BILINEÁRNÍ A KVADRATICKÉ FORMY – POKRAČOVÁNÍ

– **DEF 11.9:** MATICÍ BILIN. FORMY $f: V \times V \to T$ VZHLEDEM K BÁZI $B = (v_1, \dots, v_n)$ PROSTORU V ROZUMÍME MATICI TYPU $n \times n$ NAD T DEFINOVANOU JAKO $[f]_B = \big(f(v_i, v_j)\big)_{ij}$.

$$[f]_B = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} f(v_1, v_1) & f(v_1, v_2) & \cdots & f(v_1, v_n) \\ f(v_2, v_1) & f(v_2, v_2) & \cdots & f(v_2, v_n) \\ \vdots & & & \vdots \\ f(v_n, v_1) & f(v_n, v_2) & \cdots & f(v_n, v_n) \end{pmatrix}\right\} n}_{n}$$

– **T 11.10:** BUĎ $f: V \times V \to T$ BILINEÁRNÍ FORMA NA KONEČNĚ GENEROVANÉM VEKTOROVÉM PROSTORU V NAD T A BUĎ $B = (v_1, \dots, v_n)$ BÁZE V. PAK:

1. $\forall u, w \in V: \quad f(u, w) = [u]_B^T \, [f]_B \, [w]_B$

   $$\underbrace{\boxed{[u]_B^T}}_{n} \; \underbrace{\boxed{[f]_B}}_{n} \; \left.\boxed{[w]_B}\right\} n$$

2. JE-LI $A \in T^{n \times n}$ TAKOVÁ, ŽE $\forall u, w \in V: f(u, w) = [u]_B^T \, A \, [w]_B$, PAK $A = [f]_B$.

– **DK:** (1) POSLEDNĚ, (2) $u = v_i$, $w = v_j \Rightarrow f(v_i, v_j) = e_i^T A \, e_j = a_{ij}$, $A = (a_{ij})$

– T11.11: V KON. GEN. VEKTOROVÝ PROSTOR S BÁZÍ $B=(v_1,\dots,v_n)$. JE-LI $A\in T^{n\times n}$ ($n=\dim V$), PAK ZOBRAZENÍ

$$(*)\qquad f: V\times V \longrightarrow T$$
$$(u,w)\longmapsto [u]_B^T\,A\,[w]_B$$

$$\underbrace{[u]_B^T}_{n}\ \underbrace{\boxed{A}}_{n}\ \left.[w]_B\right\}n$$

JE BILINEÁRNÍ FORMOU A $[f]_B = A$.

– DK: – TO, ŽE f JE BILINEÁNÍ, PLYNE Z VLASTNOSTÍ MATICOVÉHO NÁSOBENÍ A TOHO, ŽE

$$\forall u_1,u_2\in V\quad \forall t\in T: \qquad [u_1+u_2]_B = [u_1]_B+[u_2]_B \ \ \& \ \ [t u_1]_B = t\,[u_1]_B$$

– TEDY: MÁME-LI NA V BÁZI $B=(v_1,\dots,v_n)$, PAK MÁME BIJEKCI

$$\left\{ \begin{array}{l} f: V\times V\to T \\ \text{BILIN. FORMY}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{MATICE} \\ A\in T^{n\times n}\end{array}\right\}$$

$$f \longmapsto [f]_B$$

$$\text{ZOBRAZENÍ } (*) \longleftarrow\!\!\!\shortmid\ A$$

– TERMOLOGIE: BUĎ f DÁNO VZHLEDEM K $B=(v_1,\dots,v_n)$ MATICÍ $A=(a_{ij})_{n\times n}$. PAK PRO $x,y\in V$, $[x]_B=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $[y]_B=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ PLATÍ

$$f(x,y) = [x]_B^T\,A\,[y]_B = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,x_i\,y_j$$

← ANALYTICKÉ VYJÁDŘENÍ f

ZMĚNA VYJÁDŘENÍ f PŘI ZMĚNĚ BÁZE

- BUĎ V KON. GEN. VEKTOROVÝ PROSTOR S BÁZEMI B A C
- BUĎ $f: V \times V \to T$ BILINEÁRNÍ FORMA

- **T 11.13:** ZA TĚCHTO PŘEDPOKLADŮ PLATÍ, ŽE

$$[f]_C = P^T [f]_B P \text{, KDE } P = [id]_B^C$$

- **DK:**
  - BUĎTE $x, y \in V$
  - PAK $[x]_B = \underbrace{[id]_B^C}_{P} [x]_C$, $[y]_B = \underbrace{[id]_B^C}_{P} [y]_C$
  - ODTUD

$$[x]_B^T [f]_B [y]_B = f(x,y) = [x]_C^T [f]_C [y]_C$$

$$\| $$

$$(P[x]_C)^T [f]_B (P[y]_C) = [x]_C^T (P^T [f]_B P) [y]_C$$

- JELIKOŽ TOTO PLATÍ $\forall x, y \in V$, PAK Z JEDNOZNAČNOSTI MATICE f VZHLEDEM K C DOSTANEME $[f]_C = P^T [f]_B P$ $\square$

- **POZOR:** PRO LINEÁRNÍ OPERÁTOR $g: V \to V$ PLATÍ: $[g]_C = P^{-1} [g]_B P$, KDE $P = [id]_B^C$.

- SYMETRICKÉ A ANTISYMETRICKÉ BILINEÁRNÍ FORMY

- **DEF 11.14:** BUĎ $f: V \times V \to T$ BILINEÁRNÍ FORMA NA LIBOVOLNÉM V.P. NAD T. ŘEKNEME, ŽE
  - f JE SYMETRICKÁ, POKUD $\forall x, y \in V$: $f(x,y) = f(y,x)$
  - f JE ANTISYMETRICKÁ, POKUD $\forall x, y \in V$: $f(x,y) = -f(y,x)$

- **PŘ:** (1) $T = \mathbb{R}$, V JE V.P. SE SKALÁRNÍM SOUČINEM, PAK

$$f: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto \langle x, y \rangle$$

JE SYMETRICKÁ.

---

(2) T LIBOVOLNÉ, $V = T^2$, PAK

$$g: T^2 \times T^2 \longrightarrow T, \quad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \longmapsto \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

JE ANTISYMETRICKÁ.

- **T 11.15:** BUĎ V KONEČNĚ GEN. V.P. S BÁZÍ B, BUĎ $f: V \times V \to T$ BILIN. FORMA. PAK:
  1. f JE SYMETRICKÁ $\iff$ $[f]_B$ JE SYMETRICKÁ MATICE,
  2. f JE ANTISYMETRICKÁ $\iff$ $[f]_B$ JE ANTISYMETRICKÁ MATICE.

- **DK:** (1) $\Rightarrow$: f SYMETRICKÁ $\Rightarrow$ $[f]_B^T = (f(v_i, v_j))^T_{n \times n} = (f(v_j, v_i))_{n \times n} \overset{f \text{ SYM.}}{=} (f(v_i, v_j))_{n \times n} = [f]_B$

$\Leftarrow$: $[f]_B$ SYM. MATICE $\Rightarrow$ $f(y,x) = \underbrace{[y]_B^T [f]_B [x]_B}_{\text{MATICE TYPU } 1 \times 1} = ([y]_B^T [f]_B [x]_B)^T = [x]_B^T \underbrace{[f]_B^T}_{[f]_B} [y]_B = f(x,y)$ $\square$

$x, y \in V$

(2) PODOBNĚ

– VYJÁDŘENÍ OBECNÉ BILIN. FORMY JAKO SOUČTU SYMETRICKÉ A ANTISYMETRICKÉ

– **POZN**: V V.P., T TĚLESO $\rightsquigarrow$ BILINEÁRNÍ FORMY $V\times V \to T$ MŮŽEME SČÍTAT A NÁSOBIT SKALÁREM:

$$f, g : V\times V \to T \quad \rightsquigarrow \quad f+g : \begin{array}{l} V\times V \longrightarrow T \\ (x,y) \longmapsto f(x,y)+g(x,y) \end{array}$$

$$t \in T \quad \rightsquigarrow \quad t\cdot f : \begin{array}{l} V\times V \longrightarrow T \\ (x,y) \longmapsto t\cdot f(x,y) \end{array}$$

VLASTNĚ MNOŽINA $\{f : V\times V \to T : f \text{ BILIN. FORMA}\}$ TVOŘÍ VEKTOROVÝ PROSTOR.

– **TM. 16**: BUĎ V VEKTOROVÝ PROSTOR NAD TĚLESEM CHARAKTERISTIKY $\neq 2$.
PAK KAŽDÁ BILINEÁRNÍ FORMA $f : V\times V \to T$ LZE JEDNOZNAČNĚ ZAPSAT JAKO $f = f_s + f_a$, KDE $f_s : V\times V \to T$ JE SYMETRICKÁ A $f_a : V\times V \to T$ JE ANTISYMETRICKÁ.
NAVÍC $f_s(x,y) = \dfrac{f(x,y)+f(y,x)}{2}$ A $f_a(x,y) = \dfrac{f(x,y)-f(y,x)}{2}$.

– **DK**: – JEDNODUŠE $\forall x,y : f(x,y) = f_s(x,y) + f_a(x,y)$, $f_s(x,y) = f_s(y,x)$, $f_a(x,y) = -f_a(y,x)$
PRO f_s, f_a ZADANÉ VZORCI $f_s(x,y) = \frac{1}{2}(f(x,y)+f(y,x))$, $f_a(x,y) = \frac{1}{2}(f(x,y)-f(y,x))$

– KDYBY $f = \underbrace{f_s}_{\text{SYM.}} + \underbrace{f_a}_{\text{ANTI.}} = \underbrace{g_s}_{\text{SYM.}} + \underbrace{g_a}_{\text{ANTI}} \Rightarrow h := \underbrace{f_s - g_s}_{\text{SYM}} = \underbrace{g_a - f_a}_{\text{ANTI.}} \Rightarrow \forall x,y : h(x,y) = h(y,x) = -h(x,y)$

$\Rightarrow \forall x,y : 2h(x,y) = 0 \overset{\text{CharT} \neq 2}{\Rightarrow} \forall x,y : h(x,y) = 0$

$\Rightarrow f_s = g_s,\ f_a = g_a$

– POZOROVÁNÍ: V KON. GEN. S BÁZÍ B, $f, g : V \times V \to T$ BILIN., $t \in T$, PAK $[f+g]_B = [f]_B + [g]_B$, $[tf]_B = t\,[f]_B$

– PŘ: BUĎ $V = T^2$, T LIBOVOLNÉ TĚLESO CHAR. $\neq 2$, B KAN. BÁZE

BUĎ $f : V \times V \to T$ ZADANÁ MATICÍ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ VZHLEDEM K B, TJ.

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_2$$ (ANALYT. VYJÁDŘENÍ)

URČÍME $f = f_s + f_a$.

V MATICOVÉM ZÁPISE

$$[f_s]_B = \frac{[f]_B + [f]_B^T}{2} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$[f_a]_B = \frac{[f]_B - [f]_B^T}{2} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ V ANALYTICKÉM VYJÁDŘENÍ:

$$f_s\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} x_1 y_2 + \frac{1}{2} x_2 y_1$$

$$f_a\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} x_1 y_2 - \frac{1}{2} x_2 y_1$$

– POZN! T 11.16 ŘÍKÁ PŘESNĚ, ŽE (char $T \neq 2$)

$$\{f : V \times V \to T : f \text{ BILIN.}\} = \{f : V \times V \to T : f \text{ BILIN. SYMETRICKÁ}\} \oplus \{f : V \times V \to T : f \text{ BILIN. ANTISYM. FORMA}\}$$

– KVADRATICKÉ FORMY

– **T 11.18:** BUĎ T TĚLESO CHAR. $\neq 2$. MÁME-LI BILINEÁRNÍ FORMY $f, g : V \times V \to T$, V VEKTOROVÝ PROSTOR NAD T, PAK

$$f_2 = g_2 \iff f_s = g_s$$

$(f_2, g_2 : V \to T)$ $\quad$ $(f_s, g_s : V \times V \to T$ SYMETRICKÉ$)$

NAVÍC PLATÍ $\forall x, y \in V$: $f_s(x,y) = \frac{1}{2}\left(f_2(x+y) - f_2(x) - f_2(y)\right)$.

– **Dk:** $\Leftarrow$: PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE $f_s = g_s$, KDE $f = f_s + f_a$, $g = g_s + g_a$

PAK $\forall x \in V$: $f_2(x) = f(x,x) = f_s(x,x) + f_a(x,x) = f_s(x,x) = g_s(x,x) = \dots = g(x,x) = g_2(x)$

$f_a(x,x) = -f_a(x,x)$

$\Rightarrow 2 f_a(x,x) = 0$

$\xRightarrow{char(T) \neq 2} f_a(x,x) = 0$

$\Rightarrow$: – PLYNE Z TOHO, ŽE $\forall x, y$ PLATÍ

$\frac{1}{2}\left(f_2(x+y) - f_2(x) - f_2(y)\right) = \frac{1}{2}\left(f_s(x+y, x+y) - f_s(x,x) - f_s(y,y)\right) =$

$\frac{1}{2}\left(\cancel{f_s(x,x)} + f_s(x,y) + f_s(y,x) + \cancel{f_s(y,y)} - \cancel{f_s(x,x)} - \cancel{f_s(y,y)}\right) = \frac{1}{2}\left(f_s(x,y) + f_s(x,y)\right) = f_s(x,y)$

$\square$