- TERMÍNY ZKOUŠEK UŽ BYLY VYPSÁNY V SISU!
- OPRAVNÝ ZÁPOČTOVÝ TEST: ÚTERÝ 15.6. OD 9^{00}.

BILINEÁRNÍ A KVADRATICKÉ FORMY

- MOTIVACE: DOTEĎ JSME SE ZABÝVALI LINEÁRNÍMI ZOBRAZENÍMI, NAPŘ.:

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad , a_i \in \mathbb{R} \qquad \text{(LINEÁRNÍ FORMA)}$$

CÍL: KVADRATICKÉ FORMY

$$g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \sum_{i \leq j} a_{ij} x_i x_j \quad , a_{ij} \in \mathbb{R} \qquad \text{(KVADRATICKÁ FORMA)}$$

KONKRÉTNÍ PŘÍKLAD: $g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto x^2 - 3xy + z^2$$

- FORMA NA ARITMETICKÉM VEKTOROVÉM PROSTORU: ZOBRAZENÍ $T^n \to T$ DANÉ POLYNOMEM, JEHOŽ VŠECHNY ČLENY MAJÍ STEJNÝ STUPEŇ

BILINEÁRNÍ FORMY

- **DEF 11.1:** BUĎ V VEKTOROVÝ PROSTOR NAD TĚLESEM T. BILINEÁRNÍ FORMOU NA V ROZUMÍME ZOBRAZENÍ
$$f: V\times V \longrightarrow T,$$
KTERÉ SPLŇUJE:

(BL1) $\forall v,w\in V \quad \forall t\in T: \quad f(tv,w) = t\, f(v,w) = f(v,tw)$

(BL2) $\forall u,v,w\in V: \quad f(u+v,w) = f(u,w)+f(v,w)$ A
$$f(w,u+v) = f(w,u)+f(w,v).$$

- **PŘÍKLAD/VAROVÁNÍ 11.4:**
  - KDYŽ $T=\mathbb{R}$, V JE V.P. SE SKALÁRNÍM SOUČINEM $\langle -,-\rangle$, PAK
$$f: V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v,w) \longmapsto \langle v,w\rangle$$

$f_2 : V \longrightarrow \mathbb{R}$
$v \longmapsto \langle v,v\rangle = \|v\|^2$

JE BILINEÁRNÍ (POKUD $V=\mathbb{R}^n$, $\langle -,-\rangle = \cdots$, PAK $f\left(\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right)=\sum x_i y_i$).

$f_2\left(\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right) = \sum x_i^2$.

  - **POZOR:** (1) POKUD $T=\mathbb{C}$ A V JE V.P. SE SKAL. SOUČINEM $\langle -,-\rangle$, PAK $f: V\times V \to \mathbb{C}$, $(v,w)\mapsto\langle v,w\rangle$ NESPLŇUJE $f(tv,w) = t\, f(v,w)$. MÁME TOTIŽ $f(tv,w) = \bar{t}\, f(v,w)$, f JE TZV. SESKVILINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ.

② OBECNÉ BILINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ $f: V \times V \to T$ NEMUSÍ SPLŇOVAT $f(v,w) = f(w,v)$!

NAPŘ.:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto x_1 y_2$$

- PŘ.: BUĎ T TĚLESO A $A \in T^{n \times n}$. PAK

11.2.

$$f: T^n \times T^n \longrightarrow T$$
$$(x, y) \longmapsto x^T A y$$

JE BILINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ.

OBECNĚ:

$A = (a_{ij})$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

$f(e_i, e_j) = a_{ij}$

- PŘ.: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_2$$

$$f_2: T^n \longrightarrow T, \quad x \longmapsto x^T A x$$

$$f_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} (a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j$$

- PŘ: BUĎ $T = \mathbb{R}$, UVAŽUJME NA $\mathbb{R}^n$ SE STD. SKALÁRNÍM SOUČINEM. POKUD $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, PAK

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^T A y \\ &\qquad = x \cdot Ay \\ &\qquad = A^T x \cdot y \end{aligned}$$

OBECNĚ, JE-LI $T = \mathbb{R}$ A V V.P. SE $\langle -, - \rangle$ A $f: V \to V$ LINEÁRNÍ OPERÁTOR, PAK

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto \langle v, f(w) \rangle \end{aligned}$$

$f_2(w) = \langle v, f(w) \rangle$

- PŘ: DETERMINANT MATIC ŘÁDU 2:

11.5. T TĚLESO, UVAŽUJME

$f_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 0$

$f_2 \equiv 0$

$$f: T^2 \times T^2 \longrightarrow T$$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

TOTO JE OPĚT BILINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ DANÉ MATICÍ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- POZN: DETERMINANTY MATIC ŘÁDU > 2 BY ANALOGICKY VEDLY NA TZV. MULTILINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

$$f: \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{n} \longrightarrow T$$

KVADRATICKÉ FORMY:

DEF 11.6: BUĎ V VEKTOROVÝ PROSTOR NAD TĚLESEM T A $f: V \times V \to T$ BILINEÁRNÍ FORMA. PAK KVADRATICKOU FORMOU NA V VYTVOŘENOU BILINEÁRNÍ FORMOU f (TÉŽ PŘÍSLUŠNOU FORMĚ f) ROZUMÍME ZOBRAZENÍ

$$f_2 : V \longrightarrow T$$
$$v \longmapsto f(v,v).$$

POZOR! RŮZNÉ BILINEÁRNÍ FORMY f MOHOU VYTVOŘIT TUTÉŽ KVADRATICKOU FORMU f_2!

K ČEMU JSOU KVADRATICKÉ FORMY DOBRÉ:

1. GEOMETRIE (KUŽELOSEČKY, KVADRATICKÉ PLOCHY V $\mathbb{R}^3$, ...), FYZIKA

2. TAYLOROVY ROZVOJE A APROXIMACE 2. ŘÁDU

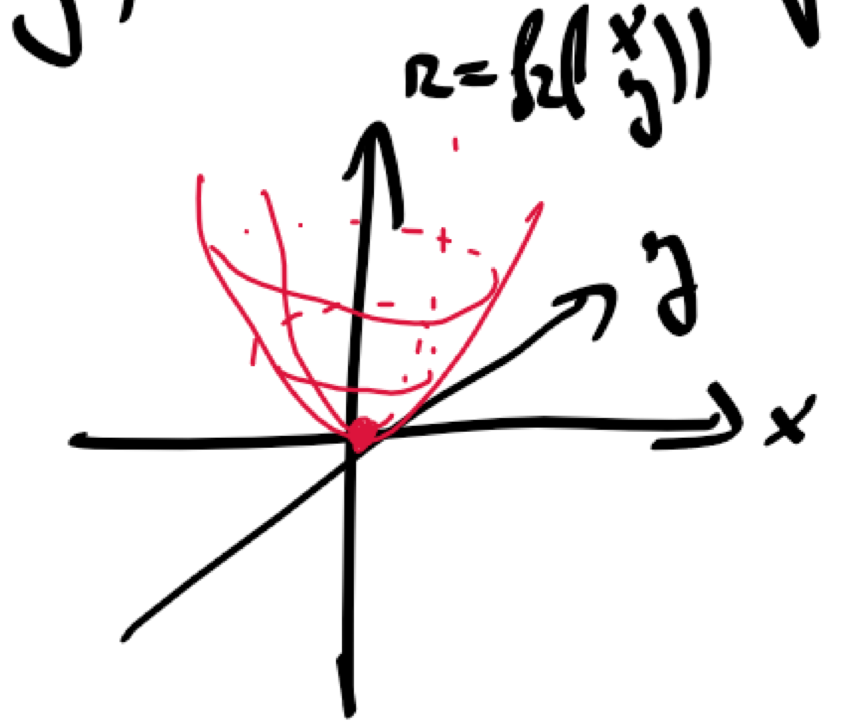
$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ SPOJITĚ DIFERENCOVATELNÁ + HEZKÁ NA OKOLÍ $(0,0)$

$$h(x,y) = \underbrace{c}_{\text{KONSTANTA}} + \underbrace{b_1 x + b_2 y}_{\text{LINEÁRNÍ FORMA}} + \underbrace{a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2}_{\text{KVADRATICKÁ FORMA (HESSOVA MATICE)}} + \dots$$

– PŘ: KONKRÉTNÍ KVADRATICKÉ FORMY NA $\mathbb{R}^2$:

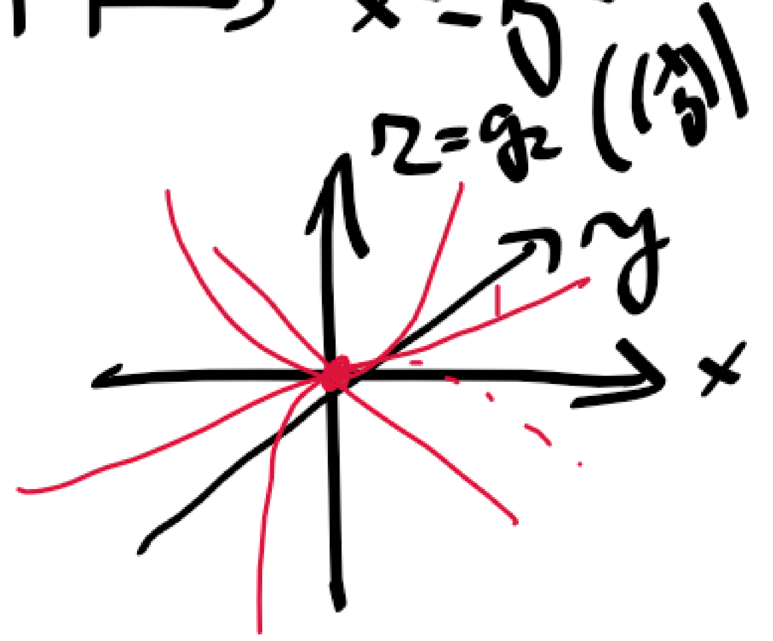
$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 + y^2$$

(VZNIKLA NAPŘ. ZE STD SKAL. SOUČINU)



$$g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 - y^2$$

(VZNIKLA Z BILIN. FORMY DANÉ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$)



„SEDLO"

$$h_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x \cdot y$$

(VZNIKLA Z BILIN. FORMY DANÉ NAPŘ. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ NEBO $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$)

"SEDLO" V JINÝCH SOUŘADNICÍCH!

– MATICE BILINEÁRNÍ FORMY

– BUĎ V KONEČNĚ GENEROVANÝ VEKTOROVÝ PROSTOR NAD T S BÁZÍ $B=(v_1,\dots,v_n)$

– BUĎ $f: V\times V \to T$ BILINEÁRNÍ FORMA

– BUĎ $u = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$, $w = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$, $x_i, y_j \in T$

$$\Rightarrow \quad f(u,w) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right) =$$

$$\overset{(BL1)\&(BL2)}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i\, f\left(v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j\, f(v_i, v_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \underbrace{f(v_i,v_j)}_{a_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i y_j =$$

$$= (x_1,\dots,x_n) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = [u]_B^T \cdot \underbrace{A}_{[f]_B} \cdot [w]_B$$

– DEF 11.9: **MATICÍ BILIN. FORMY** $f: V\times V \to T$ VZHLEDEM K BÁZI $B=(v_1,\dots,v_n)$ PROSTORU V ROZUMÍME MATICI TYPU $n\times n$ NAD T DEFINOVANOU JAKO $[f]_B = \left(f(v_i,v_j)\right)_{ij}$

- POZN.: VEKTOROVÝ SOUČIN: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(v, w) \longmapsto v \times w$$

$$\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ VNĚJŠÍ SOUČIN (EXTERIOR PRODUCT) WEDGE PRODUCT

$v, w \longmapsto v \wedge w \in V \wedge V$

WEDGE

$v, w \in V$

$\dim V = n$

$$\dim V \wedge V = \binom{n}{2}$$