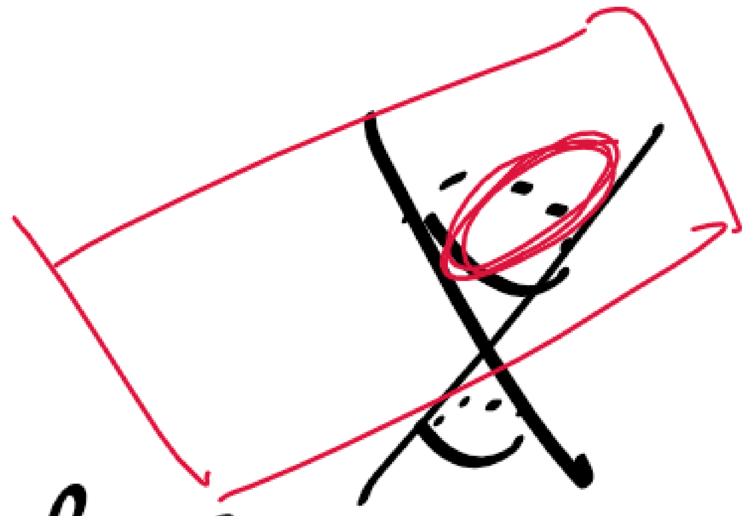
GEOMETRIE V $\mathbb{R}^2$ A $\mathbb{R}^3$ (& DOKONČENÍ ORTOGONÁLNÍ DIAGONALIZACE)

– DOKONČENÍ KAP 11 VE SKRIPTECH

– **T 11.33**: BUĎ V KONEČNĚ GENEROVANÝ REÁLNÝ VEKTOROVÝ PROSTOR SE $\langle \cdot , \cdot \rangle$.
BUĎ $f: V \times V \to \mathbb{R}$ SYMETRICKÁ BILINEÁRNÍ FORMA.
PAK EXISTUJE ORTONORMÁLNÍ (VZHLEDEM K $\langle \cdot , \cdot \rangle$) BÁZE B, KTERÁ JE ZÁROVEŇ f-ORTOGONÁLNÍ (TJ. $[f]_B$ JE DIAGONÁLNÍ).

– **Dk**:
- VEZMEME SI NEJPRVE NĚJAKOU ORTONORMÁLNÍ BÁZI C PROSTORU V
- POLOŽME $A = [f]_C$, TJ. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ SYMETRICKÁ (KDE $n = \dim V$)
- PAK $\exists\, U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ORTOGONÁLNÍ ($U^T U = I_n = U U^T$) TAKOVÁ, ŽE
  $U^T A U = \operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_n}_{\text{VLASTNÍ ČÍSLA } A})$
- ZVOLÍME BÁZI $\underset{(v_1, \dots, v_n)}{B}$ TAKOVOU, ŽE $U = [id]_C^B$, TJ. $U = \left([v_1]_C \middle| [v_2]_C \middle| \dots \right)$
- TJ. $[f]_B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (ČILI B JE f-ORTOGONÁLNÍ)
  A PROTOŽE C JE ORTONORMÁLNÍ (VZHLEDEM K $\langle \cdot , \cdot \rangle$) A U JE ORTOGONÁLNÍ, JE I B ORTONORMÁLNÍ (VZHLEDEM K $\langle \cdot , \cdot \rangle$). $\square$

- KUŽELOSEČKY:
  - POINTA: CHCEME SE VYZNAT V ŘEŠENÍ ROVNIC TYPU



$$\underbrace{ax^2+bxy+cy^2}_{\substack{g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \\ \text{KVADRATICKÁ FORMA} \\ \text{DANÁ MATICÍ } A_2=\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c\end{pmatrix}}}+\underbrace{dx+ey}_{\substack{h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \\ \text{LIN. FORMA,} \\ [h]^{K_2}=\begin{pmatrix} d \\ e\end{pmatrix}}}+\underbrace{f}_{\in\mathbb{R}}=0$$

| $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$
x,y PROMĚNNÉ

$a\neq 0 \vee b\neq 0 \vee c\neq 0$

(MŮŽEME ZMĚNIT ZNAMÉNKA VŠECH KOEFICIENTŮ $\rightsquigarrow$ STEJNÉ ŘEŠENÍ)

- OBECNÝ POSTUP:

① NAJDEME ORTONORMÁLNÍ BÁZI $\mathbb{R}^2$ (VZHLEDEM KE STD. SKAL. SOUČINU) TAKOVOU, ŽE $[g]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$

(NAPŘ. PRO $\underbrace{3x^2+2xy+3y^2}_{g}+5x-y-1=0$ JE g DÁNO $A_2=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

A PRO $B=\left(\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ JE $[g]_B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$)

② PAK DOPLNÍME NA ÚPLNÉ ČTVERCE $\rightsquigarrow$ DOSTANEME STANDARDNÍ ROVNICI KUŽELOSEČKY

$\underbrace{\left(\frac{x}{k}\right)^2+\left(\frac{y}{l}\right)^2-1=0}_{\text{(ELIPSA / KRUŽNICE)}}$ NEBO $\underbrace{\left(\frac{x}{k}\right)^2-\left(\frac{y}{l}\right)^2-1=0}_{\text{(HYPERBOLA)}}$ NEBO $\underbrace{kx^2+ly+m=0}_{\text{(PARABOLA)}}$ NEBO ?

DEGEN. PŘÍPADY ??

(PŘ: V SOUŘ. VZHL K B MÁ KUŽELOSEČKA TVAR $2\tilde{x}^2+4\tilde{y}^2+3\sqrt2\,\tilde{x}+2\sqrt2\,\tilde{y}-1=0$

$2\left(\tilde{x}^2+\frac{3}{\sqrt2}\tilde{x}\right)+4\left(\tilde{y}^2+\frac{1}{\sqrt2}\tilde{y}\right)-1=0$

$2\left(\tilde{x}+\frac{3}{2\sqrt2}\right)^2+4\left(\tilde{y}+\frac{1}{2\sqrt2}\right)^2-2\cdot\frac{3}{8}-4\cdot\frac{1}{8}-1=0$

– KDY JE ŘEŠENÍM $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ OPRAVDU KUŽELOSEČKA ?

⇝ ROVNICI PŘEPÍŠEME VE TVARU

$$\underbrace{(x \ \ y \ \ 1)\ A_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0}_{k(x,y,1)=0\text{, KDE}}, \text{ KDE } \quad A_3 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{matrix}} & \begin{matrix} \frac{d}{2} \\ \frac{e}{2} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \end{matrix} & f \end{pmatrix}, \quad \boxed{\cdot} = A_2$$

$k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ JE KVADRATICKÁ FORMA

$(x,y,z) \mapsto ax^2+bxy+cy^2+dxz+eyz+fz^2$

– TVRZENÍ: ROVNICE URČUJE KUŽELOSEČKU $\iff$ (1) A_3 JE REGULÁRNÍ &

(2) A_3 ANI $-A_3$ NEJSOU POZITIVNĚ DEFINITNÍ

– JOTIŽ: KDYŽ A_3 JE POZITIVNĚ DEF., PAK $k(x,y,1) > 0 \ \forall x,y \in \mathbb{R}$

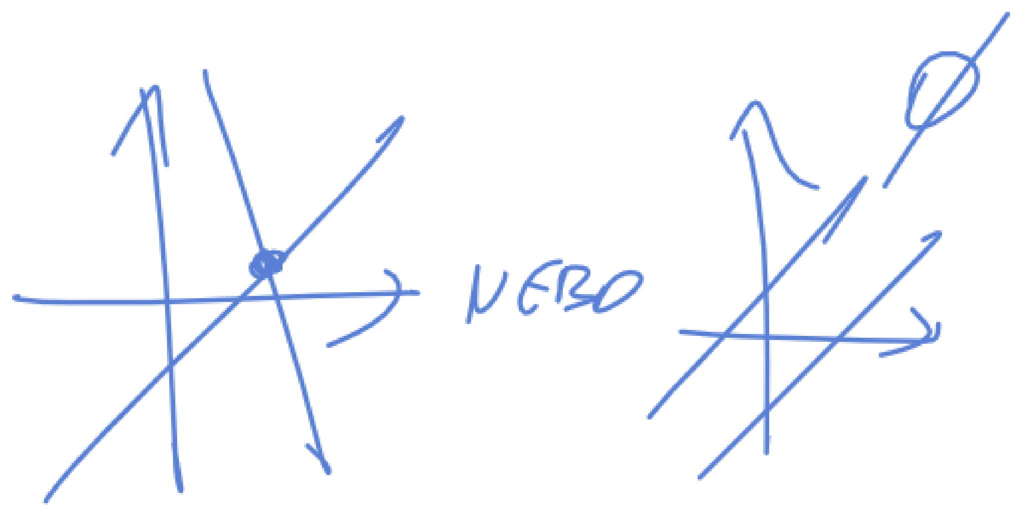
—"— $-A_3$ —"— , —"— < 0 —"—

– ČILI: POKUD NENÍ SPLNĚNA (2), PAK ROVNICE $ax^2+bxy+\dots$ NEMÁ V $\mathbb{R}^2$ ŘEŠENÍ

– DÁLE PŘEDP. (2)

– UVAŽUJEME ROVNICI:

(*) $$(x \quad y \quad 1)\; A_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{KDE} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{matrix}} & \begin{matrix} \frac{d}{2} \\ \frac{e}{2} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \end{matrix} & f \end{pmatrix}, \quad \boxed{\cdot} = A_2$$



$k(x,y,1) = 0$, KDE

$k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ JE KVADRATICKÁ FORMA

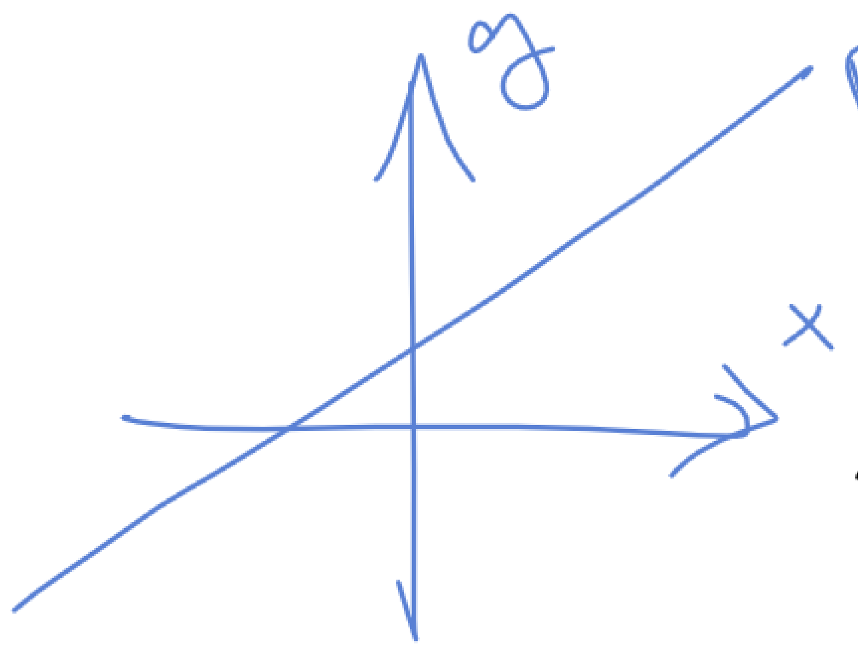
$(x,y,z) \mapsto ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2$

– CO KDYŽ $\mathrm{rank}(A_3) = 1$: PAK $\exists P$ REGULÁRNÍ TAKOVÁ, A $D = \begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$D = P^T A_3 P$, TJ. $A_3 = (P^{-1})^T \cdot \begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$

$(P^{-1})^T = (v \mid ? \mid ?)$

$= \pm\, v \cdot v^T$



$P = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : v_1 x + v_2 y + v_3 = 0 \}$

$\Rightarrow$ ROVNICE MÁ TVAR $\pm \left((x\ y\ 1)\, v\right)\left(v^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}\right) = (v_1 x + v_2 y + v_3)^2 = 0$

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

– CO KDYŽ $\mathrm{rank}\, A_3 = 2$: $\Rightarrow \exists\ A_3 = \underbrace{Q^T}_{\text{REG.}} \begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & \pm 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} Q = \pm v^T v \pm w^T w$

$\rightsquigarrow$ ROVNICI (PO PŘÍP. ZMĚNĚ $A_3 \rightsquigarrow -A_3$) DO TVARU BUĎ $(v_1 x + v_2 y + v_3)^2 + (w_1 x + w_2 y + w_3)^2 = 0$,

NEBO $(v_1 x + v_2 y + v_3)^2 - (w_1 x + w_2 y + w_3)^2 = 0$

SHODNÁ ZOBRAZENÍ V $\mathbb{R}^n$

- UVAŽUJME $\mathbb{R}^n$ SE STD. SKALÁRNÍM SOUČINEM
- BODY $\mathbb{R}^2$ $\longleftrightarrow$ JEJICH POLOHOVÉ VEKTORY

$\rightsquigarrow$ EUKLEIDOVSKÁ NORMA: $\|-\|^2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (POZIT. DEF. KV. FORMA)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

- DEF: ([ŠíR, 1.2]) ZOBRAZENÍ $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ JE SHODNÉ ZOBRAZENÍ (TÉŽ SHODNOST), POKUD

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n : \|g(u) - g(v)\| = \|u - v\|$$

- PŘ: (1) ORTOGONÁLNÍ LIN. ZOBRAZENÍ, TJ. $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $u \longmapsto Au$, A ORTOG. MATICE (T8.82, 8.83)

  (2) POSUNUTÍ: $p \in \mathbb{R}^n$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $u \longmapsto u + p$ (NENÍ LIN. PRO $p \neq 0$)

- POZOROVÁNÍ: $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ SHODNOSTI $\Rightarrow$ $h \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ SHODNOST

- **V** ([ŠíR, 1.4]): ZOBRAZENÍ $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ JE SHODNOST, PRÁVĚ KDYŽ g JE DÁNO PŘEDPISEM $g(u) = Au + p$, KDE $p \in \mathbb{R}^n$ A $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ JE ORTOGONÁLNÍ MATICE

- **DŮSL**: g SHODNOST $\Rightarrow$ g JE BIJEKCE A g^{-1} JE SHODNOST

$$\left(g(u) = Au + p \quad \rightsquigarrow \quad g^{-1}(v) = A^{-1}(v-p) = A^T(v-p) = A^T v - A^T p \right)$$

- **DK**: $\forall u: g(u) = Au + p \Rightarrow g$ SHODNOST : CVIČENÍ

g SHODNOST $\Rightarrow \exists A, p \ \forall u: g(u) = Au + p$:

- POLOŽÍME $p := g(0) \in \mathbb{R}^n$
- UVAŽUJME SHODNOST:
$$h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad u \mapsto g(u) - p, \quad 0 \mapsto 0$$
- CHCEME UKÁZAT, ŽE h JE ORTOGONÁLNÍ (LINEÁRNÍ!) ZOBRAZENÍ
- UKÁŽEME:
  - $\forall u: \ \|h(u)\| = \|h(u) - h(0)\| = \|u - 0\| = \|u\|$
  - $\forall u, v: \ h(u) \cdot h(v) = \frac{1}{2}\left(\|h(u)\|^2 + \|h(v)\|^2 - \|h(u) - h(v)\|^2 \right) = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2 \right) = u \cdot v$

$\Rightarrow (h(e_1), \dots, h(e_n))$ ORTONORMÁLNÍ BÁZE $\mathbb{R}^n$

- DK: POKRAČOVÁNÍ: h SHODNOST, $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $0 \mapsto 0$, $e_i \mapsto v_i$

$B = (v_1, \dots, v_n)$ ORTONORM. BÁZE.

- POLOŽÍME: $A = \left(v_1 \middle| \dots \middle| v_n \right)$ (NUTNĚ ORTOGONÁLNÍ MATICE)

- MUSÍME UKÁZAT, ŽE $h = f_A$, JINÝMI SLOVY, ŽE $\underbrace{(f_A)^{-1} \circ h}_{k} = id$

- CO VÍME O k?

$$k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad 0 \mapsto 0, \quad e_i \mapsto e_i \ \forall i \qquad \text{SHODNOST}$$

- DÁLE $\forall u: \|k(u)\| = \|u\|$
- VEZMEME $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, POLOŽME $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = k(u)$, CHCEME DK.: $u = v$
- VÍME: $\|v\| = \|u\|$, TJ: $v_1^2 + \dots + v_n^2 = u_1^2 + \dots + u_n^2$

$\forall i: \|\underbrace{v - e_i}_{k(u) - k(e_i)}\| = \|u - e_i\|$, TJ: $v_1^2 + \dots + (v_i - 1)^2 + \dots + v_n^2 = u_1^2 + \dots + (u_i - 1)^2 + \dots + u_n^2$

$\Rightarrow \forall i: \quad 2v_i - 1 = 2u_i - 1$

$\Rightarrow \forall i: \quad v_i = u_i \quad \Rightarrow v = u$ $\square$