SINGULÁRNÍ ROZKLAD

V10.29 (i):

KOMPLEXNÍ VERZE: BUĎ A KOMPLEXNÍ MATICE TYPU $m \times n$ A HODNOSTI r. PAK EXISTUJÍ ORTONORMÁLNÍ BÁZE $B = (v_1, \dots, v_n)$ PROSTORU $\mathbb{C}^n$ A $C = (u_1, \dots, u_m)$ PROSTORU $\mathbb{C}^m$ a $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ KLADNÁ REÁLNÁ ČÍSLA TAKOVÁ, ŽE

$$[f_A]^B_C = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \end{pmatrix}\!\!\begin{matrix} O \end{matrix}}_{n} \Bigg\}\, m .$$

TO JEST:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^m & \xleftarrow{\;f_A\;} & \mathbb{C}^n & & \\ \sigma_i u_i & \longleftarrow\!\shortmid & v_i & & 1 \le i \le r \\ 0 & \longleftarrow\!\shortmid & v_i & & i > r \end{array}$$

REÁLNÁ VERZE: BUĎ A REÁLNÁ MATICE TYPU $m \times n$ A HODNOSTI r. PAK EXISTUJÍ ORTONORMÁLNÍ BÁZE $B = (v_1, \dots, v_n)$ PROSTORU $\mathbb{R}^n$ A $C = (u_1, \dots, u_m)$ PROSTORU $\mathbb{R}^m$ a $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ KLADNÁ REÁLNÁ ČÍSLA TAKOVÁ, ŽE

$$[f_A]^B_C = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \end{pmatrix}\!\!\begin{matrix} O \end{matrix}}_{n} \Bigg\}\, m .$$

- POZOROVÁNÍ: BUĎ $f_A : \underset{\uparrow B}{\mathbb{C}^n} \longrightarrow \underset{\uparrow C}{\mathbb{C}^m}$ LINEÁRNÍ OPERÁTOR A

  B ORTONORMÁLNÍ BÁZE $\mathbb{C}^n$,

  C ORTONORMÁLNÍ BÁZE $\mathbb{C}^m$.

  UVAŽUJME $f_{A^*} : \underset{\uparrow C}{\mathbb{C}^m} \longrightarrow \underset{\uparrow B}{\mathbb{C}^n}$.

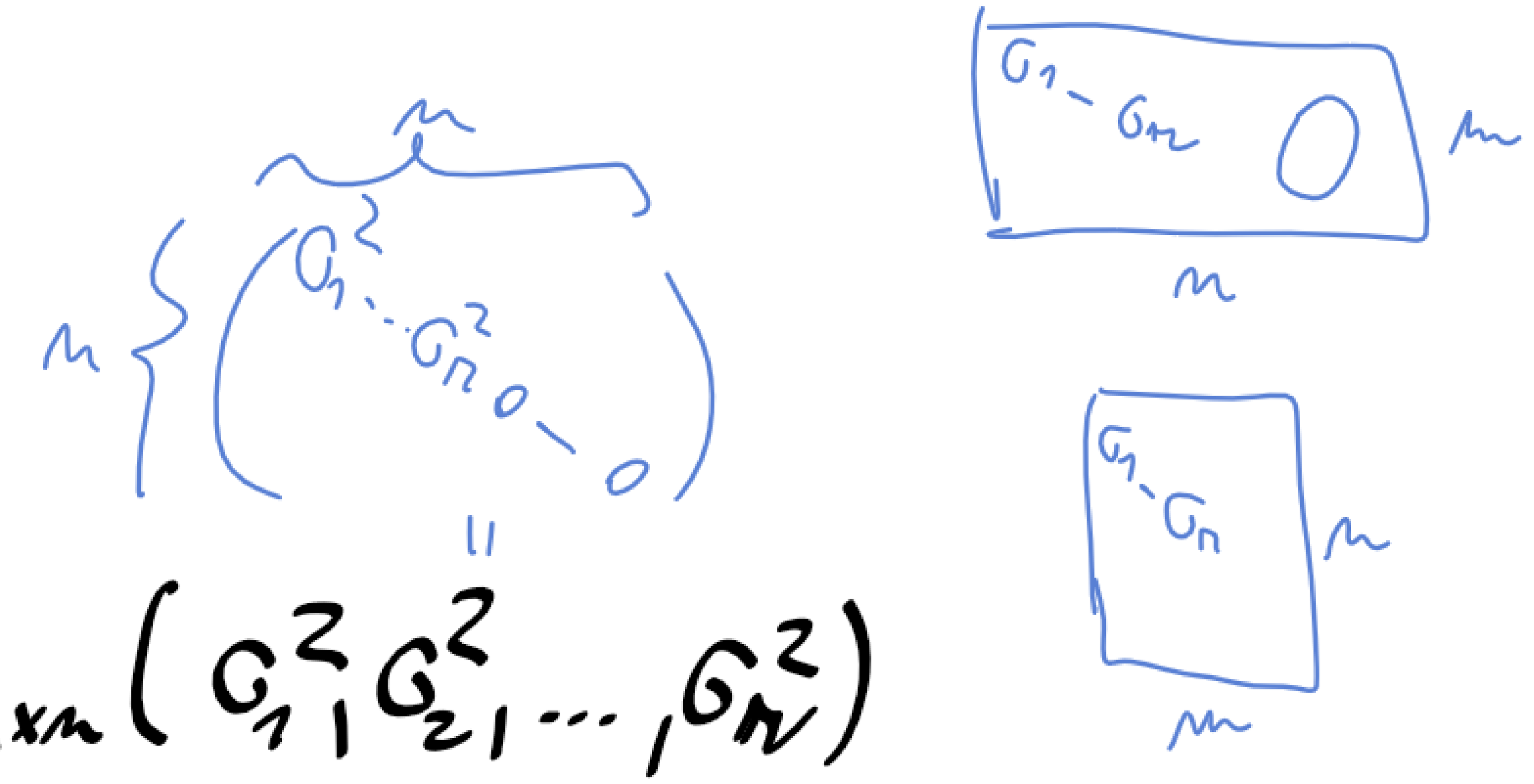
  PAK:
$$[f_{A^*}]^C_B = \left([f_A]^B_C\right)^*$$

- TOTIŽ
$$A = [f_A]^{K_m}_{K_n} = \underbrace{[id]^C_{K_m}}_{= U} [f_A]^B_C \underbrace{[id]^{K_n}_B}_{= V^*} \Rightarrow [f_A]^B_C = U^* A V$$
$$A^* = [f_{A^*}]^{K_n}_{K_m} = \underbrace{[id]^B_{K_n}}_{= V} [f_{A^*}]^C_B \underbrace{[id]^{K_m}_C}_{= U^{-1} = U^*} \Rightarrow [f_{A^*}] = V^* A^* U$$
$$\Rightarrow [f_{A^*}]^C_B = V^* A^* U = (U^* A V)^* = \left([f_A]^B_C\right)^*$$

– PŘEDPOKLÁDEJME NA CHVÍLI, ŽE PRO DANOU $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ $\exists B, C$ ORTONORMÁLNÍ BÁZE TAKOVÉ, ŽE $[f_A]^B_C = \mathrm{diag}_{m\times n}(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$, $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ KLADNÁ REÁLNÁ

– PAK PODLE POZOROVÁNÍ

$$[f_{A^*}]^C_B = \mathrm{diag}_{n\times m}(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$$



– TJ. $$[f_{A^*}\circ f_A]^B_B = [f_{A^*A}]^B_B = [f_{A^*}]^C_B\,[f_A]^B_C = \mathrm{diag}_{n\times n}(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\dots,\sigma_n^2)$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n & \mathbb{C}^m \arrow[l, "f_{A^*}"'] & \mathbb{C}^n \arrow[l, "f_A"'] \\ B \arrow[u] & C \arrow[u] & B \arrow[u] \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[loop left, "f_{A^*A}"] \end{tikzcd}$$

– VÍME: $A^*A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ JE POZITIVNĚ SEMIDEF. SPECIÁLNĚ UNIT. DIAGONALIZOVATELNÁ S NEZÁPORNÝMI REÁLNÝMI VL. ČÍSLY $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$

– ALE Z DISKUZE VÝŠE JSOU $\sigma_1^2,\dots,\sigma_n^2$ PŘESNĚ NENULOVÁ VLASTNÍ ČÍSLA A^*A

– DEF 10.30: BUĎ $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. PAK SINGULÁRNÍMI HODNOTAMI MATICE A ROZUMÍME DRUHÉ ODMOCNINY VL. ČÍSEL MATICE A^*A.

- DK V10.29 (i):

- MĚJME $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, UVAŽUJME VLASTNÍ ČÍSLA $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0 = \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n$ MATICE A^*A (ŘÁDU n)

$$\mathbb{C}^m \xleftarrow{f_A} \mathbb{C}^n$$

$C \qquad B$

- ZA BÁZI $B=(v_1,\dots,v_n)$ ZVOLÍME ORTONORMÁLNÍ BÁZI VLASTNÍCH VEKTORŮ A^*A, KDE v_i JE PŘÍSLUŠNÝ VL. ČÍSLU λ_i $(A^*A v_i = \lambda_i v_i)$

$$[f_{A^*A}]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

- PRO $i=1,\dots,n$ POLOŽÍME $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$

- ABY MOHL PLATIT ZÁVĚR VĚTY, MUSÍ BÝT $\forall i \in \{1,\dots,r\}$: $\underset{\displaystyle f_A(v_i)}{\overset{\shortparallel}{A v_i}} = \sigma_i u_i$

- ČILI PRO $i=1,\dots,r$ POLOŽÍME: $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$ ⇝ POSLOUPNOST VEKTORŮ $(u_1,\dots,u_r)$

- OVĚŘÍME, ŽE $(u_1,\dots,u_r)$ JE ORTONORMÁLNÍ:

$(i,j=1,\dots,r)$

$$u_i \bullet u_j = \left(\tfrac{1}{\sigma_i} A v_i\right) \bullet \left(\tfrac{1}{\sigma_j} A v_j\right) = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j}\left(A v_i \bullet A v_j\right) = \frac{1}{\sigma_i\sigma_j}\left((A^*A)v_i \bullet v_j\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_i\sigma_j}\left(\lambda_i v_i \bullet v_j\right) = \frac{\lambda_i}{\sigma_i \sigma_j}\left(v_i \bullet v_j\right) = \begin{cases} 0 & \dots\dots \ i \neq j \\ \frac{\lambda_i}{\sigma_i^2} = 1 & \dots\dots \ i = j \end{cases}$$

- DOPLNÍME $(u_1,\dots,u_r)$ NA ORTONORMÁLNÍ BÁZI $C=(u_1,\dots,u_m)$ PROSTORU $\mathbb{C}^m$

-DK V10.29 (i), DOKONČENÍ:

$\Rightarrow$ PRO $i \leq r$: $f_A(v_i) = \sigma_i u_i$ (VOLBA $u_1, \dots, u_r$)

$\Rightarrow$ PRO $i > r$: $f_A(v_i) = A v_i$

• PAK ALE $\|A v_i\|^2 = A v_i \bullet A v_i = v_i^* \underbrace{A^* A v_i}_{=0} = 0$

$(A^* A v_i = 0 \cdot v_i = 0)$

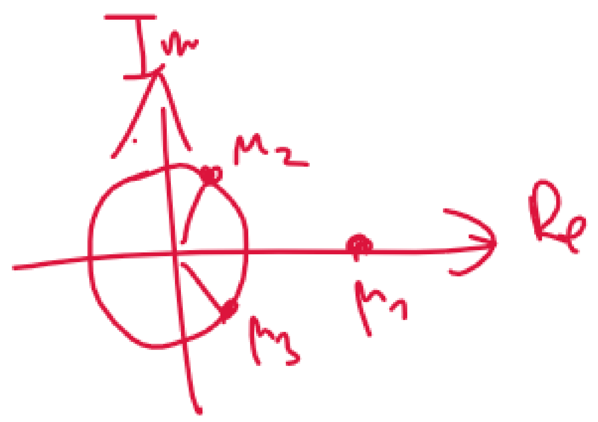
$\Rightarrow A v_i = 0$

$$\Rightarrow [f_A]^B_C = \begin{pmatrix} \sigma_1 \dots \sigma_r & 0 \\ & \end{pmatrix}$$

□

-PŘ 10.33|10.36: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^* A = A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ MÁ VL. ČÍSLA

$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$



$\Rightarrow A = U \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot V^*$, $U, V \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ORTOGONÁLNÍ, $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 2$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 1$

-PRO ILUSTRACI: VLASTNÍ ČÍSLA A JSOU $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $\mu_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

– VZTAH SINGULÁRNÍCH HODNOT A VLASTNÍCH ČÍSEL NORMÁLNÍCH MATIC

– UVAŽUJME $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ NORMÁLNÍ $(A^*A = AA^*)$, $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ SING. HODNOTY A

– VÍME: $\exists U$ UNITÁRNÍ: $U^* A U = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$

$$A = U \cdot \underbrace{\operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)}_{D} \cdot U^*$$

$$\Rightarrow A^* = U \cdot \underbrace{\operatorname{diag}(\overline{\mu_1}, \dots, \overline{\mu_n})}_{D^*} \cdot U^*$$

$$\Rightarrow A^*A = U D^* U^* U D U^* = U D^* D U^* = U \operatorname{diag}\overbrace{(|\mu_1|^2, |\mu_2|^2, \dots, |\mu_n|^2)}^{\text{VLASTNÍ ČÍSLA } A^*A} U^*$$

$$= U \cdot \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0) \cdot U^*$$

– POZOROVÁNÍ: JE-LI A NORMÁLNÍ PAK SINGULÁRNÍ HODNOTY JSOU

$$\sigma_i = |\mu_i| \quad , \quad \mu_1, \dots, \mu_r \text{ NENULOVÁ VL. ČÍSLA } A.$$

JE-LI NAVÍC A POZITIVNĚ DEFINITNÍ, PAK DOKONCE

$$\sigma_i = \mu_i \quad ,$$

––––––––––– 11 –––––––––––

- APLIKACE SVD:

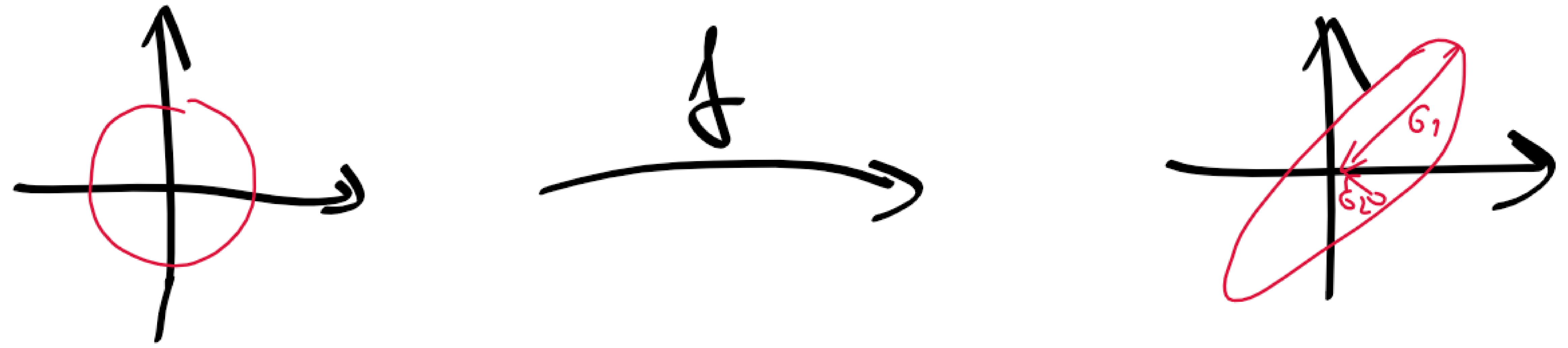
• SPEKTRÁLNÍ NORMA MATICE: $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ($\mathbb{R}^{m\times n}$), $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$

$$\|A\| := \max\left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} : 0 \neq x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\} = \max\left\{ \|Ay\| : y \in \mathbb{C}^n, \|y\| = 1 \right\}$$

$$\left(y = \frac{x}{\|x\|} \rightsquigarrow \|Ay\| = \left\|A \frac{x}{\|x\|}\right\| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right)$$

$$\boxed{\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|}$$

- ILUSTRACE:



- T 10.37: BUĎ $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ (NEBO $\mathbb{R}^{m\times n}$). PAK $\forall\, 0 \neq x \in \mathbb{C}^n$: $\|Ax\| \leq \sigma_1 \|x\|$, KDE σ_1 JE NEJVĚTŠÍ SINGULÁRNÍ HODNOTA A, ROVNOST NASTANE PŘESNĚ PRO VLASTNÍ VEKTORY x MATICE A^*A PŘÍSLUŠNÉ σ_1^2.

SPECIÁLNĚ: $\|A\| = \sigma_1$.

- DK: BUĎ $x \neq 0$, POLOŽME $y = \frac{x}{\|x\|}$, $[f_A]^B_C = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$, B, C ORTONORM.

$[y]_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

PAK $\|Ay\| = \|[Ay]_C\| = \|[A]^B_C \cdot [y]_B\| =$

$= \|\sigma_1 y_1 + \dots + \sigma_n y_n\| \leq \|\sigma_1 y_1 + \dots + \sigma_1 y_n\| = \sigma_1 \|y\|$.

– APROXIMACE MATICEMI NIŽŠÍ HODNOSTI:

- MĚJME $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ MATICI SE SING. ROZKLADEM

$$A = U \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_s & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \sigma_n \\ & & & & \end{pmatrix} \cdot V^*, \qquad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$$

- MŮŽE SE STÁT, ŽE $\sigma_{s+1}, \dots, \sigma_n$ JSOU OPROTI σ_1 ZANEDBATELNÉ

$\rightsquigarrow$ UVAŽUJEME
$$\hat{A} = U \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_s & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \cdot V^*$$
$\rightsquigarrow$ $\hat{A}$ MÁ SING. HODNOTY $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_s$

– **POINTA**: $\|A - \hat{A}\| = \sigma_{s+1}$, $\forall Q \in \mathbb{C}^{m \times n}$ HODNOSTI NEJVÝŠE s JE $\|A - Q\| \geq \sigma_{s+1}$