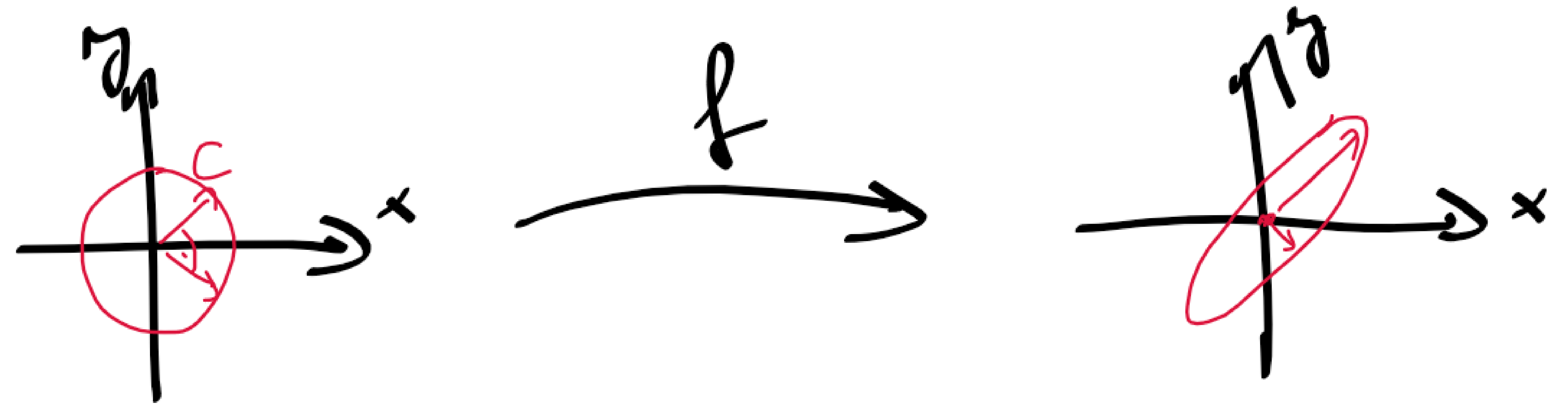
UNITÁRNÍ DIAGONALIZOVATELNOST

- **BYLO:** KAP. 8 : KOLMOST, UNITÁRNÍ (A ORTOGONÁLNÍ) ZOBRAZENÍ
  KAP. 9 : VLASTNÍ ČÍSLA A VEKTORY
  } KAP. 10 SPOJÍ TOTO DOHROMADY

- **PŘ:** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ LINEÁRNÍ OPERÁTOR, BIJEKCE



$C = \{ v \in \mathbb{R}^2 : \|v\| = 1 \}$

- BUDEME SE ZABÝVAT POUZE TĚLESY $T = \mathbb{R}$ NEBO $\mathbb{C}$
- —— " —— VÝHRADNĚ ARITMETICKÝMI VEKTOROVÝMI PROSTORY ($\mathbb{R}^n$ NEBO $\mathbb{C}^n$) SE STANDARDNÍM SKALÁRNÍM SOUČINEM

$$u, v \in \mathbb{C}^n : \quad u \cdot v = u^* v \in \mathbb{C}$$

- **DEF 10.1:** BUĎ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ČTVERCOVÁ KOMPLEXNÍ MATICE ŘÁDU n ($\rightsquigarrow f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$).
PAK A JE UNITÁRNĚ DIAGONALIZOVATELNÁ, POKUD EXISTUJE ORTONORMÁLNÍ BÁZE B PROSTORU $\mathbb{C}^n$ TAKOVÁ, ŽE
$[f_A]_B^B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ JE DIAGONÁLNÍ ($\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ JSOU VL. ČÍSLA).

BUĎ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ČTVERCOVÁ REÁLNÁ MATICE ŘÁDU n ($\rightsquigarrow f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$).
PAK A JE ORTOGONÁLNĚ DIAGONALIZOVATELNÁ, POKUD EXISTUJE ORTONORMÁLNÍ BÁZE B PROSTORU $\mathbb{R}^n$ TAKOVÁ, ŽE
$[f_A]_B^B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ JE DIAGONÁLNÍ ($\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ JSOU VL. ČÍSLA).

- **TJ:** $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, CHCEME $B = (v_1, \dots, v_n)$ ORTONORMÁLNÍ VZHLEDEM KE STD. SKALÁRNÍMU SOUČINU,

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = [f_A]_B^B = \underbrace{[id]_B^{K_n}}_{U^* = U^{-1}} \cdot \underbrace{[f_A]_{K_n}^{K_n}}_{A} \cdot \underbrace{[id]_{K_n}^B}_{U \text{ UNITÁRNÍ}}$$

$\rightsquigarrow$ TJ. A JE UNIT. DIAGONALIZOVATELNÁ, PRÁVĚ KDYŽ EXISTUJE U UNITÁRNÍ MATICE ŘÁDU n TAKOVÁ, ŽE $U^* A U$ JE DIAGONÁLNÍ (NA DIAGONÁLE JSOU PAK NUTNĚ VLASTNÍ ČÍSLA A).

– <u>DEF 10.2</u>: MATICE $X, Y \in \mathbb{C}^{n \times n}$ JSOU UNITÁRNĚ PODOBNÉ, POKUD $\exists U$ UNITÁRNÍ MATICE TAKOVÁ, ŽE $Y = U^* X U$ $(= U^{-1} X U)$.

~> ANALOGICKY NAD $\mathbb{R}$ DEFINUJEME ORTOGONÁLNÍ PODOBNOST.

– <u>T10.3</u>: BUĎ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. PAK NTJE:

1. A JE UNITÁRNĚ DIAGONALIZOVATELNÁ.
2. $\mathbb{C}^n$ MÁ ORTONORMÁLNÍ BÁZI SLOŽENOU Z VLASTNÍCH VEKTORŮ A.

$U = (v_1 | \dots | v_n)$ $\updownarrow$ $B = (v_1, \dots, v_n)$

3. A JE UNITÁRNĚ PODOBNÁ DIAGONÁLNÍ MATICI (V TOM PŘÍPADĚ JSOU NA DIAGONÁLE TAKOVÉ DIAGONÁLNÍ MATICE VL. ČÍSLA A, KAŽDÉ TOLIKRÁT, KOLIK JE JEHO ALGEBRAICKÁ = GEOMETRICKÁ NÁSOBNOST).

– <u>Dk</u>: CVIČENÍ / OPAKOVÁNÍ.

~> ANALOGICKÉ TVRZENÍ PRO REÁLNÉ MATICE

- MÁME TAKY OBDOBU V9.71 (CHARAKTERIZACE DIAGONALIZOVATELNOSTI) $\mathbb{R}^{n\times n}$:

- **V10.4**: BUĎ $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. PAK NTJE:

(1) A JE UNITÁRNĚ (ORTOGONÁLNĚ) DIAGONALIZOVATELNÁ.

(2) PLATÍ SOUČASNĚ, ŽE

NAD $\mathbb{C}$ SPLNĚNO AUTOMATICKY

A DIAGONALIZOVATELNÁ $\overset{V9.71}{\Longleftrightarrow}$

(a) A MÁ n VLASTNÍCH ČÍSEL VČETNĚ ALG. NÁSOBNOSTI

(b) $\forall$ VLASTNÍ ČÍSLO $\lambda \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) JE GEOMETRICKÁ NÁSOBNOST λ ROVNÁ ALGEBRAICKÉ NÁSOBNOSTI.

(c) $\forall$ DVOJICI RŮZNÝCH VLASTNÍCH ČÍSEL λ A μ, $\lambda \neq \mu$, PLATÍ, ŽE $M_\lambda \perp M_\mu$

VZHLEDEM KE STD. SKALÁRNÍMU SOUČINU

$\left(M_\lambda = \ker(A - \lambda I_n) = \{ v \in \mathbb{C}^n : Av = \lambda v \} \right)$

- **Dk**: (1) ⇒ (2): • (a) A (b) PLYNE Z (1) Z V9.71.

• Z DŮKAZU V9.71 DOKONCE VÍME, ŽE ORTONORMÁLNÍ BÁZE B Z VLASTNÍCH VEKTORŮ A, KTEROU NÁM DÁVÁ PŘEDPOKLAD (1), JE BÚNO TVARU $B = B_1 \dots B_k$, KDE B_i JE (NUTNĚ ORTONORMÁLNÍ) BÁZE M_{λ_i}, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ JSOU VŠECHNA PO 2 RŮZNÁ VL. ČÍSLA A.

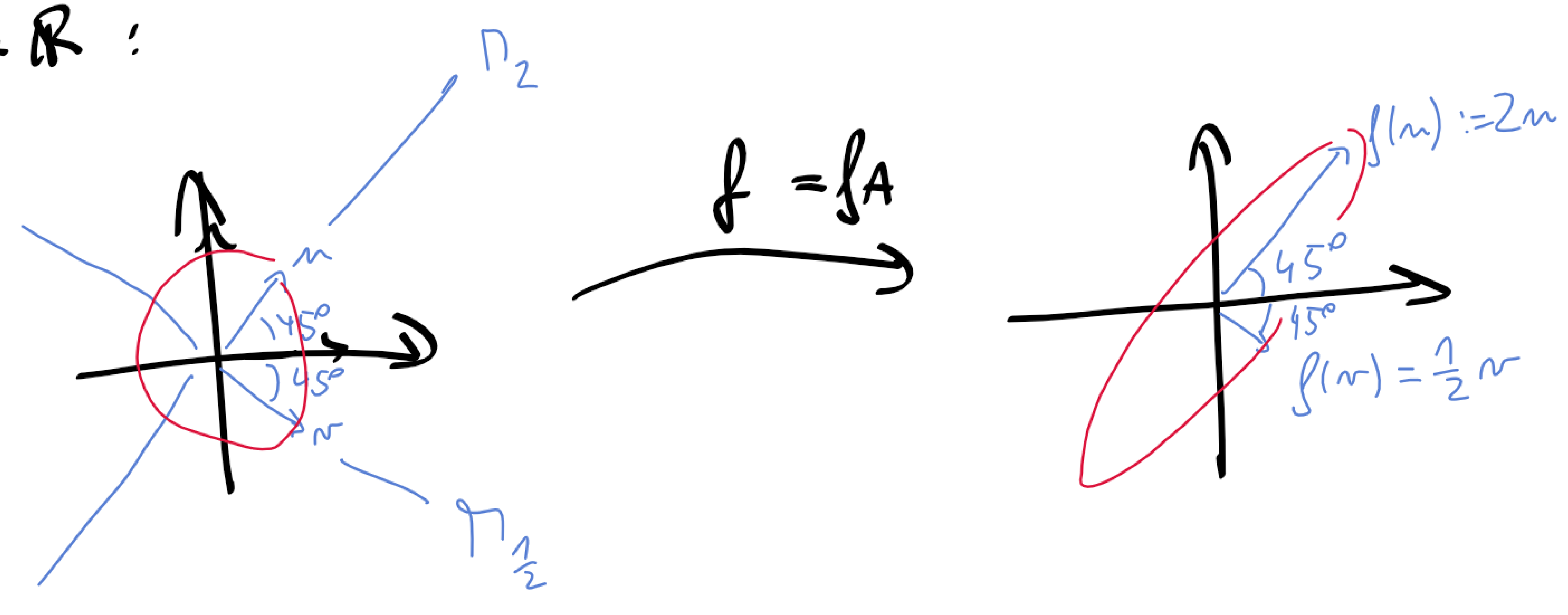
• NAVÍC $B_i \perp B_j$ $\forall i \neq j$, TJ. $M_{\lambda_i} = LO\{B_i\} \perp LO\{B_j\} = M_{\lambda_j}$

(2) ⇒ (1): • AŤ $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ JSOU VŠECHNA VL. Č. A, PO 2 RŮZNÁ

• ZVOLÍME $\forall i$ ORTONORMÁLNÍ BÁZI B_i PODPROSTORU M_{λ_i}. POLOŽÍME $B = B_1 \dots B_k$

⇒ B JE ORTONORMÁLNÍ BÁZE (JE TO BÁZE Z V9.71), $[f_A]^B_B$ JE DIAGONÁLNÍ. □

– PŘ: $T = \mathbb{R}$:



$$f_A: \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}}_{= u} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix}\sqrt2\\ \sqrt2\end{pmatrix}}_{= 2u}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}}_{= v} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt2}\\ -\frac{1}{2\sqrt2}\end{pmatrix}}_{= \frac12 v}$$

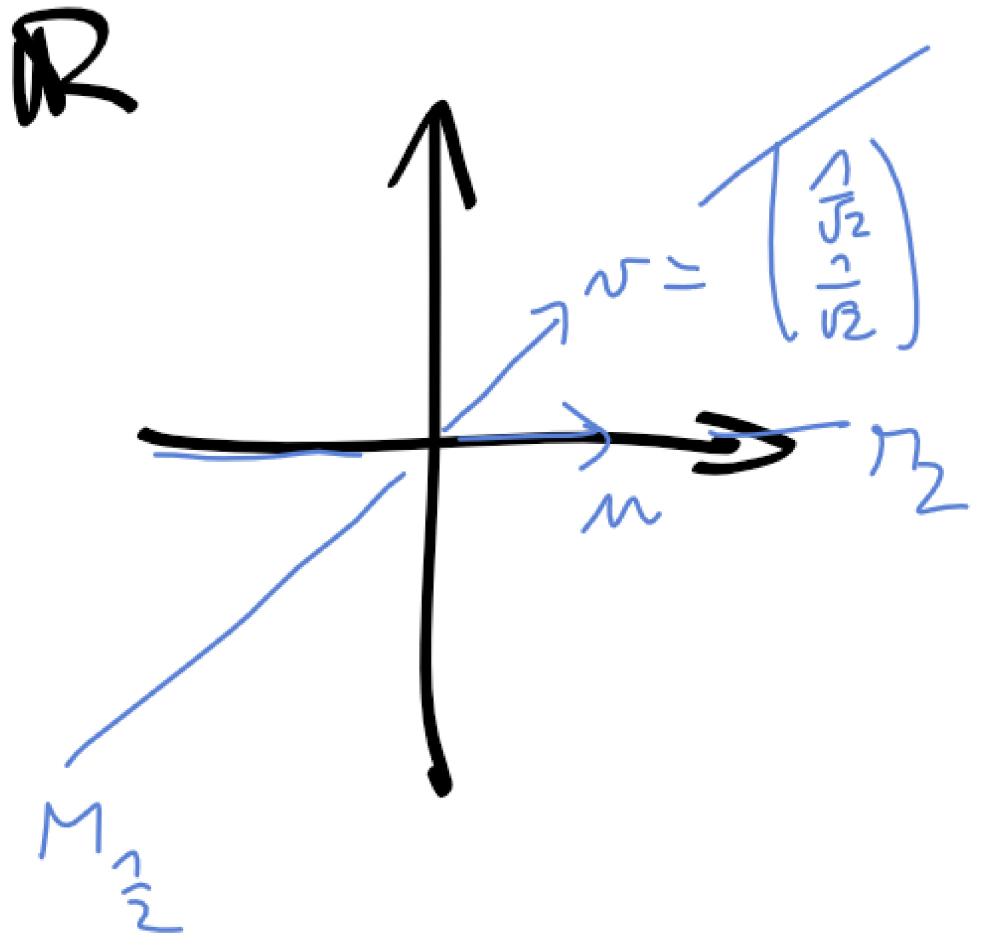
$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{= \frac{1}{\sqrt2}(u+v)} \mapsto \sqrt2 u + \frac{1}{2\sqrt2} v = \begin{pmatrix}5/4\\3/4\end{pmatrix}$$

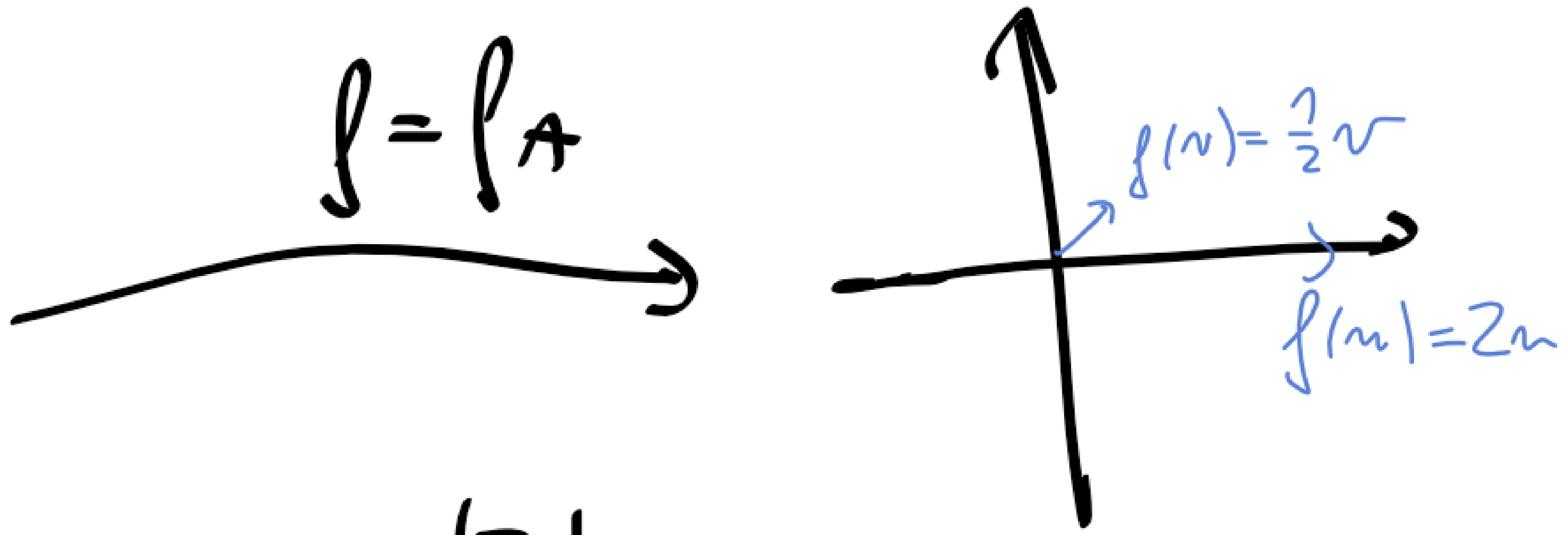
$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}3/4\\5/4\end{pmatrix}$$

– TJ. $A = \begin{pmatrix}5/4 & 3/4\\ 3/4 & 5/4\end{pmatrix}$

A JE ORTOGONÁLNĚ DIAGONALIZOVATELNÁ.

– PŘ: $T = \mathbb{R}$





$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt2}\\ \frac{1}{2\sqrt2}\end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix}2 & -3/2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$ JE DIAGONALIZOVATELNÁ,

<u>NENÍ</u> ORTOGONÁLNĚ DIAGONALIZOVATELNÁ

- CÍL: UKÁŽEME NÁSLEDUJÍCÍ:
  - $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ JE UNITÁRNĚ DIAGONALIZOVATELNÁ, PRÁVĚ KDYŽ JE TZV. NORMÁLNÍ, TJ. $A^*A = AA^*$
    (ZAHRNUJE UNITÁRNÍ MATICE, HERMITOVSKÉ MATICE, DIAGONÁLNÍ MATICE, ...)
  - $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ JE ORTOGONÁLNĚ DIAGONALIZOVATELNÁ, PRÁVĚ KDYŽ JE SYMETRICKÁ, TJ. $A = A^T$.

- PŘ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^*A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = AA^*$ JE NORMÁLNÍ

  $\rightsquigarrow$ JE UNITÁRNĚ DIAG., NE ORTOGONÁLNĚ!

- PŘIPOMENUTÍ / CVIČENÍ: VLASTNOST HERMITOVSKÉHO SDRUŽENÍ (T10.5), $T = \mathbb{C}$:

(1) $(A^*)^* = A$

(2) $(A+B)^* = A^* + B^*$ (MAJÍ-LI A, B STEJNÝ TYP)

(3) $(AB)^* = B^* A^*$ (DAJÍ-LI SE A, B NÁSOBIT)

(4) $(t\,A)^* = \bar{t}\, A^*$, $t \in \mathbb{C}$

(5) JE-LI A REGULÁRNÍ, PAK JE A^* TAKÉ REGULÁRNÍ A $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

($A A^{-1} = I_n = A^{-1} A \Rightarrow (A^{-1})^* A^* = I_n = A^* \cdot (A^{-1})^*$)

- KLÍČOVÁ VLASTNOST: BUĎ $x \in \mathbb{C}^m$, $y \in \mathbb{C}^n$, $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. PAK PLATÍ

$$\underbrace{x}_{\in\,\mathbb{C}^m} \cdot \underbrace{Ay}_{\in\,\mathbb{C}^m} = \underbrace{A^* x}_{\in\,\mathbb{C}^n} \cdot \underbrace{y}_{\in\,\mathbb{C}^n}$$

- Dk:

$$x \cdot Ay = x^*(Ay)$$

$$A^* x \cdot y = (A^* x)^* y = (x^* A^{**}) y = (x^* A) y \qquad \square$$

POZN: MÁME $A^*x \cdot y = x \cdot Ay$.

CO BY TO ZNAMENALO PRO LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ?

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[r, bend left, "f_A"] & \mathbb{C}^m \arrow[l, bend left, "f_{A^*}"] \end{tikzcd} \qquad f_{A^*}(x) \cdot y = x \cdot f_A(y)$$

OBECNÝ TVAR, KDYŽ MÁME $(V, \langle -,- \rangle_V)$, $(W, \langle -,- \rangle_W)$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, bend left, "f"] & W \arrow[l, bend left, "f^*"] \end{tikzcd} \qquad (*) \quad \langle f^*(x), y \rangle_V = \langle x, f(y) \rangle_W$$

LOGIKA VĚCI: MÁME-LI $f: V \to W$ MEZI KON. DIM. PROSTORY NAD $\mathbb{C}$ SE SKAL. SOUČINEM, PAK $(*)$ JEDNOZNAČNĚ URČUJE TZV. SDRUŽENÉ ZOBRAZENÍ $f^*: W \to V$.

$\rightsquigarrow$ DEFINICI f^* SE CHCEME PRO TEĎ VYHNOUT, PROTO SE OMEZUJEME POUZE NA ARITMETICKÉ VEKTOROVÉ PROSTORY SE STANDARDNÍM SKALÁRNÍM SOUČINEM.

– <u>BUDE</u>: TZV. SINGULÁRNÍ ROZKLAD, $T = \mathbb{R}$

$$f : V \longrightarrow W \qquad (\text{NE NUTNĚ } V = W)$$

$\rightsquigarrow \exists$ ORTONORM. BÁZE $\underset{V}{B}$, $\underset{W}{C}$ TAKOVÉ, ŽE $(f)^B_C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_n & & \\ 0 & & & \ddots & \end{pmatrix}$