0$ je tento vrchol stok v toulci $\sigma_{i-1} \cdots \sigma_1 Q$.

Příklad

$Q = (3 \rightarrow 2 \rightarrow 1) \rightsquigarrow \sigma_1 Q = (3 \rightarrow 2 \leftarrow 1) \rightsquigarrow$
 $\sigma_2 \sigma_1 Q = (3 \leftarrow 2 \rightarrow 1) \rightsquigarrow \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 Q = Q$.

Coxeterova transformace [Kra, §4.4]

Definice

Buď Q toulec s přípustným uspořádáním vrcholů

$Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$. Pak **Coxeterovou transformací** rozumíme automorfismus grupy

$$c: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n, \\ x \mapsto \sigma_n \cdots \sigma_2 \sigma_1(x).$$

Příklad

Je-li $Q = (2 \rightarrow 1)$, pak

$$c: e_2 \mapsto e_1,$$

$$e_1 \mapsto -e_1 - e_2.$$

