REÁLNÉ KVADRATICKÉ FORMY

- PŘ: $f_2(x,y) := f_2\left(\binom{x}{y}\right) = 3x^2 + 2xy + 3y^2$ $\quad (f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$

- f-ORTOGONÁLNÍ BÁZE POMOCÍ SYMETRICKÝCH ÚPRAV:

- f_2 JE VYTVOŘENA SYM. BILIN. FORMOU $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $[f]_{K_2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
- $\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$, $\quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow G^T = [id]^B_{K_2}$

$\rightsquigarrow [f]_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$, $\quad B = \left(\binom{1}{0}, \binom{-\frac{1}{3}}{1} \right)$, $\quad [v]_B = \binom{\tilde{x}}{\tilde{y}} \rightsquigarrow f_2(v) = 3\tilde{x}^2 + \frac{8}{3}\tilde{y}^2$

- DALŠÍ SOUVISLOSTI

- PODLE VÝPOČTU NAHOŘE $D := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix} = GAG^T$, KDE

$A = [f]_{K_2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

ILUSTRACE T11.24 $\rightsquigarrow$

- TJ. PRO $L = G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$ PLATÍ $A = LDL^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ALE $L^T = [id]^{K_2}_B$, JINÝMI SLOVY PRO $[v]_B = \binom{\tilde{x}}{\tilde{y}}$, $(v)_{K_2} = \binom{x}{y}$

$\rightsquigarrow \binom{\tilde{x}}{\tilde{y}} = [v]_B = [id]^{K_2}_B [v]_{K_2} = L^T (v)_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \binom{x}{y} = \binom{x + \frac{1}{3}y}{y}$

$\rightsquigarrow f_2(v) = 3\tilde{x}^2 + \frac{8}{3}\tilde{y}^2 = 3 \cdot \left(x + \frac{1}{3}y\right)^2 + \frac{8}{3}y^2$

↳ DÁ DOSTAT ÚPRAVOU NA ÚPLNÉ ČTVERCE

– JAK MOC JEDNOZNAČNÁ JE DIAGONÁLNÍ MATICE SYM. BILIN. FORMY?

– POZOROVÁNÍ:
- T TĚLESO CHAR. $\neq 2$, $f: V \times V \to T$ SYM. BILIN. FORMA,
- $B = (v_1, \dots, v_n)$ BÁZE V NAD T
- PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE $[f]_B = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$
- VEZMĚME $C = (t_1 v_1, t_2 v_2, \dots, t_n v_n)$, KDE $t_1, \dots, t_n \in T$

$$\rightsquigarrow \quad [f]_C = \left(f(t_i v_i, t_j v_j)\right)_{i,j} = \left(t_i t_j f(v_i, v_j)\right)_{i,j} = \mathrm{diag}(t_1^2 a_1, t_2^2 a_2, \dots, t_n^2 a_n)$$

– POZOROVÁNÍ: JE-LI $T = \mathbb{C}$, MŮŽEME PRO KAŽDÉ $a_i \neq 0$ VZÍT $t_i \in \mathbb{C}$: $t_i^2 a_i = 1$

– PRO KAŽDOU SYM. BILIN. FORMU NAD $\mathbb{C}$ NA KON. GEN. V. P. V
$\exists$ BÁZE B PROSTORU V TAKOVÁ, ŽE $[f]_B = (\underbrace{1, \dots, 1}_{r = \mathrm{rank}(f)}, 0, \dots, 0)$.

– POZOROVÁNÍ: JE-LI $T = \mathbb{R}$, MŮŽEME PRO KAŽDÉ $a_i \neq 0$ VZÍT $t_i = \sqrt{\frac{1}{|a_i|}} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ PRO KAŽDOU SYM. BILIN. FORMU NAD $\mathbb{R}$ NA KON. GEN. V. P. V
$\exists$ BÁZE B PROSTORU V TAKOVÁ, ŽE $[f]_B = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{l}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m})$

k !! $n_+(f)$ POZITIVNÍ INDEX SETRVAČNOSTI

l !! $n_-(f)$ NEGATIVNÍ INDEX SETRVAČNOSTI

m !! $n_0(f)$ NULITA f

– VÍME: $k + l = \mathrm{rank}(f)$

– SIGNATURA f: $(n_0(f), n_+(f), n_-(f))$

- **V 11.26** (ZÁKON SETRVAČNOSTI REÁLNÝCH KVADRATICKÝCH FOREM, INERTIA LAW)
  BUĎ V KON. DIM. REÁLNÝ VEKTOROVÝ PROSTOR, $f: V \times V \to \mathbb{R}$ SYMETRICKÁ BILIN. FORMA A

  $C = (u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l, w_1, \dots, w_m)$ TAKOVÁ BÁZE V, ŽE $[f]_C = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{k}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{l}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m})$,

  $C' = (u'_1, \dots, u'_{k'}, v'_1, \dots, v'_{l'}, w'_1, \dots, w'_{m'})$ TAKOVÁ BÁZE V, ŽE $[f]_{C'} = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{k'}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{l'}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m'})$.

  PAK NUTNĚ $k = k'$, $l = l'$, $m = m'$.

- **DK**: • VÍME: $m = m' = \underbrace{\dim V}_{n} - \operatorname{rk}(f)$
  - BUĎ PRO SPOR $k > k'$ (PŘÍPAD $k < k'$ SE DOKÁŽE ANALOGICKY)
  - POLOŽME $U = LO\{u_1, \dots, u_k\} \leq V$, $W = LO\{v'_1, \dots, v'_{l'}, w'_1, \dots, w'_{m'}\} \leq V$
  - <u>POZOROVÁNÍ</u>: $U \cap W \neq \{0\}$
    - TOTIŽ $\dim(U \cap W) = \underbrace{\dim U}_{k > k'} + \underbrace{\dim W}_{l' + m'} - \underbrace{\dim(U + W)}_{\leq n} > \underbrace{k'} + \underbrace{l' + m'} - n = 0$
  - VEZMĚME TEDY $0 \neq x \in U \cap W = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k$
    $= b_1 v'_1 + \dots + b_{l'} v'_{l'} + c_1 w'_1 + \dots + c_{m'} w'_{m'}$

$\Rightarrow f_2(x) = [x]_C^T [f]_C [x]_C = 1 \cdot a_1^2 + \dots + 1 \cdot a_k^2 > 0$

$\Rightarrow f_2(x) = [x]_{C'}^T [f]_{C'} [x]_{C'} = (-1) b_1^2 + \dots + (-1) \cdot b_{l'}^2 + 0 \cdot c_1^2 + \dots + 0 \cdot c_{m'}^2 \leq 0$

<u>SPOR!</u> $\square$

- POZITIVNĚ (SEMI)DEFINITNÍ REÁLNÉ SYM. BILIN. (A KVADRATICKÉ) FORMY

- DEF 11.30: V REÁLNÝ VEKTOROVÝ PROSTOR, $f: V \times V \to \mathbb{R}$ SYM. BILIN. FORMA
PAK ŘEKNEME, ŽE
  - f JE POZITIVNĚ DEFINITNÍ, POKUD $\forall 0 \neq x \in V: f_2(x) > 0$
  - f JE POZITIVNĚ SEMIDEFINITNÍ, POKUD $\forall x \in V: f_2(x) \geq 0$

- POZOROVÁNÍ 11.32: BUĎ V KONEČNĚ GENEROVANÝ A B BÁZE V.
PAK (f JE POZITIVNĚ (SEMI)DEFINITNÍ SYM. BILIN. FORMA) $\iff$ ($[f]_B$ JE POZITIVNĚ (SEMI)DEFINITNÍ MATICE)

- PLYNE OKAMŽITĚ Z TOHO, ŽE $\forall x \in V: \quad f_2(x) = [x]_B^T [f]_B [x]_B$

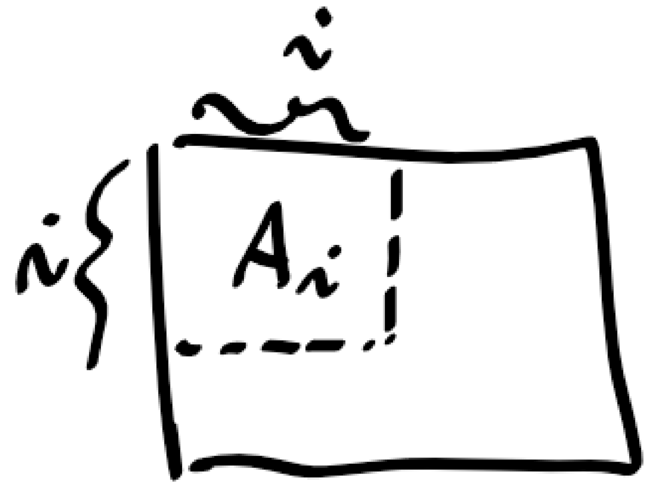
- POZN: SKALÁRNÍ SOUČIN JE VLASTNĚ TOTÉŽ CO POZITIVNĚ DEF. SYM. BILIN. FORMA

- T 11.31: BUĎ V VEKTOROVÝ PROSTOR NAD $\mathbb{R}$ DIMENZE n A BUĎ $f: V \times V \to \mathbb{R}$ SYM. BILIN. FORMA. PAK
  1. f POZITIVNĚ DEFINITNÍ $\iff n_+(f) = n$ $\quad (\iff n_-(f) = n_0(f) = 0)$
  2. f POZITIVNĚ SEMIDEFINITNÍ $\iff n_-(f) = 0$

- DK: - VEZMEME BÁZI B PROSTORU V TAKOVOU, ŽE $[f]_B = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n_+(f)}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n_-(f)}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n_0(f)})$
  - VŠE PLYNE Z TOHO, ŽE PRO $[x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ PLATÍ $f_2(x) = x_1^2 + \ldots + x_{n_+(f)}^2 - x_{n_+(f)+1}^2 - \ldots - x_{n_+(f)+n_-(f)}^2$

– CHARAKTERIZACE POZITIVNĚ DEFINITNÍCH MATIC

– <u>V11.33</u>: BUĎ A REÁLNÁ SYMETRICKÁ MATICE ŘÁDU n. PAK NTJE:

1. A JE POZITIVNĚ DEFINITNÍ.
2. (SYLVESTROVO KRITÉRIUM)
   $\forall i \in \{1,\dots,n\}: \underbrace{\det A_i}_{\text{HLAVNÍ MINORY}} > 0$, KDE $i\{$  $: A$
3. GAUSSOVA ELIMINACE A PROBĚHNE BEZ PROHAZOVÁNÍ ŘÁDKŮ A VŠECHNY PIVOTY JSOU KLADNÉ
4. EXISTUJE VYJÁDŘENÍ $A = LDL^T$, KDE L JE DOLNÍ Δ S 1 NA DIAGONÁLE A D MÁ KLADNÉ PRVKY NA DIAGONÁLE
5. (CHOLESKÉHO ROZKLAD) $\exists R$ DOLNÍ Δ REGULÁRNÍ TAKOVÁ, ŽE
   $A = RR^T$

–<u>DK</u>: <u>1 ⇒ 2</u>: – MÁME-LI $x \in \mathbb{R}^n$ TVARU $0 \neq \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, OZNAČÍME-LI $y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^i$, A JE-LI A POZIT. DEF., PAK $0 < x^T A x = y^T A_i y$

$\Rightarrow A_i$ POZIT. DEF. $\forall i$

– PODLE DŮSL 10.16 (ORTOG. DIAGONALIZACE) $\exists U_i$ ORTOG. : $U_i^T A_i U_i = \text{diag}(\underbrace{\lambda_1,\dots,\lambda_i}_{\text{VL. Č. } A_i})$

– PAK ALE $\det A_i = \lambda_1 \cdots \lambda_i$ A $\lambda_1,\dots,\lambda_i > 0$ PODLE V 10.20

(2) $\Rightarrow$ (3): • PŘEDP., ŽE $\det A_i > 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$

- (2) $\Rightarrow$ (3) DOKÁŽEME INDUKCÍ PODLE n

POZIT. DEF

- $$\begin{pmatrix} a_{11} & * \cdots * \\ * & \\ \vdots & \\ * & \end{pmatrix} \overset{ERÚ}{\sim} \begin{pmatrix} a_{11} & * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{pmatrix} \overset{ESÚ}{\sim} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$a_{11} > 0$

- POZOROVÁNÍ: B POZITIVNĚ DEF., PROTOŽE $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ JE MATICE SYM. BIL. FORMU $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^T A y$ VZHLEDEM K JINÉ BÁZI

$\rightsquigarrow$ POUŽIJEME IND. PŘEDPOKLAD NA B

---

(3) $\Rightarrow$ (4): PŘESNĚ T 11.24 (A JEHO DŮKAZ)

(4) $\Rightarrow$ (5): PŘEDP. $A = L D L^T$, POLOŽÍME $R = L\sqrt{D}$ $\Rightarrow$ $RR^T = L\sqrt{D}(L\sqrt{D})^T = L\underbrace{\sqrt{D}\sqrt{D}^T}_{D}L^T = A$

(5) $\Rightarrow$ (1): BYLO: $\forall\, 0 \neq x \in \mathbb{R}^n$: $x^T A x = x^T R R^T x = R^T x \cdot R^T x > 0$