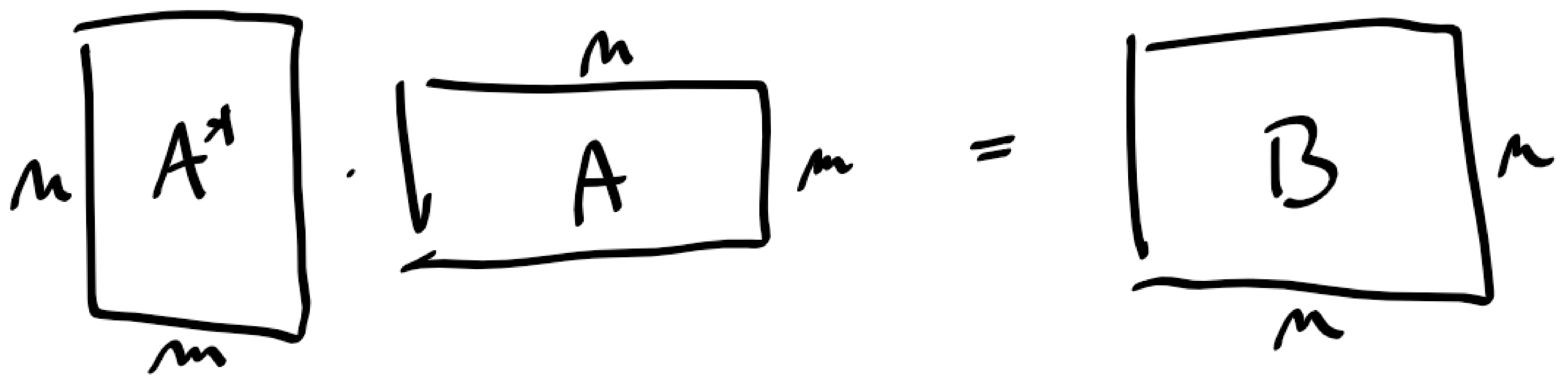
1. TERMÍN ODEVZDÁNÍ KVÍZU A DÚ AŽ ZA 14 DNÍ!
2. ORGANIZACE MIDTERMU OBDOBNÁ ONLINE ZKOUŠKÁM V ZIMNÍM SEMESTRU, STRUKTURA TESTU OBDOBNÁ ZKOUŠKOVÉMU TESTU (NA STRÁNCE PŘEDMĚTU, https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~stovicek/index.php/cs/2021ls-nmag112#exam), JEN ROZSAH BUDE POLOVIČNÍ.

- <u>POZITIVNĚ (SEMI) DEFINITNÍ MATICE</u>

- $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ JE
  - <u>POZITIVNĚ DEFINITNÍ</u>, POKUD JE HERMITOVSKÁ A $\forall 0 \neq v \in \mathbb{C}^n : v^* B v > 0$,
  - <u>POZITIVNĚ SEMIDEFINITNÍ</u>, POKUD JE HERMITOVSKÁ A $\forall v \in \mathbb{C}^n : v^* B v \geq 0$.
- PŘIPOMENUTÍ: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ LIBOVOLNÁ REGULÁRNÍ $\Longrightarrow$ $B := A^*A$ JE POZITIVNĚ DEF.
  $(v^* B v = v^* A^* A v = \|Av\|^2)$
- POZOROVÁNÍ: $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ LIBOVOLNÁ MATICE $\Longrightarrow$ $B = A^*A$ JE VŽDY POZITIVNĚ SEMIDEFINITNÍ:
  $\forall v \in \mathbb{C}^n : v^* B v = \|Av\|^2 \geq 0$



- T10.22: (1) $\forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ JE $B = A^*A$ POZITIVNĚ SEMIDEFINITNÍ.
JE-LI A REGULÁRNÍ, PAK JE B DOKONCE POZITIVNĚ DEFINITNÍ.

---

(2) NAOPAK KAŽDÁ POZITIVNĚ SEMIDEFINITNÍ MATICE $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ JE TVARU $B = A^*A$ PRO NĚJAKOU MATICI $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.
JE-LI B POZITIVNĚ DEFINITNÍ, JE NUTNĚ A REGULÁRNÍ.

- DK: (1) VIZTE VÝŠE.

(2) - VÍME ZE SPEKTRÁLNÍCH VĚT (V10.20), ŽE

$$B = U\,D\,U^*, \text{ KDE } U \text{ JE UNITÁRNÍ}, \; D = \mathrm{diag}(\overbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{\text{VL. ČÍSLA } B}),$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ NEZÁPORNÁ REÁLNÁ

- OZNAČÍME $\sqrt{D} := \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ $\quad (D = (\sqrt{D})(\sqrt{D}))$

- PAK $B = \underbrace{U\sqrt{D}^*}_{A^*}\,\underbrace{\sqrt{D}\,U^*}_{A} = A^*A$

- JE-LI B POZITIVNĚ DEFINITNÍ, PAK $\lambda_i > 0 \; \forall i \in \{1, \dots, n\}$ (V10.20), TJ. D, $\sqrt{D}$ JSOU REGULÁRNÍ, TÍM PÁDEM JE $A = \sqrt{D}\,U^*$ REGULÁRNÍ.

- LÉPE: KDYBY $\mathrm{rank}(A) < n$, PAK $\mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(A^*A) < n$, ČILI B NENÍ REGULÁRNÍ, ALE POZITIVNĚ DEF. MATICE JSOU REGULÁRNÍ (V10.20). $\square$

- JAK VYPADAJÍ ORTOGONÁLNÍ LIN. OPERÁTORY NA $\mathbb{R}^2$?

• $f_A = f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, CHCEME $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$: $u \bullet v = f(u) \bullet f(v)$

$\Rightarrow \forall u \in \mathbb{R}^2$: $\|f(u)\| = \|u\|$

PŘ: OTOČENÍ O α

PŘ: OSOVÁ SYMETRIE (REFLEXE)

- T10.26: ORTOGONÁLNÍ OPERÁTOR $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ JE VŽDY BUĎ
  (a) REFLEXE ($\Leftrightarrow \det [f]^B_B = -1$ PRO LIB. BÁZI B PROSTORU $\mathbb{R}^2$)
  (b) OTOČENÍ ($\Leftrightarrow \det [f]^B_B = 1$ ——— || ———)

- Dk: JE-LI f_A ORTOGONÁLNÍ, JE A ORTOGONÁLNÍ MATICE (SPECIÁLNĚ JE A UNITÁRNÍ NAD $\mathbb{C}$)

V10.23 $\Rightarrow$ $A = U \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}_{D} \cdot U^*$, U UNITÁRNÍ, $|\lambda_1| = 1 = |\lambda_2|$ (V10.23)

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = \pm 1$, $D = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$, U BÚNO ORTOGONÁLNÍ

λ_1, λ_2 MAJÍ RŮZNÁ ZNAMÉNKA $\Rightarrow$ REFLEXE

$\lambda_1 = \lambda_2$ $\Rightarrow$ OTOČENÍ O 0 NEBO π

$\lambda_1 = \cos\varphi + i \sin\varphi$, $\lambda_2 = \cos\varphi - i\sin\varphi$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\rightsquigarrow$ VEZMEME BÁZI $B = \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(v + \bar{v})}_{\sqrt{2} \cdot \mathrm{Re}(v)}, \underbrace{\frac{i}{\sqrt{2}}(v - \bar{v})}_{-\sqrt{2} \cdot \mathrm{Im}(v)} \right)$ $\mathbb{R}^2$

VL. VEKTOR v BÚNO $\|v\| = 1$ VL. VEKTOR $\bar{v}$, $\|\bar{v}\| = 1$ (T9.73) (T9.75)

• ALE $[id]^B_{(v, \bar{v})} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ JE UNITÁRNÍ $\Rightarrow$ B ORTONORMÁLNÍ BÁZE $\mathbb{R}^2$, $[f_A]^B_B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ (KAP 9.3.5)

- JAK VYPADAJÍ ORTOGONÁLNÍ OPERÁTORY NA $\mathbb{R}^3$?

$\rightsquigarrow$ $f = f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ORTOGONÁLNÍ $\rightarrow$ A UNIT. DIAGONALIZOVATELNÁ, VL. Č. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ SPLŇUJÍ $|\lambda_i| = 1$ (V10.23)

$\rightsquigarrow$ $p_A(\lambda)$ JE STUPNĚ 3, ČILI MÁ ASPOŇ JEDEN REÁLNÝ KOŘEN, NUTNĚ $\lambda_1 = \pm 1$

BUĎ u VL. VEKTOR, $u \in \mathbb{R}^3$, BÚNO $\|u\| = 1$

$\lambda_2, \lambda_3 = \pm 1$ $\rightsquigarrow$ $\exists B$ ORTONORMÁLNÍ BÁZE $\mathbb{R}^3$: $[f_A]^B_B = \begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & \pm 1 & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}$

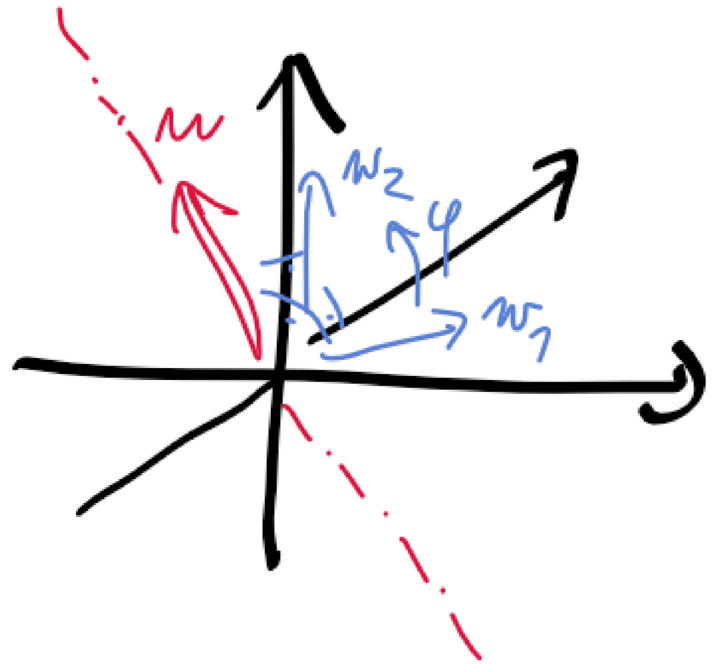
$\lambda_2, \lambda_3 \notin \mathbb{R}$, $\lambda_2 = \cos\varphi + i \sin\varphi$

$\lambda_3 = \cos\varphi - i \sin\varphi$

VL. VEKTORY v, $\bar{v}$

$B = \left(u, \overset{w_1}{\overset{\shortparallel}{\tfrac{1}{\sqrt{2}}(v + \bar{v})}}, \overset{w_2}{\overset{\shortparallel}{\tfrac{i}{\sqrt{2}}(v - \bar{v})}} \right)$ ORTONORMÁLNÍ BÁZE $\mathbb{R}^3$

$[f_A]^B_B = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$



$f_A(u) = u$

- SHRNUTÍ: T10.26

SINGULÁRNÍ ROZKLAD MATICE NAD $\mathbb{R}$ NEBO $\mathbb{C}$ (SVD)

SINGULAR VALUE DECOMPOSITION

- V10.29 (ii):

KOMPLEXNÍ VERZE: BUĎ A KOMPLEXNÍ MATICE TYPU $m \times n$ A HODNOSTI r. PAK EXISTUJÍ ORTONORMÁLNÍ BÁZE $B=(v_1,\dots,v_n)$ PROSTORU $\mathbb{C}^n$ A $C=(u_1,\dots,u_m)$ PROSTORU $\mathbb{C}^m$ a $\sigma_1,\dots,\sigma_r$ KLADNÁ REÁLNÁ ČÍSLA TAKOVÁ, ŽE

$$[f_A]^B_C = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & O \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \\ & O & & \end{pmatrix}}_{n} \Big\}\, m .$$

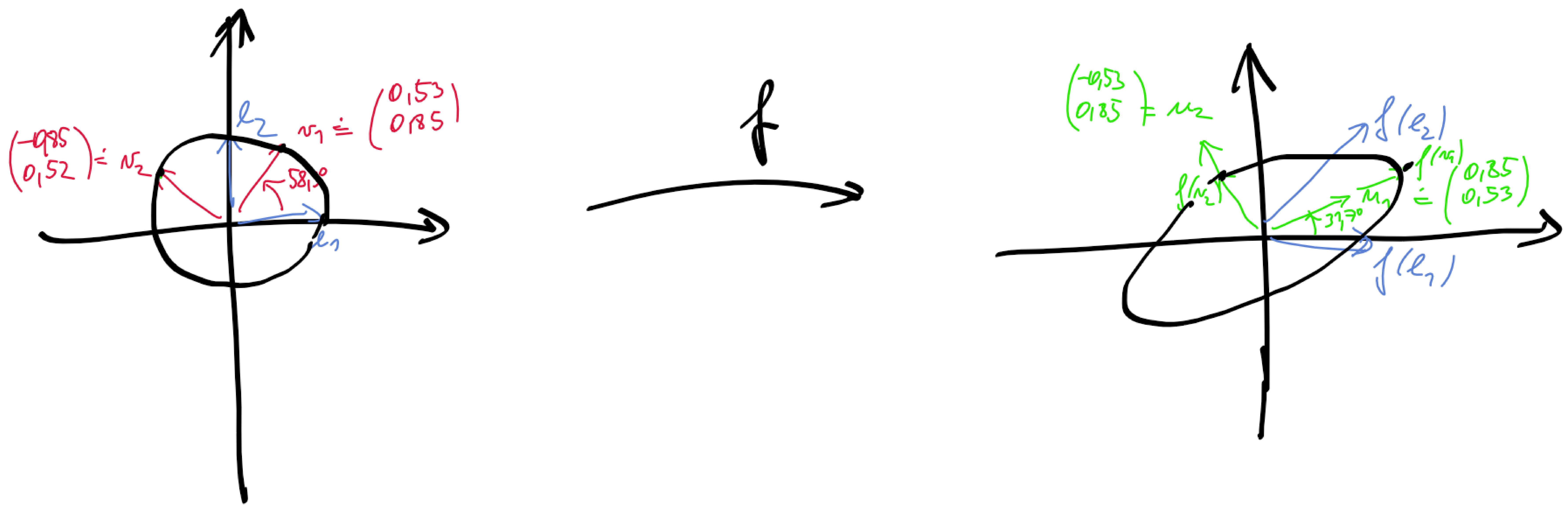
$$\begin{array}{ccccc}
\text{BÁZE } C & \mathbb{C}^m & \xleftarrow{f_A} & \mathbb{C}^n & \text{BÁZE } B \\
 & Ax & \longleftarrow\!\shortmid & x & \\
 & \sigma_i u_i & \longleftarrow\!\shortmid & v_i & 1 \le i \le r \\
 & 0 & \longleftarrow\!\shortmid & v_i & i > r
\end{array}$$

REÁLNÁ VERZE: BUĎ A REÁLNÁ MATICE TYPU $m \times n$ A HODNOSTI r. PAK EXISTUJÍ ORTONORMÁLNÍ BÁZE $B=(v_1,\dots,v_n)$ PROSTORU $\mathbb{R}^n$ A $C=(u_1,\dots,u_m)$ PROSTORU $\mathbb{R}^m$ a $\sigma_1,\dots,\sigma_r$ KLADNÁ REÁLNÁ ČÍSLA TAKOVÁ, ŽE

$$[f_A]^B_C = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & O \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \\ & O & & \end{pmatrix}}_{n} \Big\}\, m .$$

- ZNAČENÍ: $m\Big\{\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & O \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \\ & O & & \end{pmatrix}}_{n} =: \operatorname{diag}_{m\times n}(\sigma_1,\dots,\sigma_r)$ (MŮŽE BÝT $r < \min(m,n)$)

PŘ: $f = f_A$, $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ NAD $\mathbb{R}$:



$\sigma_1 = 1{,}618$

$\sigma_2 = 0{,}618$

$v_1 \longmapsto \sigma_1 u_1$

$v_2 \longmapsto \sigma_2 u_2$

$B = (v_1, v_2)$ $\qquad [f]_C^B = \begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix} =: D$ $\qquad C = (u_1, u_2)$

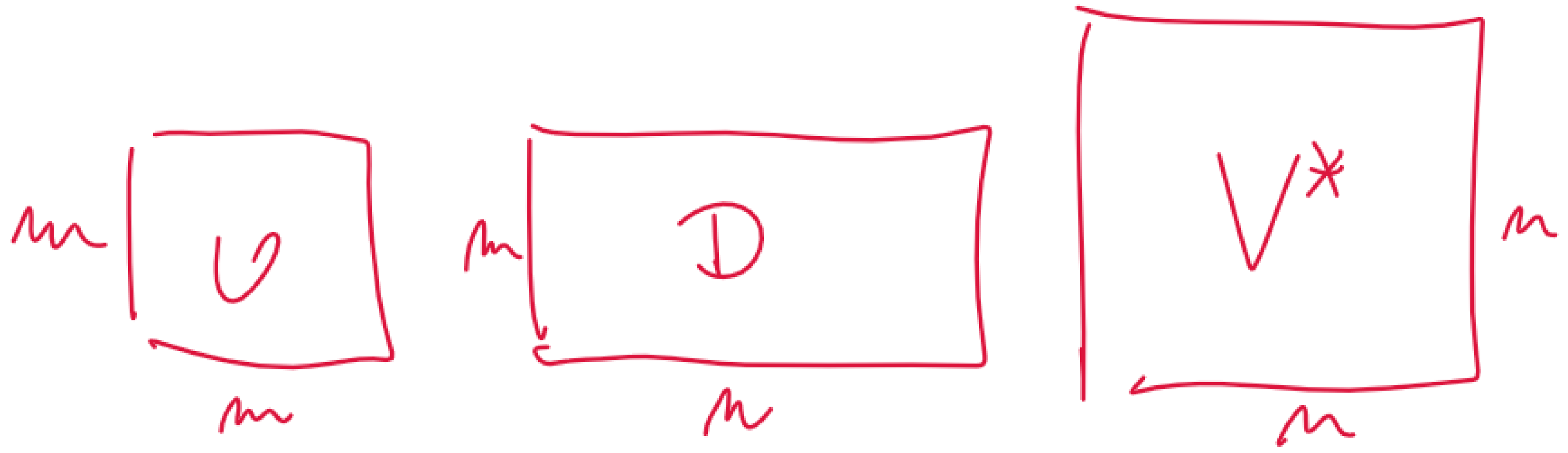
- $A = \underset{\left(u_1 | u_2\right)}{\underset{\parallel}{U}} \begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix} \underset{\begin{pmatrix}v_1\\ \hline v_2\end{pmatrix}}{\underset{\parallel}{V^T}}$, $\quad \mathbb{R}^2 \xleftarrow{f_A} \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \underset{\text{ORTOG. OTOČENÍ } 31{,}7°}{\xleftarrow{f_U}} \mathbb{R}^2 \xleftarrow{f_D} \mathbb{R}^2 \underset{\text{ORTOG., OTOČENÍ o } -58{,}3°}{\xleftarrow{(f_V)^{-1}}} \mathbb{R}^2$

– V 10.29 (SVD) : (MATICOVÁ VERZE)

– NAD $\mathbb{C}$: JE-LI $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, PAK EXISTUJÍ $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ UNITÁRNÍ A $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ KLADNÁ REÁLNÁ ČÍSLA, TAK, ŽE

$r = \operatorname{rank}(A)$

$$\underbrace{A}_{[f_A]^{K_n}_{K_m}} = \underbrace{U}_{[id]^{C}_{K_m} = (u_1 | u_2 | \dots | u_m)} \underbrace{\operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)}_{[f_A]^{B}_{C}} \underbrace{V^*}_{[id]^{K_n}_{B}}$$



$$[id]^{K_n}_{B} = \begin{pmatrix} v_1 & | & \dots & | & v_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & | & \dots & | & v_n \end{pmatrix}^{*} = \begin{pmatrix} v_1^* \\ \hline \vdots \\ \hline v_n^* \end{pmatrix}$$

– NAD $\mathbb{R}$: JE-LI $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, PAK EXISTUJÍ $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ORTOGONÁLNÍ A $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ KLADNÁ REÁLNÁ ČÍSLA, TAK, ŽE

$r = \operatorname{rank}(A)$

$$A = U \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)\, V^T.$$

– K DŮKAZU: $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$

PŘEDPOKLAD: B, C ORTONORMÁLNÍ

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{C}^m \xleftarrow{f_A} \mathbb{C}^n$

BÁZE B $\qquad$ BÁZE C

$\rightsquigarrow$ $A^* \in \mathbb{C}^{n \times m}$

$\mathbb{C}^n \xleftarrow{f_{A^*}} \mathbb{C}^m$

BÁZE C $\qquad$ BÁZE B

– OTÁZKA: V JAKÉM VZTAHU JSOU MATICE $[f_A]^B_C$ A $[f_{A^*}]^C_B$?

– ODPOVĚĎ: JSOU HERMITOVSKY SDRUŽENÉ:

$$A = [f_A]^{K_m}_{K_n} = \underbrace{[id]^C_{K_n}}_{U} [f_A]^B_C \underbrace{[id]^{K_m}_B}_{V^*}$$

$$A^* = [f_{A^*}]^{K_n}_{K_m} = \underbrace{[id]^B_{K_m}}_{V} [f_{A^*}]^C_B \underbrace{[id]^{K_n}_C}_{U^*}$$

$$\left.\begin{array}{l} [f_A]^B_C = U^* A V \\ \rightsquigarrow [f_{A^*}]^C_B = V^* A^* U \end{array}\right\}$$