SHODNÁ ZOBRAZENÍ, VEKTOROVÝ SOUČIN A ROTACE V $\mathbb{R}^3$

- **PŘIPOMENUTÍ:**

  - **V ([ŠÍR, 1.4])**: ZOBRAZENÍ $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ JE SHODNOST, PRÁVĚ KDYŽ g JE DÁNO PŘEDPISEM $g(u) = Au + p$, KDE $p \in \mathbb{R}^n$ A $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ JE ORTOGONÁLNÍ MATICE.

- **POZOROVÁNÍ ([ŠÍRA, V1.8])**: JE-LI g SHODNOST, PAK $\exists$ ORTOGONÁLNÍ MATICE $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ A $p \in \mathbb{R}^n$ TAKOVÉ, ŽE $\forall\, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$g(u) = \left.\left(\begin{array}{c|c} A & p \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\right\}{\scriptstyle n+1} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\hphantom{AAAAA}}_{n+1}$$

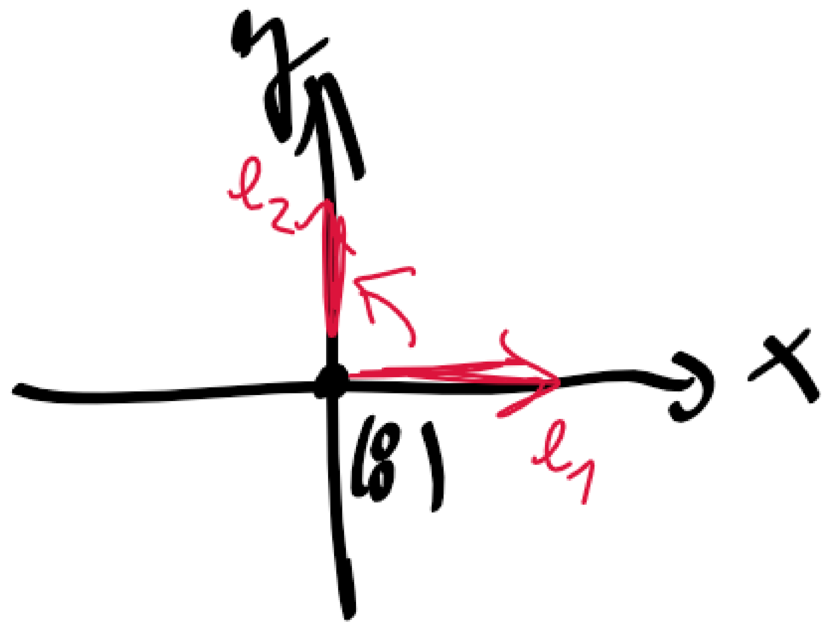
- VÍME: $\{\text{SHODNOSTI } g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\} \xleftrightarrow{\text{bij}} \{(A, p) : A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ ORTOG}, \; p \in \mathbb{R}^n\}$

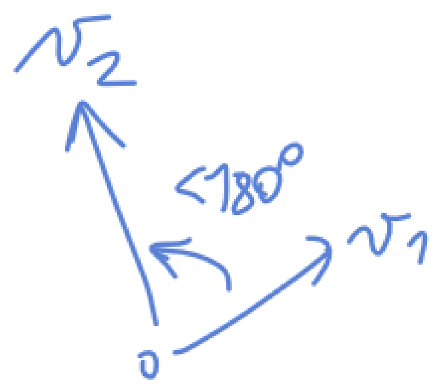
- **ORIENTACE BÁZE $\mathbb{R}^n$**: $B = (v_1, \dots, v_n)$ BÁZE $\mathbb{R}^n$ $\rightsquigarrow$ B JE KLADNĚ (RESP. ZÁPORNĚ) ORIENTOVANÁ, POKUD PRO $M = (v_1 | v_2 | \dots | v_n)$ PLATÍ $\det M > 0$ (RESP. $\det M < 0$)

- **POZN:** KANONICKÁ BÁZE V $\mathbb{R}^n$, TJ. $B=(e_1,\dots,e_n)$, JE KLADNĚ ORIENTOVANÁ.

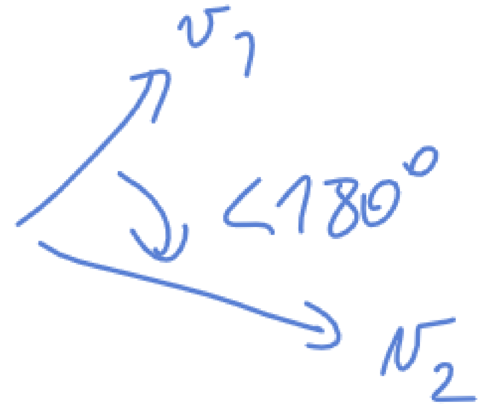
- ZAKRESLENÍ V $\mathbb{R}^2$ / $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^2$

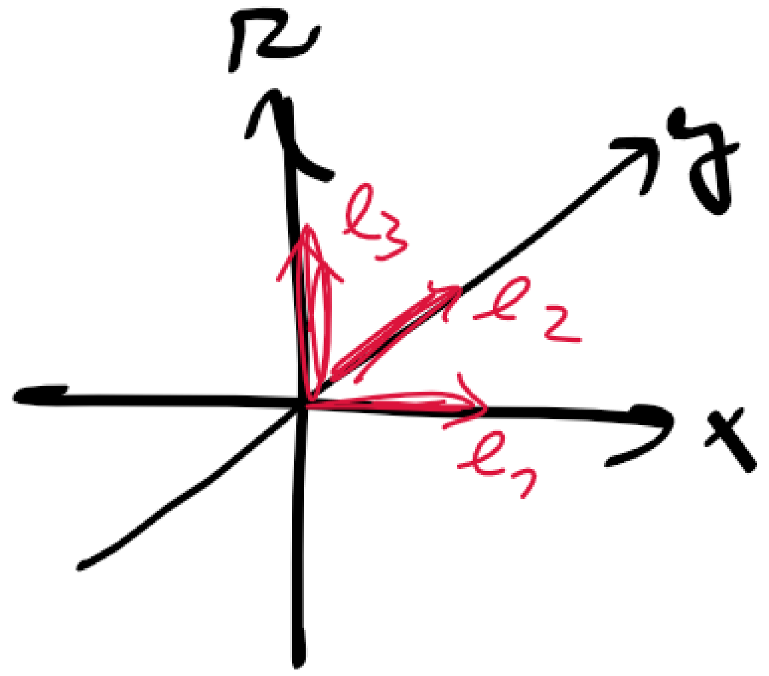




KLADNÁ ORIENTACE

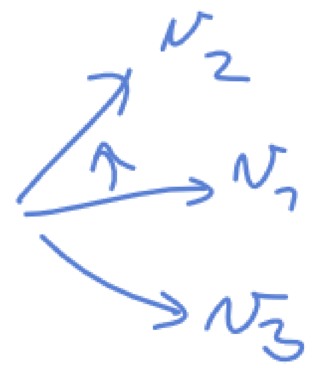


ZÁPORNÁ ORIENTACE



ORIENTACE $\rightsquigarrow$ PRAVIDLO PRAVÉ RUKY

KLADNÁ OR.



ZÁPORNÁ ORIENTACE

- **DEF** ([ŠÍR, 1.7]): BUĎ $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ SHODNOST, $g: u \mapsto Au + p$.
PAK g JE **PŘÍMÁ**, POKUD $\det A > 0$,
g JE **NEPŘÍMÁ**, POKUD $\det A < 0$.

($\det A = \pm 1$ A ORTOGONÁLNÍ)

- PŘIPOMEŇME SI, JAK VYPADAJÍ ORTOGONÁLNÍ ZOBRAZENÍ $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ NEBO $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
(+ SKRIPTA, KAP 10.2.5 A 10.2.6).

SHODNOST $g: u \mapsto Au+p$, KDE $p=0$.

POPIS SHODNOSTÍ NA $\mathbb{R}^3$

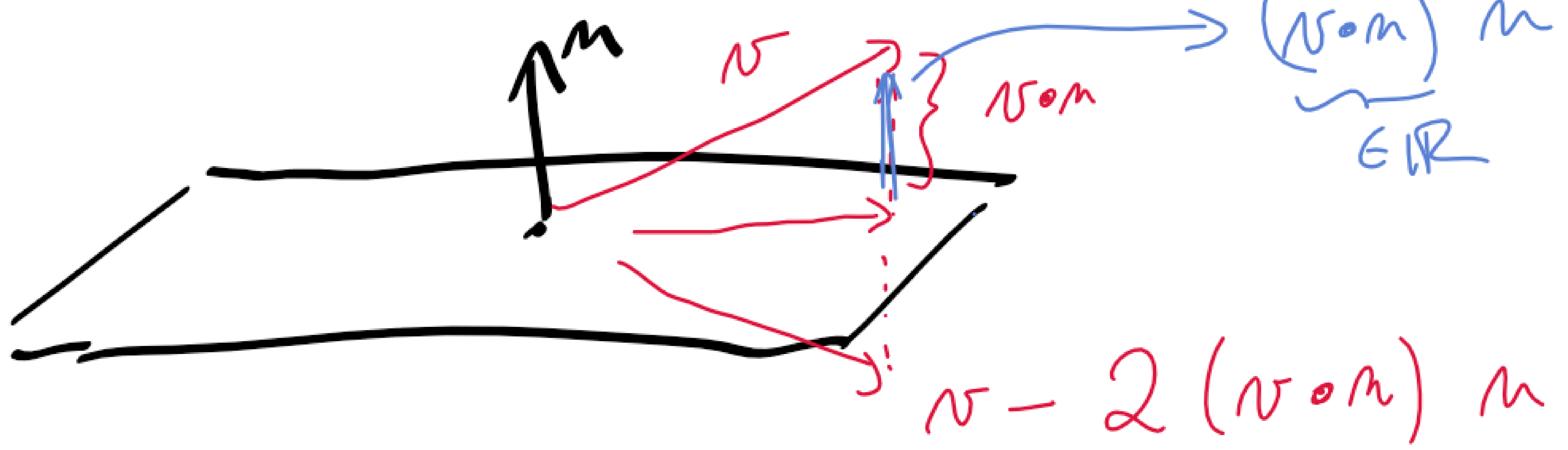
- POSUNUTÍ: $u \mapsto u + p$

- REFLEXE PODLE ROVINY $n^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : n \cdot x = 0 \right\}$

$V = n^\perp$

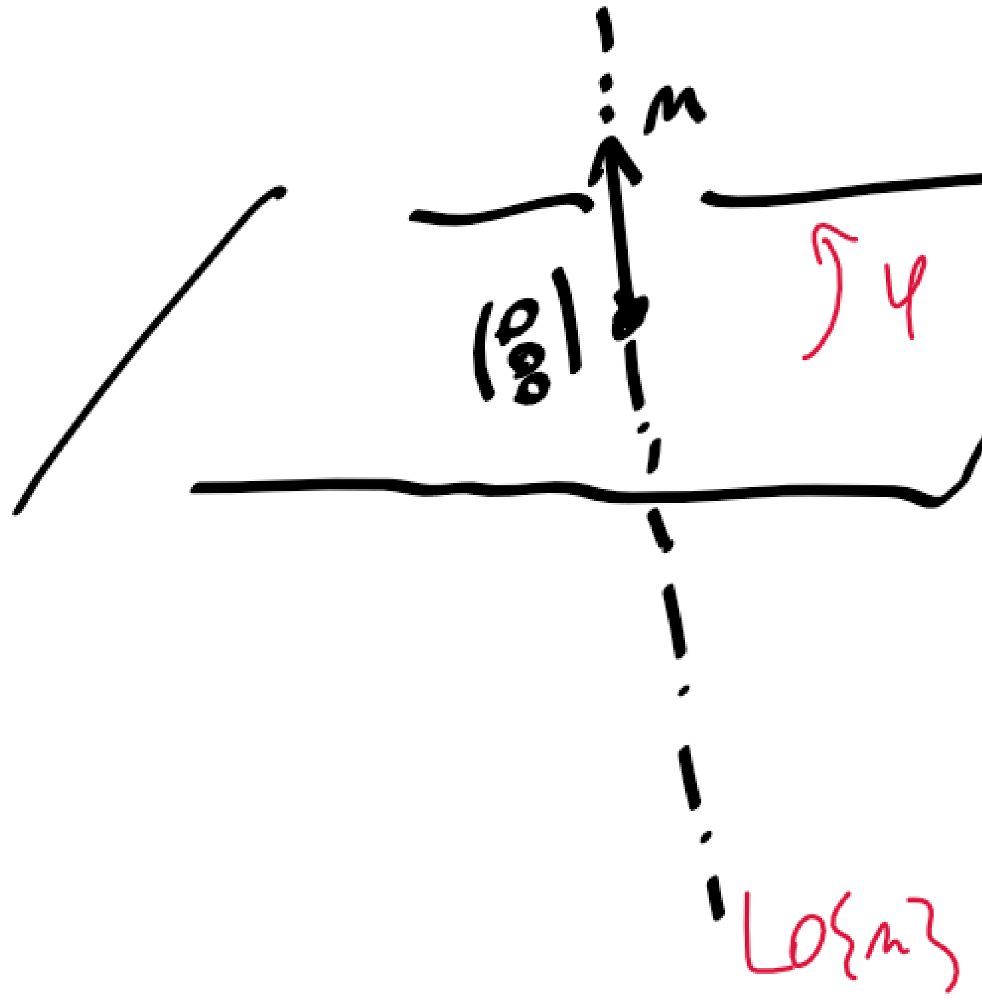
$\|n\| = 1$

n NORMÁLOVÝ VEKTOR



- POPIS ROTACE ??

$\|n\| = 1$



VEKTOROVÝ SOUČIN A JEHO VLASTNOSTI

DEF: JSOU-LI $u, v \in \mathbb{R}^3$, PAK **VEKTOROVÝ SOUČIN** u A v DEFINUJEME

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$(\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3)$

JAKO

$$u \times v = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

POZN:

$$u \times v = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} e_3 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & e_1 \\ u_2 & v_2 & e_2 \\ u_3 & v_3 & e_3 \end{vmatrix}$$

L:

1. $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3: \quad (u+v) \times w = u \times w + v \times w$
2. $\forall u, w \in \mathbb{R}^3 \ \forall t \in \mathbb{R}: \quad (tu) \times w = t(u \times w)$
3. $\forall u, v \in \mathbb{R}^3: \quad u \times v = -(v \times u)$

VLASTNOSTI DETERMINANTŮ 2×2

4. $\forall u, v \in \mathbb{R}^3: \quad (u, v) \text{ LZ} \iff u \times v = 0$

$\{ u \times v = 0 \iff \operatorname{rank}(u|v) \leq 1$

5. $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3: \quad (u \times v) \bullet w = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$

← ROZVOJ PODLE 3. SLOUPCE

SPECIÁLNĚ PRO $w = (u \times v)$ DOSTANEME $\|u \times v\|^2 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & (u\times v)_1 \\ u_2 & v_2 & (u\times v)_2 \\ u_3 & v_3 & (u\times v)_3 \end{vmatrix}$.

- POZN: • $u, v \in \mathbb{R}^3$ LN $\Rightarrow$ $B = (u, v, u \times v)$ JE KLADNĚ ORIENTOVANÁ BÁZE $\mathbb{R}^3$

OBSAH $\|u\|\|v\| \sin\varphi$

• $u \times v \perp u, v$

- I: (1) $\forall u, v \in \mathbb{R}^3$: $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - (u \circ v)^2$

(2) $\forall u, v \in \mathbb{R}^3$: $\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot |\sin\varphi|$

- Dk: - DEFINOVALI JSME SI $\cos\varphi = \dfrac{(u \circ v)}{\|u\|\|v\|}$

- MÁME-LI (1), PAK $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - \|u\|^2\|v\|^2\cos^2\varphi = \|u\|^2\|v\|^2 \sin^2\varphi$, TJ. DOSTANEME (2)

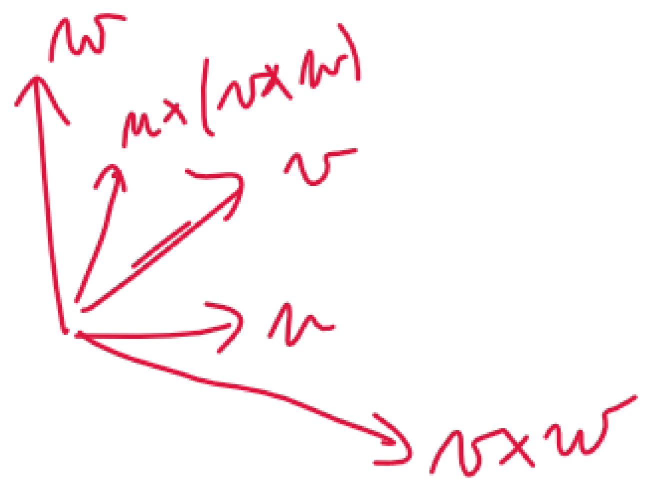
(u, v) LZ $\Rightarrow$ OBĚ STRANY (1) JSOU 0

(u, v) LN, V TOM PŘÍPADĚ SE PODÍVÁME NA det GRAMOVY MATICE $(u, v, \underbrace{u \times v}_{w})$

$$\left(\|u\|^2\|v\|^2 - (u \cdot v)^2\right) \underbrace{\|u \times v\|^2}_{\neq 0} = \det \underbrace{\begin{pmatrix} \|u\|^2 & u \circ v & 0 \\ u \circ v & \|v\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \|u \times v\|^2 \end{pmatrix}}_{B} = \det \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}}_{A^T} \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}}_{A} = \|u \times v\|^2 \cdot \underbrace{\|u \times v\|^2}_{\neq 0}$$

- L ([ČÍR, LEMMÁTKO, STR. 8]):

$\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3$: $\quad u \times (v \times w) = (u \bullet w)\, v + (u \bullet v)\, w$



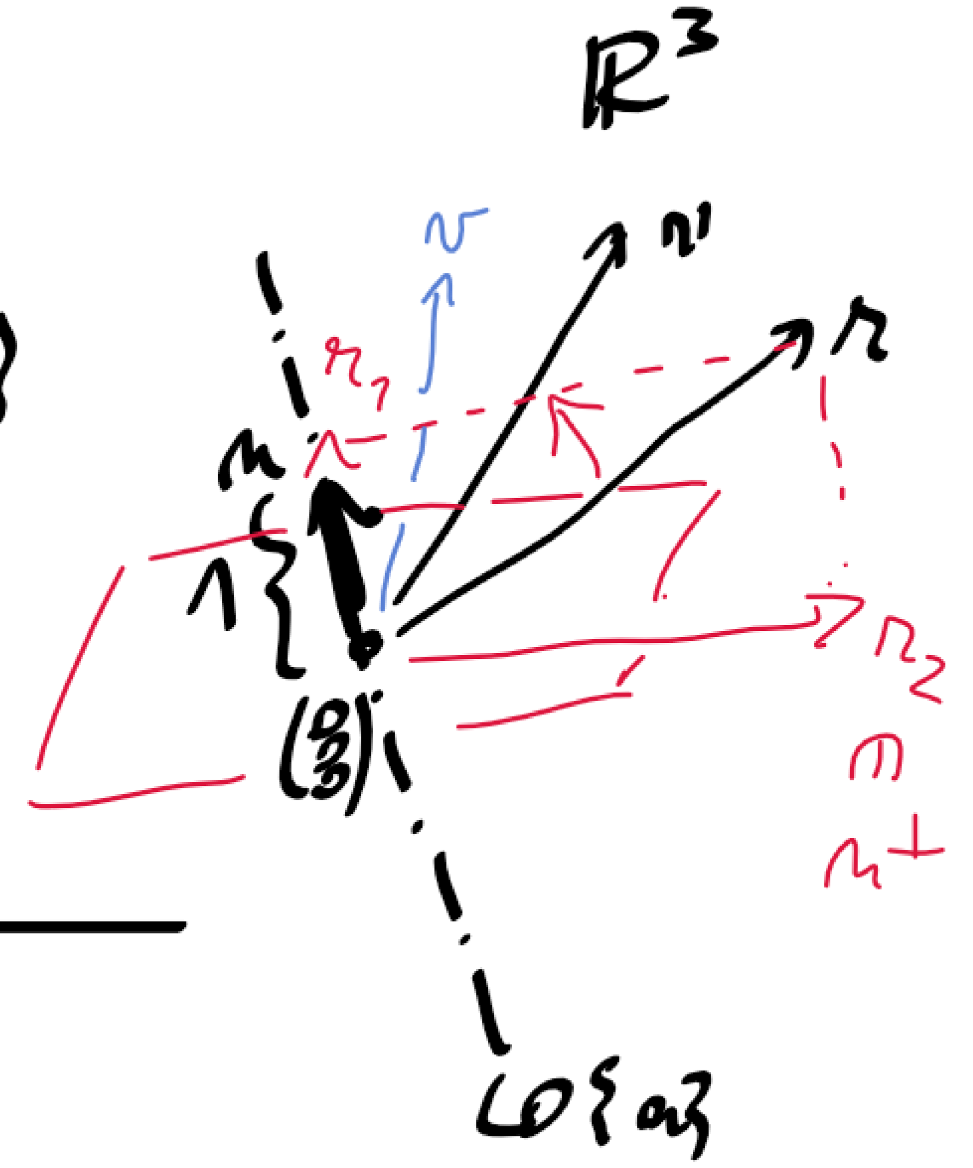
- Dk: - STAČÍ DOKÁZAT PRO $u = e_1, e_2, e_3$

- PŘÍMO SPOČÍTÁME, ŽE

$$e_1 \times (v \times w) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 w_1 - v_1 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \end{pmatrix} = w_1 v - v_1 w$$
$$= (e_1 \bullet w)\, v - (e_1 \bullet v)\, w$$

- PODOBNĚ $u = e_2, e_3$.

- RODRIGUESOVA FORMULE



- V ([ŠIR, V1.12]): $n, r \in \mathbb{R}^3$, $\|n\|=1$, r' ROTACIJA r OKOLI $\mathrm{Lin}\{n\}$ ZA φ.

$$r' = (1-\cos\varphi)(r\cdot n)\,n + (\cos\varphi)\,r + (\sin\varphi)(n\times r)$$

- Dk: $r' = r_1 + (\cos\varphi)\,r_2 + (\sin\varphi)\,v$

$$= \underbrace{(r\cdot n)}_{T8.61}\,n + \cos\varphi\underbrace{\left(r-(r\cdot n)\,n\right)}_{r_2} + \sin\varphi\,(n\times r) =$$

$$= (1-\cos\varphi)(r\cdot n)\,n + (\cos\varphi)\,r + (\sin\varphi)(n\times r)$$

$\square$

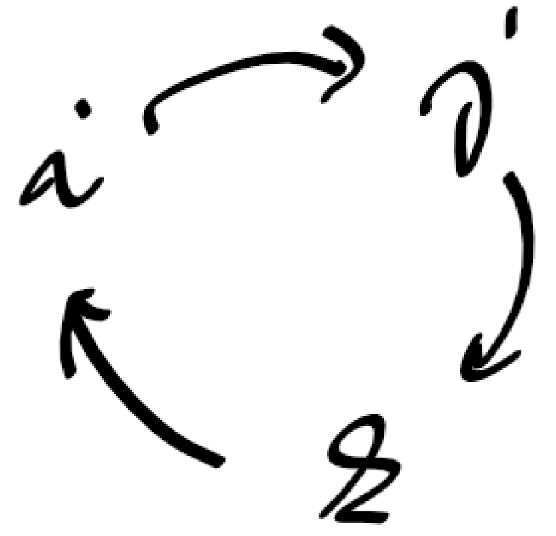
$v = n\times r$
$= n\times(r_1+r_2)$
$= \underbrace{n\times r_1}_{0} + n\times r_2 = n\times r_2$

A $\|v\| = \|n\|\,\|r_2\|\sin\frac{\pi}{2}$
$= \|n\|\,\|r_2\| = \|r_2\|$

- POZN.: – MÁME NEKOMUTATIVNÍ TĚLESO KVATERNIONŮ

$$\mathbb{H} = \{ a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \;, \quad ij = k \;, \; ji = -k \;, \quad jk = i \;, \; kj = -i \;, \quad ki = j \;, \; ik = -j$$



- JE-LI $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$

⇝ SDRUŽENÝ KVATERNION : $\bar{q} = a - bi - cj - dk$

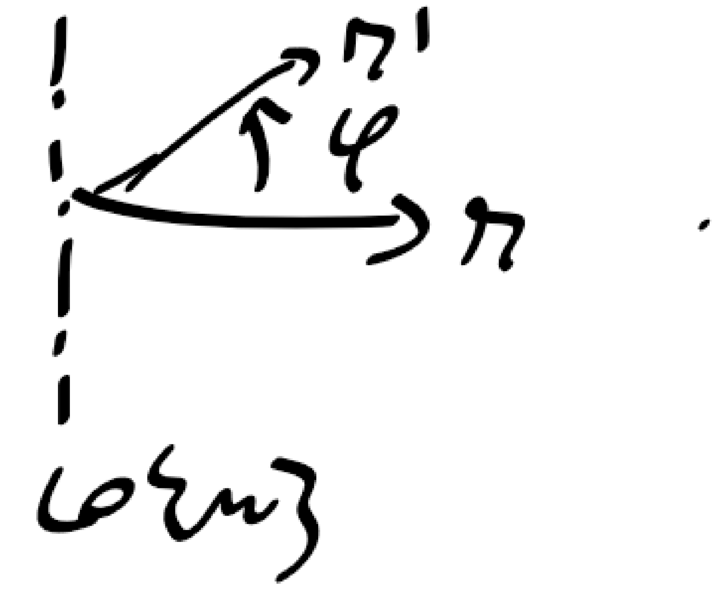
- PAK: $q \cdot \bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ ⇝ $q^{-1} = \dfrac{\bar{q}}{a^2+b^2+c^2+d^2}$

$(q \neq 0)$

- POINTA: $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ ⇝ $(v_1 i + v_2 j + v_3 k) \cdot (w_1 i + w_2 j + w_3 k) =$

$$= -v \cdot w + (v \times w)_1 i + (v \times w)_2 j + (v \times w)_3 k$$

—V (ČSIR, 1.17)) : ZVOLME $r, n \in \mathbb{R}^3$, $\|n\|=1$ |



PAK POLOŽÍME-LI

$$\hat{r} = r_1 i + r_2 j + r_3 k$$

$$\hat{r}' = r_1' i + r_2' j + r_3' k$$

$$q = \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\left(n_1 i + n_2 j + n_3 k\right),$$

<u>PLATÍ</u> !

$$\tilde{r}' = \underbrace{q \cdot \tilde{r} \cdot \bar{q} = q \hat{r} q^{-1}}_{\sim \mathbb{H}}$$