SPEKTRÁLNÍ VĚTY

- SPEKTRUM = MNOŽINA VLASTNÍCH ČÍSEL
- **PŘIPOMENUTÍ:** $x \in \mathbb{C}^m$, $y \in \mathbb{C}^m$, $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ $\Rightarrow$ $x \cdot Ay = A^* x \cdot y$

- **PLÁN:** 1) CHARAKTERIZUJEME UNITÁRNĚ DIAG. MATICE JAKO NORMÁLNÍ
  2) CHARAKTERIZUJEME URČITÉ TŘÍDY NORMÁLNÍCH POMOCÍ PODMÍNEK NA VLASTNÍ ČÍSLA.

- **DEF 10.8:** $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ JE NORMÁLNÍ, POKUD $A^*A = AA^*$.

- **PŘ/VLASTNOSTI:**

(1) A NORMÁLNÍ, $t \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $t \cdot A$ NORMÁLNÍ, A^* NORMÁLNÍ

$$(tA)^*(tA) = \bar{t} \cdot A^* \cdot (t \cdot A) = \bar{t} \cdot t \cdot A^*A = |t|^2 \cdot A^*A = \dots = (tA)\cdot(tA)^*$$

$$(A^*)^* \cdot A^* = A \cdot A^* \overset{A \text{ NORM}}{=} A^*A = A^* \cdot (A^*)^*$$

(2) NÁSLEDUJÍCÍ TYPY MATIC JSOU VŽDY NORMÁLNÍ:

- DIAGONÁLNÍ,
- HERMITOVSKÉ $(A = A^* \Rightarrow A^*A = A^2 = AA^*)$,
- ANTIHERMITOVSKÉ, TJ. TY, PRO KTERÉ $A^* = -A$, NAPŘ.: $\begin{pmatrix} i & -1+i \\ 1+i & 2i \end{pmatrix} = A$, $\begin{pmatrix} -i & 1-i \\ -1-i & -2i \end{pmatrix} = A^*$
- UNITÁRNÍ $(U \text{ UNITÁRNÍ} \Rightarrow U^*U = U^{-1}U = I_n = UU^*)$.

– JAK VLASTNÍ ČÍSLA A VEKTORY INTERAGUJÍ S HERMITOVSKÝM SDRUŽOVÁNÍM?

– T10.6: BUĎ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ A $\lambda \in \mathbb{C}$. PAK

λ JE VL. ČÍSLO A $\iff$ $\bar{\lambda}$ JE VL. ČÍSLO A^*.

– Dk: λ VL. ČÍSLO A $\iff$ $(A - \lambda I_n)$ NENÍ INVERTIBILNÍ

$\iff$ $\underset{A^* - \bar{\lambda} I_n}{\underset{\|}{(A - \lambda I_n)^*}}$ NENÍ INVERTIBILNÍ $\iff$ $\bar{\lambda}$ JE VL. ČÍSLO A^*

$\square$

– VLASTNÍ VEKTORY A A A^* NEJSOU OBECNĚ V ŽÁDNÉM JEDNODUCHÉM VZTAHU! VIZTE DÚ (4.1).

– ALE PRO NORMÁLNÍ MATICE JEDNODUCHÝ VZTAH BUDE!

– JSOU-LI A, B NORMÁLNÍ STEJNÉHO ŘÁDU, OBECNĚ ANI $A+B$ ANI $A \cdot B$ NEJSOU NORMÁLNÍ, ALE DÁ SE UKÁZAT, ŽE JSOU, POKUD $AB = BA$.

– T10.10: BUĎ A NORMÁLNÍ KOMPLEXNÍ MATICE ŘÁDU n. PAK

(i) $\forall t \in \mathbb{C}$: $A - tI_n$ JE NORMÁLNÍ,

(ii) $\forall U$ UNITÁRNÍ: UAU^* JE NORMÁLNÍ.

– Dk: (i) $(A - tI_n)^*(A - tI_n) = (A^* - \bar{t} I_n)(A - tI_n) = \underset{AA^*}{\underset{\|}{A^*A}} - t \cdot A^* - \bar{t} A + |t|^2 I_n = \ldots = (A - tI_n)(A - tI_n)^*$

(ii) $(UAU^*)^*(UAU^*) = (\underbrace{U^{**}}_{U} A^* U^*)(UAU^*) = U A^* \underbrace{U^*U}_{I_n} A U^* = UA^*AU^* = UAA^*U^* = \ldots = (UAU^*)(UAU^*)^*$

$\square$

- T10.11: JE-LI A NORMÁLNÍ ŘÁDU n, PAK

(*) $\forall v \in \mathbb{C}^n: \quad \|A \cdot v\| = \|A^* v\|$.

- Dk: $\|Av\|^2 = Av \bullet Av = (Av)^*(Av) = v^*A^*Av \underset{A \text{ NORMÁLNÍ}}{=} v^*AA^*v = (A^*v)^*(A^*v)$

$$\|A^*v\|^2 = A^*v \bullet A^*v$$

- POZN: (*) JE EKVIVALENTNÍ NORMALITĚ A:

$\forall v: \|Av\| = \|A^*v\| \overset{\text{POLARIZAČNÍ IDENTITY T8.32(4)}}{\Longrightarrow} \forall u, v: \quad Au \bullet Av = A^*u \bullet A^*v$

$$\Updownarrow$$

$$\forall u, v: \quad u^*A^*Av = u^*AA^*v$$

$$\Downarrow$$

$$A^*A = AA^*$$

- VZTAH MEZI VL. VEKTORY A A A^* PRO A NORMÁLNÍ:

- T10.12: BUĎ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ NORMÁLNÍ, BUĎ $\lambda \in \mathbb{C}$ A $v \in \mathbb{C}^n$. PAK:

$$Av = \lambda v \iff A^* v = \overline{\lambda} v$$

ČILI MNOŽINY VLASTNÍCH VEKTORŮ A A A^* JSOU STEJNÉ.

- Dk:

$$Av = \lambda v \iff \underbrace{(A - \lambda I_n)}_{\text{NORMÁLNÍ}} \cdot v = 0 \iff \|(A - \lambda I_n) \cdot v\| = 0$$

$$\overset{\text{T10.11}}{\iff} \|(A - \lambda I_n)^* v\| = 0$$

$$\iff (A - \lambda I_n)^* v = 0$$

$$\iff (A^* - \overline{\lambda} I_n) v = 0$$

$$\iff A^* v = \overline{\lambda} v \qquad \square$$

- SPEKTRÁLNÍ VĚTA PRO NORMÁLNÍ MATICE:

- V 10.13: BUĎ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. PAK

$$A \text{ NORMÁLNÍ} \iff A \text{ UNITÁRNĚ DIAGONALIZOVATELNÁ.}$$

- DK: $\Leftarrow$: BUĎ TEDY $A = UDU^*$, D DIAGONÁLNÍ

PAK D JE NORMÁLNÍ A A JE NORMÁLNÍ PODLE T10.10 (iii)

$\Rightarrow$: - DŮKAZ INDUKCÍ PODLE n

- $n=1$: A JE DIAGONÁLNÍ A NENÍ CO DOKAZOVAT
- $n>1$: PŘEDPOKLAD: NORMÁLNÍ MATICE ŘÁDU $n-1$ JSOU UNITÁRNĚ DIAG.
  - BUĎ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ NORMÁLNÍ
  - BUĎ λ VLASTNÍ ČÍSLO A A $0 \neq v_1 \in \mathbb{C}^n$ PŘÍSLUŠNÝ VLASTNÍ VEKTOR
  - BÚNO $\|v_1\| = 1$, MŮŽEME DOPLNIT NA ORTONORMÁLNÍ BÁZI

    $B = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ PROSTORU $\mathbb{C}^n$
  - OZNAČME $X = [f_A]_B^B$, TJ. X JE UNITÁRNĚ PODOBNÁ A, SPECIÁLNĚ NORMÁLNÍ

DK V 10.13, POKRAČOVÁNÍ:

- BUĎ λ VLASTNÍ ČÍSLO A A $0 \neq v_1 \in \mathbb{C}^n$ PŘÍSLUŠNÝ VLASTNÍ VEKTOR
- BÚNO $\|v_1\| = 1$, MŮŽEME DOPLNIT NA ORTONORMÁLNÍ BÁZI
  $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ PROSTORU $\mathbb{C}^n$
- OZNAČME $X = [f_A]_B^B$, TJ. X JE UNITÁRNĚ PODOBNÁ A, SPECIÁLNĚ NORMÁLNÍ
- JAK VYPADÁ X?

$$X = \left(\underset{\substack{\uparrow \\ A v_1 = \lambda v_1}}{[A v_1]_B} \middle| [A v_2]_B \middle| \dots \middle| [A v_n]_B \right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & Y & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

- NAVÍC PRO $i > 1$: $v_1 \bullet A v_i = A^* v_1 \bullet v_i \underset{\substack{A \text{ NORMÁLNÍ} \\ T10.12}}{=} (\bar{\lambda} v_1) \bullet v_i = \lambda (v_1 \bullet v_i) \underset{\substack{B \\ \text{ORTONORMÁLNÍ}}}{=} \lambda \cdot 0 = 0$

- $X^* X = \left(\begin{array}{c|c} \bar{\lambda} & 0 \\ \hline 0 & Y^* \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & Y \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} |\lambda|^2 & \\ \hline & Y^* Y \end{array} \right) \Rightarrow Y^* Y = Y Y^* \Rightarrow Y$ NORMÁLNÍ

  $\|$

  $X X^* = \left(\begin{array}{c|c} |\lambda|^2 & \\ \hline & Y Y^* \end{array} \right)$

- Z INDUKČNÍHO PŘEDPOKLADU: $\exists V$ UNITÁRNÍ: $V^* Y V = \mathrm{diag}(\lambda_2, \dots, \lambda_n)$; PAK $\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & V^* \end{array} \right)}_{U^*} X \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & V \end{array} \right)}_{U} = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\square$

– PŘEHLED SPEKTRÁLNÍCH VĚT

ČÍSLO VE SKRIPTECH	TVRZENÍ
V 10.13	$\mathbb{C}^{n\times n} \ni A$ NORMÁLNÍ $\iff$ A UNITÁRNĚ DIAGONALIZOVATELNÁ
V 10.15	$\mathbb{C}^{n\times n} \ni A$ HERMITOVSKÁ $\iff$ A UNIT. DIAG. A VLASTNÍ ČÍSLA JSOU REÁLNÁ
DŮSL. 10.16	$\mathbb{R}^{n\times n} \ni A$ SYMETRICKÁ $\iff$ A ORTOGONÁLNĚ DIAGONALIZOVATELNÁ
V 10.20	$\mathbb{C}^{n\times n} \ni A$ POZITIVNĚ DEFINITNÍ $\iff$ A UNIT. DIAG. A VLASTNÍ ČÍSLA JSOU KLADNÁ REÁLNÁ ($\iff$ HERMITOVSKÁ & $\forall 0 \neq v \in \mathbb{C}^n : v^* A v > 0$) $v^* A v = v \circ A v$
V 10.20	$\mathbb{C}^{n\times n} \ni A$ POZITIVNĚ SEMIDEFINITNÍ $\iff$ A UNIT. DIAG. A VL. Č. JSOU NEZÁPORNÁ REÁLNÁ ($\iff$ HERMITOVSKÁ A $\forall v \in \mathbb{C}^n : v^* A v \geq 0$)
V 10.23	$\mathbb{C}^{n\times n} \ni A$ UNITÁRNÍ $\iff$ A UNIT. DIAGONALIZOVATELNÁ A $\forall \lambda$ VLASTNÍ ČÍSLO PLATÍ $\lvert\lambda\rvert = 1$.

- **V10.15**: A HERMITOVSKÁ $\iff$ A UNIT. DIAG. A VL. Č. JSOU REÁLNÁ

- **DK**: A HERMITOVSKÁ $\Rightarrow$ A NORMÁLNÍ $\overset{V10.13}{\Rightarrow}$ A UNIT. DIAG.

$\Leftarrow$: • BUĎ $A = UDU^*$, U UNIT., $D = diag(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_n}_{\in \mathbb{R}}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^* = (UDU^*)^* = U^{**} D^* U^* = U \cdot D \cdot U^* = A$$

$\Rightarrow$: • A HERMITOVSKÁ $\Rightarrow$ A UNIT. DIAG.

• BUĎ λ VL. Č. A $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ VL. VEKTOR PŘÍSLUŠNÝ λ

$\overset{T10.12}{\Rightarrow}$ v JE VL. VEKTOR A^* PŘÍSLUŠNÝ $\overline{\lambda}$

- ALE $A = A^*$, TJ. $\lambda v = Av = A^* v = \overline{\lambda} v \overset{v \neq 0}{\Rightarrow} \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

- **V 10.23**: A UNITÁRNÍ $\iff$ A UNIT. DIAG. A $\forall$ VL. Č. λ SPLŇUJÍ $|\lambda| = 1$

- **MYŠLENKA**: KDY JE $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ UNITÁRNÍ?

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \boxed{\lambda_i} & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

NORMAL $\iff |\lambda_i| = 1$