BÁZE ORTOGONÁLNÍ VZHLEDEM K BILINEÁRNÍM FORMÁM

- POSLEDNĚ: T11.18, KTERÉ LZE INTERPRETOVAT NÁSLEDOVNĚ:
  BUĎ T TĚLESO CHARAKTERISTIKY $\neq 2$ A V VEKTOROVÝ PROSTOR NAD T.
  PAK MÁME BIJEKCI

$$\{ g: V \to T \text{ KVADRATICKÁ FORMA} \} \longleftrightarrow \{ f: V\times V \to T \text{ SYMETRICKÁ BILINEÁRNÍ FORMA} \}$$

$$(f_2 : V \to T) \longleftarrow (f: V\times V \to T)$$

$$(g: V \to T) \longmapsto \boxed{\begin{array}{l} V\times V \longrightarrow T \\ (x,y) \longmapsto \frac{1}{2}\left(g(x+y) - g(x) - g(y)\right) \end{array}}$$

SYMETRICKÁ BILINEÁRNÍ FORMA PŘÍSLUŠNÁ g

- JE-LI NAVÍC V KONEČNĚ GENEROVANÝ A B BÁZE V, PAK MÁME-LI KVADRATICKOU FORMU $g: V \to T$, MŮŽEME g POPSAT SYMETRICKOU MATICÍ $[f]_B$, KDE f JE PŘÍSLUŠNÁ SYM. BILIN. FORMA.
- TJ: $\forall x \in V$: $g(x) = [x]_B^T [f]_B [x]_B$

- PŘ: $T = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $B = K_3$

$$g((x_1,x_2,x_3)^T) = x_1^2 - 5x_1x_3 + 3x_2^2$$

$$f((x_1,x_2,x_3)^T, (y_1,y_2,y_3)^T) = x_1y_1 - \frac{5}{2}x_1y_3 - \frac{5}{2}x_3y_1 + 3x_2y_2$$

$$\rightsquigarrow [f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- KDY SE DÁ KVADRATICKÁ FORMA POPSAT DIAGONÁLNÍ MATICÍ?

- CHCEME: MÁME-LI $q: V \to T$ KVADRATICKOU FORMU, $f: V \times V \to T$ PŘÍSLUŠNOU BILINEÁRNÍ SYM. FORMU, HLEDÁME BÁZI B PROSTORU V TAKOVOU, ABY

$$[f]_B = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n) \qquad (a_1, \dots, a_n \in T, \; n = \dim V)$$

TJ. PRO BÁZOVÉ VEKTORY, OZNAČÍME-LI $B = (v_1, \dots, v_n)$, MÁ PLATIT

$$f(v_i, v_j) = [v_i]^T [f]_B [v_j] = e_i^T \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} e_j = a_i \underbrace{\delta_{ij}}_{\text{KRONECKEROVA DELTA}}$$

SPECIÁLNĚ MÁ BÝT $f(v_i, v_j) = 0 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \; i \neq j.$

- DEF 11.20: BUĎ V VEKTOROVÝ PROSTOR NAD T, $f: V \times V \to T$ SYM. BILIN. FORMA. ŘEKNEME, ŽE VEKTORY $v, w \in V$ JSOU f-ORTOGONÁLNÍ, POKUD $f(v, w) = 0$. $(= f(w, v))$

ZNAČÍME: $v \perp_f w$.

POSLOUPNOST (NEBO BÁZE) VEKTORŮ $(v_1, \dots, v_n)$ PROSTORU V JE f-ORTOGONÁLNÍ, POKUD $v_i \perp_f v_j \quad \forall i \neq j$.

– HODNOST SYMETRICKÉ BILINEÁRNÍ / KVADRATICKÉ FORMY (PŘEDP. $\mathrm{char}\, T \neq 2$)

- BUĎ V KON. GEN. VEKTOROVÝ PROSTOR, B, C BÁZE, $f: V \times V \to T$ (SYM.) BILIN. FORMA
- PAK $[f]_C = P^T [f]_B P$, KDE $P = [id]^C_B$ JE REGULÁRNÍ
- TJ. $\mathrm{rank}([f]_C) = \mathrm{rank}([f]_B)$

DEF. 11.21

- **HODNOST f** PAK DEFINUJEME JAKO HODNOST $[f]_B$ VZHLEDEM K LIBOVOLNÉ BÁZI B (ZNAČÍME $\mathrm{rank}(f)$)
- **HODNOST KVADRATICKÉ FORMY $g: V \to T$** DEFINUJEME JAKO HODNOST PŘÍSLUŠNÉ SYM. BILIN. FORMY (ZNAČÍME $\mathrm{rank}(g)$)

- POKUD JE $[f]_B$ REGULÁRNÍ, TJ. $\mathrm{rank}(f) = \dim V$, PAK ŘEKNEME, ŽE f JE **REGULÁRNÍ** / **NEDEGENEROVANÁ** (PODOBNĚ PRO g)
- KDYŽ $[f]_B$ JE DIAGONÁLNÍ $\leadsto$ $\mathrm{rank}(f) = \#$ NENULOVÝCH ČLENŮ NA DIAGONÁLE $[f]_B$

– PŘ: $T = \mathbb{Z}_3$, $V = \mathbb{Z}_3^3$, $\underbrace{g((x_1, x_2, x_3)^T)}_{g(x_1, x_2, x_3)} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ KVADRATICKÁ FORMA $\leadsto$ SYM. MATICE: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ (PŘÍSLUŠNÉ SYM. BILIN. FORMY f VZHLEDEM KE K_3)

ALE: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp_f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

– EXISTENCE f-ORTOGONÁLNÍCH BÁZÍ (METODA SYMETRICKÝCH ÚPRAV)

– **V11.23**: BUĎ T TĚLESO CHARAKTERISTIKY RŮZNÉ OD 2.
JE-LI V KONEČNĚ GENEROVANÝ VEKTOROVÝ PROSTOR
A $f: V \times V \to T$ SYMETRICKÁ BILIN. FORMA, PAK
EXISTUJE f-ORTOGONÁLNÍ BÁZE B (TJ. $[f]_B$ JE DIAGONÁLNÍ).

– **DK**:

OSNOVA DŮKAZU

– VEZMEME NEJPRVE LIBOVOLNOU BÁZI C PROSTORU V, OZNAČME $A = [f]_C$ (SYMETRICKÁ MATICE ŘÁDU $n = \dim V$)

– NAJDEME REGULÁRNÍ MATICI G TAKOVOU, ŽE $D = GAG^T$ JE DIAGONÁLNÍ ($G = E_\ell \cdots E_1$, $G^T = E_1^T E_2^T \cdots E_\ell^T$, KDE E_i ELEMENTÁRNÍ MATICE)

$$D = E_\ell \cdots (E_2(E_1 A E_1^T) E_2^T) \cdots E_\ell^T$$

– TJ. NA A APLIKUJEME TZV. SYMETRICKÉ ELEM. ÚPRAVY

– ZVOLÍME BÁZI $\underset{(v_1, \ldots, v_n)}{B}$ TAK, ABY $G^T = [id]^B_C$ $\left(\Rightarrow [f]_B = GAG^T = D\right)$

$$\left([v_1]_C \mid \ldots \mid [v_n]_C\right)$$

$\Rightarrow B$ f-ORTOGONÁLNÍ

V11.23: BUĎ T TĚLESO CHARAKTERISTIKY RŮZNÉ OD 2. JE-LI V KONEČNĚ GENEROVANÝ VEKTOROVÝ PROSTOR A $f: V \times V \to T$ SYMETRICKÁ BILIN. FORMA, PAK EXISTUJE f-ORTOGONÁLNÍ BÁZE B (TJ. $[f]_B$ JE DIAGONÁLNÍ).

DK (POKRAČOVÁNÍ):

- UKÁŽEME, ŽE EXISTUJE POSLOUPNOST SYMETRICKÝCH ELEM. ÚPRAV SYMETRICKÉ MATICE A ŘÁDU n TAKOVÁ, ŽE

$$A \sim_s E_1 A E_1^T \sim_s E_2 E_1 A E_1^T E_2^T \sim_s \dots \sim_s D \text{ DIAGONÁLNÍ}$$

- DŮKAZ POVEDEME INDUKCÍ PODLE n
- $n=1$: TRIVIÁLNÍ (A JE UŽ DIAGONÁLNÍ)
- $n>1$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{PŘÍPAD 1}} \exists i: a_{ii} \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ & a_{ii} & \\ & & \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} a_{ii} & * \; * \; \dots \; * \\ * & \\ \vdots & B \\ * & \end{pmatrix} \sim_s \dots \sim_s \begin{pmatrix} a_{ii} & 0 \; \dots \\ 0 & \\ \vdots & C \end{pmatrix}$$

$-\frac{*}{a_{ii}}$

PAK POUŽIJEME INDUKČNÍ PŘEDPOKLAD NA C

$\xrightarrow{\text{PŘÍPAD}} \forall i: a_{ii} = 0$, UVAŽUJME $A \neq 0$, TJ. $\exists i \neq j: a_{ij} \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & 0 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2a_{ij} & \\ & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}$$

PŘEVEDLI JSME PROBLÉM NA PŘÍPAD 1

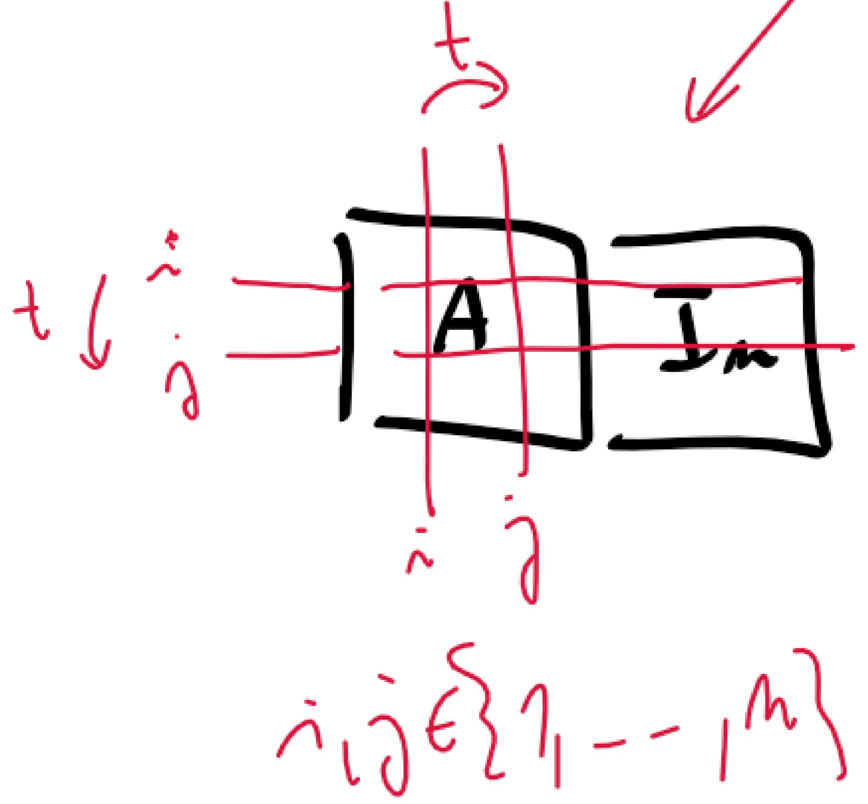
□

– JAK ZAZNAMENAT POSLOUPNOST ELEMENTÁRNÍCH SYMETRICKÝCH ÚPRAV?

– BUĎ $A \in T^{n\times n}$ SYMETRICKÁ $(\operatorname{char}(T) \neq 2)$

– MÍSTO NA A BUDEME ÚPRAVY APLIKOVAT $\underbrace{(A \mid I_n)}_{2n}\}n$

$$(A \mid I_n) \overset{s}{\sim} E_1 (A \mid I_n) \left(\begin{array}{c|c} E_1^T & 0 \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right) = (E_1 A E_1^T \mid E_1) \overset{s}{\sim} (E_2 E_1 A E_1^T E_2^T \mid E_2 E_1) \overset{s}{\sim} \dots$$



$$\overset{s}{\sim} (G A G^T \mid G)$$

$$(G = E_\ell \cdots E_2 E_1)$$

– POZN: $A \overset{s}{\sim} E_1 A E_1^T \overset{s}{\sim} \dots \sim (E_\ell \cdots (E_2 (E_1 \; A \; E_1^T) E_2^T) \cdots E_\ell^T)$

$$= (\cdots((E_\ell \cdots (E_2 (E_1 A)) \cdots) E_1^T) \cdots E_\ell^T)$$

– T11.24: BUĎ $A \in T^{n \times n}$ SYMETRICKÁ MATICE NAD TĚLESEM T CHARAKTERISTIKY $\neq 2$. PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE PŘI GAUSSOVĚ ELIMINACI A NEMUSÍME PROHAZOVAT ŘÁDKY. PAK $\exists$ DOLNÍ TROJÚHELNÍKOVÁ MATICE $L \in T^{n \times n}$ A DIAGONÁLNÍ MATICE $D \in T^{n \times n}$ TAKOVÁ, ŽE

$$A = L D L^T$$

– DK: – PROVEDEME GAUSSOVU ELIMINACI A:

$$A \sim E_1 A \sim \dots \sim \overbrace{E_\ell \cdots E_1}^{G} A = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

SYMETRICKÁ   NE NUTNĚ SYM.

$\bullet$ = NUTNĚ $\neq 0$ (Z PŘEDPOKLADU)

$$\begin{array}{c} \\ j \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & \\ t_i & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = E_i$$ = ODPOVÍDAJÍ PŘIČTENÍ t_i-NÁSOBKU i-TÉHO ŘÁDKU K j-TÉMU, $i<j$

$\Rightarrow$ E_i JSOU DOLNÍ Δ $\Rightarrow$ G DOLNÍ Δ

– PODÍVÁME SE NA $D = GAG^T$ $\rightsquigarrow$ DIAGONÁLNÍ

– POLOŽÍME $L = G^{-1}$, TJ. $A = LDL^T$ □