Teorie reprezentací konečně dimenzionálních algeber (NMAG 442)

Jan Šťovíček

21. května 2021

Katedra algebry MFF UK

Table of contents

Dědičné konečně dimenzionální algebry

Motivace

- Buď K algebraicky uzavřené těleso.
- Pak jsme probrali tuto strukturní větu:

Věta ([ASS, Theorem II.3.7])
Je-li A základní souvislá konečně dimenzionální K-algebra, pak $A \cong KQ/\mathcal{I}$, kde Q je toulec algebry A a $\mathcal{I} \subseteq KQ$ je přípustný ideál.

- Jdou nějak charakterizovat konečně dimenzionální algebry A, pro které je $\mathcal{I} = 0$?
  Tj. ty tvaru $A \cong KQ$ (kde nutně Q je acyklický)?

Dědičné okruhy ([ASS, §VII.1])

Definice
Okruh A se nazývá (zprava) dědičný pokud splňuje ekvivalentní podmínky ve větě

Věta [ASS, Theorem VII.1.4]
Následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. pravá globální dimenze okruhu A je ≤ 1, tj. $\mathrm{Ext}_A^{>1}(-,-) \equiv 0$,
2. $\mathrm{proj.\,dim.}(A/I) \leq 1$ pro každý pravý ideál I,
3. každý pravý ideál $I \leq A$ je projektivní,
4. každý podmodul projektivního pravého modulu je projektivní,
5. každý faktor injektivního pravého modulu je injektivní.

Pokud navíc A je kon. dim. K-algebra, je ekvivalentní i

6. $\mathrm{proj.\,dim.}(S) \leq 1$ pro každý jednoduchý pravý A-modul S.

Příklady dědičných okruhů

Příklad
$\mathbb{Z}$ je dědičný okruh.

Lemma ([ASS, Theorem VII.1.7(a)])
Je-li K těleso a Q konečný acyklický toulec, pak je KQ dědičná.

Důkaz.

- S jednoduchý $\implies$ $S \cong (e_i KQ)/(e_i \operatorname{rad}(KQ))$ pro $i \in Q_0$.
- Tedy máme $0 \to e_i \operatorname{rad}(KQ) \to e_i KQ \to S \to 0$.
- Ovšem $e_i \operatorname{rad}(KQ) = \bigoplus_{(\alpha\colon i \to j)} \alpha KQ \cong \bigoplus_{(\alpha\colon i \to j)} e_j KQ$ je projektivní. $\square$

Poznámka
KQ je dědičný okruh i když Q má orientované cykly (je třeba jen, aby $|Q_0| < \infty$). Důkaz je ale mnohem komplikovanější, používá nekomutativní Gröbnerovy báze.

Charakterizace dědičných konečně dimenzionálních algeber

Věta ([ASS, Theorem VII.1.7(b)])
Je-li A základní souvislá dědičná konečně dimenzionální K-algebra, pak $A \cong KQ$, kde Q je (nutně acyklický) toulec algebry A.

Důsledek
Každá dědičná konečně dimenzionální K-algebra je moritovsky ekvivalentní algebře cest KQ, kde Q je konečný acyclický toulec.

Důkaz charakterizace

Lemma ([ASS, Corollary VII.1.5(a)])
Je-li A dědičná a $f: Q \to P$ je nenulový homomorfismus mezi *nerozložitelnými* *projektivními moduly pak je f prostý.*

Důkaz.

- $\operatorname{Im} f \leq P$ je projektivní, tedy $Q \cong \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.
- Pokud $f \neq 0$, pak $\operatorname{Im} f = Q$, a tedy $\operatorname{Ker} f = 0$. □

Důsledek
Pokud A je dědičná souvislá základní kon. dim. algebra, pak je Q_A acyclický.

Důkaz.

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[r, "\alpha_1"] & 2 \arrow[dr, bend left, "\alpha_2"] & \\ k-1 \arrow[ur, bend left, "\alpha_{k-1}"] \arrow[d, dotted, no head] & & & 3 \arrow[d, dotted, no head] \\ {} & & & {} \end{tikzcd} \Longrightarrow \begin{tikzcd} & e_1 A \arrow[dl, bend right, "\alpha_{k-1}\cdot -"'] & e_2 A \arrow[l, "\alpha_1 \cdot -"'] & \\ e_{k-1}A \arrow[d, dotted, no head] & & \lightning & e_3 A \arrow[ul, bend right, "\alpha_2 \cdot -"'] \arrow[d, dotted, no head] \\ {} & & & {} \end{tikzcd}$$

□

Důkaz charakterizace—pokračování

Věta ([ASS, Theorem VII.1.7(b)])
Je-li A základní souvislá dědičná konečně dimenzionální K-algebra, pak $A \cong KQ$, kde Q je (nutně acyklický) toulec algebry A.

Důkaz,

- BÚNO $A = KQ_A/\mathcal{I}$, kde Q_A je acyklický a $\mathcal{I}$ přípustný.
- Pak z [ARS, Lemma III.1.11]: $\mathcal{I} \neq 0 \implies A$ není dědičná.
- Máme totiž exaktní posloupnost A-modulů
$$0 \to \frac{\mathcal{I}}{R_Q \cdot \mathcal{I}} \to \frac{R_Q}{R_Q \cdot \mathcal{I}} \xrightarrow{p} \frac{R_Q}{\mathcal{I}} \to 0.$$
- Protože R_Q je projektivní KQ-modul, je $R_Q/R_Q\mathcal{I}$ projektivní A-modul.
- Dále $0 \neq \mathcal{I}/R_Q\mathcal{I} \leq R_Q^2/R_Q\mathcal{I} = \mathrm{rad}(R_Q/R_Q\mathcal{I})$.
- Tedy p je projektivní pokrytí v *mod*-A a $\mathrm{rad}(A)_A = R_Q/\mathcal{I}$ musí být neprojektivní A-modul. $\square$

Grothendieckova grupa a Eulerova forma

Připomenutí: grupa K_0

- Pro abelovskou kategorii $\mathcal{A}$ uvažujeme funkce $\delta\colon \mathrm{obj}(\mathcal{A}) \to G$, kde G je abelovská grupa, takové, že

$$\delta(L) = \delta(K) + \delta(M) \qquad \forall (0 \to K \to L \to M \to 0).$$

- Prototyp: $\dim_K\colon \text{vect-}K \to \mathbb{Z}$, $V \mapsto \dim_K(V)$.
- Klíčové pozorování: Existuje univerzální taková funkce $\mathrm{obj}(\mathcal{A}) \to K_0(\mathcal{A})$!
    - Generátory $K_0(\mathcal{A})$: třídy isomorfismů $[M]$, $M \in \mathrm{obj}(\mathcal{A})$.
    - Relace v $K_0(\mathcal{A})$: $[L] = [K] + [M] \quad \forall (0 \to K \to L \to M \to 0)$.
- Pro algebry cest $A = KQ/\mathcal{I}$ (Q konečný, $\mathcal{I}$ přípustný) se $\mathrm{obj}(\mathit{mod}\text{-}A) \to K_0(\mathcal{A})$ ztotožní s

$$\underline{\dim}\colon \mathrm{obj}(\mathit{mod}\text{-}A) \to \mathbb{Z}^{Q_0}.$$

Eulerova charakteristika

- Buď $A = KQ$, kde Q je konečný acyklický toulec.
- V [ASS, kap. III.3] se definuje Eulerova charakteristika (též Eulerova bilineární forma)

$$\langle -, - \rangle \colon \mathbb{Z}^{Q_0} \times \mathbb{Z}^{Q_0} \to \mathbb{Z}$$

a ukazuje se, že pro každé $M, N \in \mathit{mod}\text{-}A$ platí

$$\langle \underline{\dim} M, \underline{\dim} N \rangle \mapsto \dim_K \mathrm{Hom}_A(M, N) - \dim_K \mathrm{Ext}^1_A(M, N).$$

- Dosadíme-li $M = S_i$ a $N = S_j$, pak tedy

$$\begin{aligned} \langle e_i, e_j \rangle &= \dim_K \mathrm{Hom}(S_i, S_j) - \dim_K \mathrm{Ext}^1(S_i, S_j) \\ &= \delta_{ij} - |\{\alpha \colon i \to j \text{ šipka v } Q_1\}|. \end{aligned}$$

- Čili pro $x = (x_1, \dots x_n)$ a $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}^n$ platí

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in Q_0} x_i y_i - \sum_{\alpha \colon i \to j} x_i y_j.$$

Formy určené toulci a grafy

Zenové cvičení s formami [Kra, §§3.2 and 4.1]

- Buď Q konečný toulec a označme $Q_0 = \{1, \dots, n\}$, buď Γ graf vzniklý zapomenutím orientace a $d_{i,j} =$ počet šipek $i — j$.
- Pak můžeme definovat Eulerovu bilineární formu
$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in Q_0} x_i y_i - \sum_{\alpha\colon i \to j} x_i y_j.$$
- Odtud dostaneme Eulerovu kvadratickou formu $q\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$,
$$q(x) = \langle x, x \rangle = \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{\alpha\colon i \to j} x_i x_j = \sum_{i \in \Gamma_0} x_i^2 - \sum_{i \leq j} d_{ij} x_i x_j.$$
- Jelikož $\langle -, - \rangle$ není symetrická forma, znalost q nám umožňuje rekonstruovat jen symetrizovanou Eulerovu bilineární formu $(-, -)\colon \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$,
$$\begin{aligned}(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y) = \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = \\ = \sum_{i \in \Gamma_0} (2 - 2d_{ii}) \cdot x_i y_i - \sum_{i \neq j} d_{ij} x_i y_j.\end{aligned}$$

Příklad

- Buď $Q = (1 \to 2 \to 3)$, tj. $\Gamma = (1 — 2 — 3)$.
- $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_1 y_2 - x_2 y_3$.
- $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3$
  $= \frac{1}{2} \cdot \left(x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2\right)$.
- Toto je pozitivně definitní kvadratická forma, tj. $q(x) > 0$ $(\forall x \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\})$, což má úzkou souvislost s reprezentačním typem KQ!

$$
\begin{tikzcd}
 & & (K \xrightarrow{1} K \xrightarrow{1} K) \arrow[dr, two heads] & & \\
 & (0 \to K \xrightarrow{1} K) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, two heads] & & (K \to K \xrightarrow{1} 0) \arrow[dr, two heads] & \\
(0 \to 0 \to K) \arrow[ur, hook] & & (0 \to K \to 0) \arrow[ur, hook] & & (K \to 0 \to 0)
\end{tikzcd}
$$