Teorie reprezentací konečně dimenzionálních algeber (NMAG 442)

Jan Šťovíček

25. května 2021

Katedra algebry MFF UK

Table of contents

Formy určené toulci a grafy

Připomenutí z minula [Kra, §§3.2 and 4.1]

- Buď Q konečný toulec a označme $Q_0 = \{1, \ldots, n\}$, buď Γ graf vzniklý zapomenutím orientace a $d_{i,j}$ = počet šipek i — j.
- Pak můžeme definovat Eulerovu formu (nesymetrickou bilineární)
$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in Q_0} x_i y_i - \sum_{\alpha\colon i \to j} x_i y_j.$$
- Odtud dostaneme kvadratickou formu $q\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$,
$$q(x) = \langle x, x \rangle = \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{\alpha\colon i \to j} x_i x_j = \sum_{i \in \Gamma_0} x_i^2 - \sum_{i \leq j} d_{ij} x_i x_j.$$
- Z q můžeme rekonstruovat tzv. symetrizovanou Eulerovu formu $(-,-)\colon \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$,
$$\begin{aligned}(x, y) &= q(x + y) - q(x) - q(y) = \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = \\ &= \sum_{i \in \Gamma_0} (2 - 2d_{ii}) \cdot x_i y_i - \sum_{i \neq j} d_{ij} x_i y_j.\end{aligned}$$

Příklad z minula

- Buď $Q = (1 \to 2 \to 3)$, tj. $\Gamma = (1 — 2 — 3)$.
- $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_3$.
- $$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \left(x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2\right) \end{aligned}$$
  — pozitivně definitní kvadratická forma, tj.
  $q(x) > 0$ $(\forall x \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\})$.

Trochu terminologie k formám

Definition
Buď $q\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ kvadratická forma. Pak

- q je pozitivně definitní, když $q(x) > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$.
- q je pozitivně semidefinitní, if $q(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{Z}^n$.

Radikál formy q je podgrupa

$$\operatorname{rad} q = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid (x, -) \equiv 0\} \leq \mathbb{Z}^n,$$

kde $(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$ je asociovaná symetrická bilineární forma.

Definition
Pokud $x, y \in \mathbb{Z}^n$, budeme psát $x \leq y$, pokud $x_i \leq y_i$ pro všechna i, a $x < y$, pokud $x \leq y$ a $x \neq y$ (částečné uspořádání).

Nakonec vektor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ nazveme poctivý (angl. sincere), pokud $x_i \neq 0 \;\; \forall i$.

Klíčové lemma

Lemma ([Kra, Lemma 4.1.3])
Buď Γ souvislý konečný graf, $q\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ příslušná kvadratická forma a $y \in \operatorname{rad} q$ takové, že $y > 0$. Pak y je poctivý a q je pozitivně semidefinitní. Navíc $\forall\, x \in \mathbb{Z}^n$ platí

$$q(x) = 0 \iff x \in \mathbb{Q}y \iff x \in \operatorname{rad} q.$$

Důkaz.

- Z předpokladu na y máme pro každý vrchol i:
$$0 = (e_i, y) = (2 - 2d_{ii})y_i - \sum_{i \neq j} d_{ij} y_j.$$
- Pokud $y_i = 0$ pro nějaké i, pak také $\sum_{i\neq j} d_{ij} y_j = 0$.
- Protože $(\forall j)(y_j \geq 0)$, máme $y_j = 0$ kdykoliv $d_{ij} > 0$, tj. kdykoliv jsou $i - j$ spojeny hranou.
- Souvislost Γ pak implikuje $y = 0$, což je spor $\lightning$
- Tedy y je poctivý vektor.

Klíčové lemma—pokračování

- Z předchozího víme, že $(2-2d_{ii})y_i = \sum_{i\neq j} d_{ij}y_j$ pro všechna i.
- Pak $q\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ je pozitivně semidefinitní, protože

$$
\begin{aligned}
q(x) &= \sum_i (1-d_{ii})x_i^2 - \sum_{i<j} d_{ij}x_ix_j && (\text{def. of } q)\\
&= \sum_i (2-2d_{ii})y_i \cdot \frac{1}{2y_i} \cdot x_i^2 - \sum_{i<j} d_{ij}x_ix_j\\
&= \sum_{i\neq j} d_{ij} \cdot \frac{y_j}{2y_i} \cdot x_i^2 - \sum_{i<j} d_{ij}x_ix_j && (\text{vizte výše})\\
&= \sum_{i<j} d_{ij} \cdot \frac{y_j}{2y_i} \cdot x_i^2 - \sum_{i<j} d_{ij}x_ix_j + \sum_{i<j} d_{ij} \cdot \frac{y_i}{2y_j} \cdot x_j^2\\
&= \sum_{i<j} d_{ij} \cdot \frac{y_iy_j}{2} \cdot \left(\frac{x_i}{y_i} - \frac{x_j}{y_j}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Klíčové lemma—pokračování č. 2

- Zatím víme, že $y \in \operatorname{rad} q$ je poctivý a $\forall x \in \mathbb{Z}^n$:

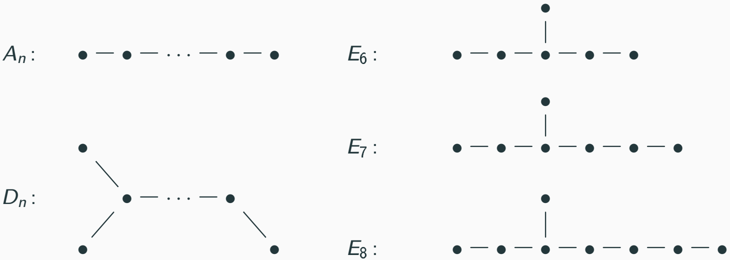
$$q(x) = \sum_{i<j} d_{ij} \cdot \frac{y_i y_j}{2} \cdot \left(\frac{x_i}{y_i} - \frac{x_j}{y_j}\right)^2.$$

- Chybí ukázat, že $q(x) = 0 \iff x \in \mathbb{Q}y \iff x \in \operatorname{rad} q$.
- Pokud $q(x) = 0$, pak $\frac{x_i}{y_i} = \frac{x_j}{y_j}$ kdykoliv $i — j$ v Γ. Ze souvislosti Γ dostaneme, že $x \in \mathbb{Q}y$.
- Pokud $x \in \mathbb{Q}y$, pak určitě $x \in \operatorname{rad} q$ (vizte ▸ def. of rad q).
- Nakonec $x \in \operatorname{rad} q$ implikuje $q(x) = \frac{1}{2}(x, x) = 0$. $\square$

Pro které grafy je q pozitivně (semi)definitní? [Kra, §4.2]

Věta ([Kra, Theorem 4.2.1])
Buď Γ souvislý konečný graf, $n = |\Gamma_0|$ a $q\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ příslušná kvadratická forma. Pak:

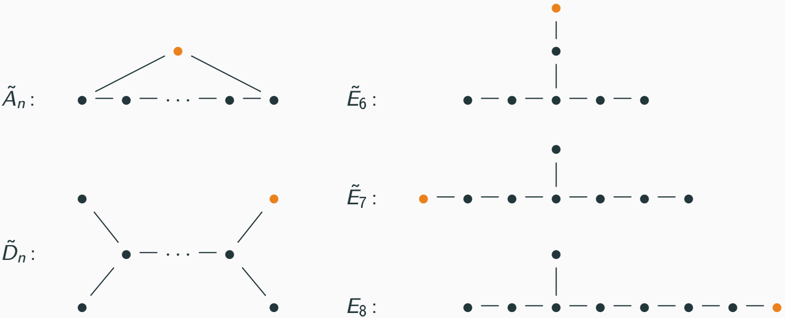
1. q je pozitivně definitní, právě když Γ je tzv. Dynkinův diagram:



Pro které grafy je q pozitivně (semi)definitní? [Kra, §4.2]

Věta ([Kra, Theorem 4.2.1])
Buď Γ souvislý konečný graf, $n = |\Gamma_0|$ a $q \colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ příslušná kvadratická forma. Pak:

2. q je pozitivně definitní, ale ne pozitivně definitní, právě když Γ je tzv. eukleidovský diagram:



V tom případě, $\exists! \delta \in \mathbb{Z}^n$ takové, že $\delta > 0$ a $\operatorname{rad} q = \mathbb{Z}\delta$.

Důkaz—eukleidovský případ [Kra, §4.2]

- Buď Γ jeden z eukleidovských diagramů.
- Pak můžeme ověřit, že následující $\delta \in \mathbb{Z}^n$ je v rad(q):

$$\tilde{A}_n: \quad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & \diagup & & & & & & \diagdown & \\ 1 & - & 1 & - & \cdots & - & 1 & - & 1 \end{array}$$

$$\tilde{E}_6: \quad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & | & & & & \\ & & & & 2 & & & & \\ & & & & | & & & & \\ 1 & - & 2 & - & 3 & - & 2 & - & 1 \end{array}$$

$$\tilde{E}_7: \quad \begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & 2 & & & & & & \\ & & & & & & | & & & & & & \\ 1 & - & 2 & - & 3 & - & 4 & - & 3 & - & 2 & - & 1 \end{array}$$

$$\tilde{D}_n: \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & 1 \\ & \diagdown & & & & \diagup & \\ & & 2 & - \cdots - & 2 & & \\ & \diagup & & & & \diagdown & \\ 1 & & & & & & 1 \end{array}$$

$$E_8: \quad \begin{array}{ccccccccccccccc} & & & & 3 & & & & & & & & & & \\ & & & & | & & & & & & & & & & \\ 2 & - & 4 & - & 6 & - & 5 & - & 4 & - & 3 & - & 2 & - & 1 \end{array}$$

- Pak q je pozitivně semidefinitní a $\operatorname{rad} q = \mathbb{Z}\delta$ podle
  ▸ klíčového lemmatu.

Důkaz—Dynkinův případ [Kra, §4.2]

- Buď Γ Dynkinův diagram a $n = |\Gamma_0|$.
- Pak máme eukleidovský diagram $\tilde{\Gamma}$ takový, že Γ dostaneme smazáním jednoho vrcholu z $\tilde{\Gamma}$, označme jej i.
- Uvažujme příslušné kvadratické formy q a $\tilde{q}$, pak $q(x) = \tilde{q}(\tilde{x})$, kde $\tilde{x} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ se dostane z $x \in \mathbb{Z}^n$ přidáním nuly do vrcholu i. Tedy q je pozitivně definitní.
- Pozitivní definitnost plyne opět z ▸ klíčového lemmatu: Když $x \neq 0$, potom $x \notin \operatorname{rad} q$ (protože $\tilde{x}$ není poctivý) a $q(x) \neq 0$.

Důkaz—zbylé případy [Kra, §4.2]

- Uvažujme souvislý konečný graf Γ, který není ani Dynkinův ani eukleidovské, a buď $q\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ příslušná kvadratická forma.
- Připomenutí: $q(x) = \sum_{i \in \Gamma_0} x_i^2 - \sum_{i \leq j} d_{ij} x_i x_j$.
- Chceme ukázat, že q není pozitivně semidefinitní.
- Pozorování: Existuje souvislý podgraf $\Gamma' \subsetneq \Gamma$, který je eukleidovský. Označme $\delta \in \mathbb{Z}^{n'} \leq \mathbb{Z}^n$ odpovídající pozitivní vektor z $\mathrm{rad}(q')$.
- Pokud $\Gamma_0' = \Gamma_0$, pak zjevně $q(\delta) < 0$.
- Pokud $\Gamma_0' \subsetneq \Gamma_0$, pak máme vrchol $j \in \Gamma_0 \setminus \Gamma_0'$ s hranou do nějakého Γ_0'. Pak nutně

$$q(2\delta + e_j) = 4q(\delta) + 2(\delta, e_j) + q(e_j) \leq -2 \sum_{i \in \Gamma_0'} d_{ij}\delta_i + (1 - d_{jj}) < 0.$$

$\square$

Zpět k toulcům

Důsledek
Buď Q konečný acyklický toulec a K těleso. Pak kvadratická forma

$$\begin{aligned} q\colon \qquad \mathbb{Z}^n &\to \mathbb{Z}, \\ \underline{\dim} M &\mapsto \dim_K \operatorname{Hom}(M, M) - \dim_K \operatorname{Ext}^1(M, M) \end{aligned}$$

je pozitivně definitní, právě když graf vzniklý zapomenutím orientace Q je Dynkinův diagram.

Příklad
Buď Q nějaká orientace grafu $A_n = (1 - 2 - \cdots - n)$. Potom

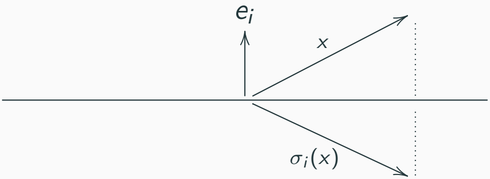
$$q(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} - x_n)^2 + x_n^2\right).$$

Reflexe a reflexní funktory

Úvod [Kra, §3.2]

- Pokud je Q Dynkinův toulec, $q(x) = \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{\alpha\colon i \to j} x_i x_j$ je pozitivně definitní a $(-,-)\colon \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ se rozšiřuje na skalární součin $(-,-)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
- Potom můžeme uvažovat reflexe σ_i to $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vzhledem k nadrovinám kolmým ke kanonickým bázovým vektorům e_i:

$$\begin{aligned} \sigma_i \colon \mathbb{Z}^n &\to \mathbb{Z}^n \\ x &\mapsto x - 2\frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i = x - (x, e_i) e_i. \end{aligned}$$



Reflexe příslušné vrcholům toulce [Kra, §3.2]

- Vzoreček pro reflexe ale funguje mnohem obecněji.
- Buď Q konečný toulec bez smyčky ve vrcholu i (tj. bez $i \circlearrowleft$).
- Pokud opět označíme $q(x) = \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{\alpha\colon i \to j} x_i x_j$ a $(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$, pak $(e_i, e_i) = 2q(e_i) = 2$.
- Pak definujeme reflexi příslušnou vrcholu i jako:

$$\begin{aligned} \sigma_i \colon \mathbb{Z}^n &\to \mathbb{Z}^n \\ x &\mapsto x - 2\frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i = x - (x, e_i) e_i. \end{aligned}$$

- Pozorování: $\sigma_i^2 = 1_{\mathbb{Z}^n}$.
- Pozorování: $\big(\sigma_i(x), \sigma_i(y)\big) = (x, y) \quad (\forall x, y \in \mathbb{Z}^n)$.

Reflexní funktory [Kra, §3.3]

- Pro $i \in Q_0$ označme $\sigma_i Q$ toulec vzniklý z Q změnou orientace všech hran u vrcholu i.
- Pro stok $i \in Q_0$ a $Q' := \sigma_i Q$ je $i \in Q'_0$ zdroj. V tom případě také definujeme funktory $S_i^- \colon \operatorname{Rep}_K(Q') \rightleftarrows \operatorname{Rep}_K(Q) \colon S_i^+$.
- Uvažujme $M = (M_i, f_\alpha) \in \operatorname{Rep}_K Q$ a exaktní posloupnost

$$0 \longrightarrow M'_i \xrightarrow{(f'_\alpha)} \bigoplus_{(\alpha\colon j \to i) \in Q_1} M_j \xrightarrow{(f_\alpha)} M_i$$

- Pak definujeme $S_i^+(M) = (M'_i, f'_\alpha)$ následovně
  1. M'_i vezmeme jako výše a $M'_j = M_j$ pro $j \neq i$.
  2. Pro $(\alpha\colon i \to k) \in Q'_1$, vezmeme f'_α jako výše a pro $(\alpha\colon j \to k) \in Q'_1$, $j \neq i$, jednoduše vezmeme $f'_\alpha = f_\alpha$.
- Pokud $N = (N_i, g_\alpha) \in \operatorname{Rep}_K(Q')$, pak $S_i^-(N)$ definujeme duálně pomocí $N_i \xrightarrow{(g_\alpha)} \bigoplus_{(\alpha\colon i \to j) \in Q'_1} N_j \xrightarrow{(g'_\alpha)} N'_i \longrightarrow 0$.

Reflexní funktory versus reflexe [Kra, §3.3]

- Uvažujme opět Q se stokem $i \in Q_0$, $Q' := \sigma_i Q$ a
$$S_i^- \colon \operatorname{Rep}_K(Q') \rightleftarrows \operatorname{Rep}_K(Q) \colon S_i^+.$$
- Pak máme přirozené homomorfismy
$$\iota_i \colon S_i^- S_i^+(M) \rightarrowtail M,$$
$$\pi_i \colon N \twoheadrightarrow S_i^+ S_i^-(N).$$

Lemma ([Kra, Lemma 3.3.2])

1. $M \cong (S_i^- S_i^+(M)) \oplus \operatorname{Coker} \iota_i$ a
   $\operatorname{Coker} \iota_i$ je direktní suma kopií jednoduché reprezentace $S(i)$.
2. $N \cong (S_i^+ S_i^-(N)) \oplus \operatorname{Ker} \pi_i$ a
   $\operatorname{Ker} \pi_i$ je direktní suma kopií jednoduché reprezentace $S(i)$.
3. Pokud $M \in \operatorname{rep}_K(Q)$ a M nemá direktní sumandy isomorfní $S(i)$,
   pak $\underline{\dim} S_i^+(M) = \sigma_i(\underline{\dim} M)$.
4. Pokud $N \in \operatorname{rep}_K(Q')$ a N nemá direktní sumandy isomorfní $S(i)$,
   pak $\underline{\dim} S_i^-(N) = \sigma_i(\underline{\dim} N)$.