CAYLEYHO-HAMILTONOVA VĚTA A JAK FUNGUJE GOOGLE

– CAYLEYHO-HAMILTONOVA VĚTA

- T TĚLESO, $A \in T^{n \times n}$ ČTVERCOVÁ MATICE
- DÍVÁME SE NA MOCNINY:

$$M = (I_n, A, A^2, A^3, \ldots\ldots, A^{n^2})$$ ... POSLOUPNOST DÉLKY n^2+1

- $T^{n \times n}$ JE VEKTOROVÝ PROSTOR, $\dim T^{n \times n} = n^2$

$\Rightarrow$ M JE LINEÁRNĚ ZÁVISLÁ!

NE VŠECHNA NULOVÁ

$\Rightarrow$ $\exists\, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n^2} \in T$: $c_{n^2} \cdot A^{n^2} + c_{n^2-1} A^{n^2-1} + \ldots + c_2 A^2 + c_1 A + c_0 I_n = 0$

$\rightsquigarrow$ „A JE KOŘENEM POLYNOMU $q(x) = c_{n^2} x^{n^2} + c_{n^2-1} x^{n^2-1} + \ldots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$".

$\rightsquigarrow$ Z DISKUZE TAKÉ PLYNE, ŽE $\deg q(x) \leq n^2$

$\rightsquigarrow$ CAYLEY-HAMILTON: $p_A(A) = 0$, KDE p_A JE CHAR. POLYNOM (STUPNĚ n)

– LINEÁRNÍ OPERÁTORY A POLYNOMY

- BUĎ V V.P. NAD T A $f: V \to V$ LINEÁRNÍ OPERÁTOR
- MÁME V.P. NAD T, JEHOŽ PRVKY JSOU LINEÁRNÍ OPERÁTORY: $\mathrm{Hom}(V,V)$ (VIZTE KAP. 6.5)
  - $f, g \in \mathrm{Hom}(V,V) \rightsquigarrow f+g : V \to V$, $v \mapsto f(v)+g(v)$

    $f \in \mathrm{Hom}(V,V)$, $t \in T \rightsquigarrow tf : V \to V$, $v \mapsto t \cdot f(v)$

    $\rightsquigarrow 0 : V \to V$, $v \mapsto 0$

NAPŘ. PLATÍ:
$$\boxed{(f+g)\circ h = f\circ h + g \circ h}$$

- JE-LI $q(x) = \sum_{i=0}^{d} c_i x^i$ POLYNOM, DEFINUJEME OPERÁTOR
$$q(f) = \sum_{i=0}^{d} c_i \cdot f^i : V \longrightarrow V$$
$$v \longmapsto \sum_{i=0}^{d} c_i \cdot f^i(v)$$

- JE-LI $\dim V = n$, PAK $\dim \mathrm{Hom}(V,V) = n^2$

(ZVOLÍME-LI $B = (u_1, \dots, u_n)$ BÁZI V, DOSTANEME ISO: $\mathrm{Hom}(V,V) \to T^{n\times n}$, $f \mapsto [f]_B^B$)

$\rightsquigarrow$ MŮŽEME PROVÉST DISKUZI Z MINULÉ STRANY PRO OPERÁTORY NA KON. GEN. V. P.

– POZOROVÁNÍ: JSOU-LI $g(x), r(x)$ POLYNOMY NAD T, $f: V \to V$ OPERÁTOR, A JE-LI $h(x) = g(x) \cdot r(x)$, PAK

$$h(f) = g(f) \circ r(f) \quad (= r(f) \circ g(f))$$

$$h(f), g(f), r(f) : V \to V$$

- $g(x) = \sum_{i=0}^{d} c_i x^i$, $\quad r(x) = \sum_{j=0}^{e} d_j x^j$, $\quad c_i, d_j \in T$

$$\Rightarrow h(x) = g(x) \cdot r(x) = \sum_{k=0}^{d+e} \underbrace{\Big(\sum_{i+j=k} c_i d_j \Big)}_{\text{KOEFICIENTY } h} \cdot x^k$$

$$\Rightarrow h(f) = \sum_{k=0}^{d+e} \Big(\sum_{i+j} c_i \cdot d_j \Big) \cdot f^k$$

$$g(f) \cdot r(f) = \Big(\sum_{i=0}^{d} c_i f^i \Big) \circ \Big(\sum_{j=0}^{e} d_j f^j \Big) \overset{!}{=} \sum_{i=0}^{d} \sum_{j=0}^{e} c_i d_j f^{i+j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{d+e} \Big(\sum_{i+j=k} c_i d_j \Big) f^{i+j}$$

– PŘ: $T = \mathbb{R}$, $V = \{ \ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ell$ MÁ SPOJITÉ DERIVACE LIB. ŘÁDU$\}$, $f = \frac{d}{dx} : V \to V$, $\ell \mapsto \frac{d\ell}{dx}$

$$g(x) = \underset{(x+1)^2}{\underbrace{x^2 + 2x + 1}} \rightsquigarrow g(f) = \frac{d^2}{(dx)^2} + 2 \cdot \frac{d}{dx} + id_V = \Big(\frac{d}{dx} + id_V \Big)^2 : V \to V$$

V 9.119 (CAYLEYHO – HAMILTONOVA):

BUĎ T TĚLESO, V KON. GEN. VEKTOROVÝ PROSTOR NAD T A $f: V \to V$ LIN. OPERÁTOR. PAK

$$\underbrace{\chi_f}_{\text{CHAR. POLY. } f}(f) = \underbrace{0}_{0:V\to V \text{ NULOVÝ OPERÁTOR}}$$

DK: – BUDEME POŽADOVAT, ABY χ_f BYL SOUČINEM LINEÁRNÍCH POLYNOMŮ,

BÚNO

TJ. $\chi_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \cdots (\lambda_n - \lambda)^{k_n}$, $k_i \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in T$

($\Leftrightarrow$ PRO f $\exists$ JORDANŮV KANONICKÝ TVAR)

– V PŘÍPADĚ POTŘEBY BUDEME PRACOVAT NAD VĚTŠÍM TĚLESEM, KDE TOTO PLATÍ (VŽDY EXISTUJE – NÁPLŇ PŘEDNÁŠKY Z ALGEBRY VE 2. ROČNÍKU)

– BUĎ B BÁZE VZNIKLÁ SPOJENÍM JORDANOVÝCH ŘETÍZKŮ,

TJ. $[f]_B^B = \operatorname{diag}(J_{\lambda_1,k_1}, J_{\lambda_2,k_2}, \dots, J_{\lambda_n,k_n})$, $\chi_f(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)^{k_1} \cdots (\lambda_n - \lambda)^{k_n}$

($\lambda_1, \dots, \lambda_n$ NEMUSÍ BÝT PO DVOU RŮZNÉ)

– VŠIMNĚME SI, ŽE Z T9.84: $(\lambda_i I_{k_i} - J_{\lambda_i,k_i})^{k_i} = 0$

$\uparrow$ J_{λ_i,k_i} JE „KOŘENEM" ČINITELE $(\lambda_i - \lambda)^{k_i}$

$\Rightarrow \chi_f(J_{\lambda_i,k_i}) = 0$

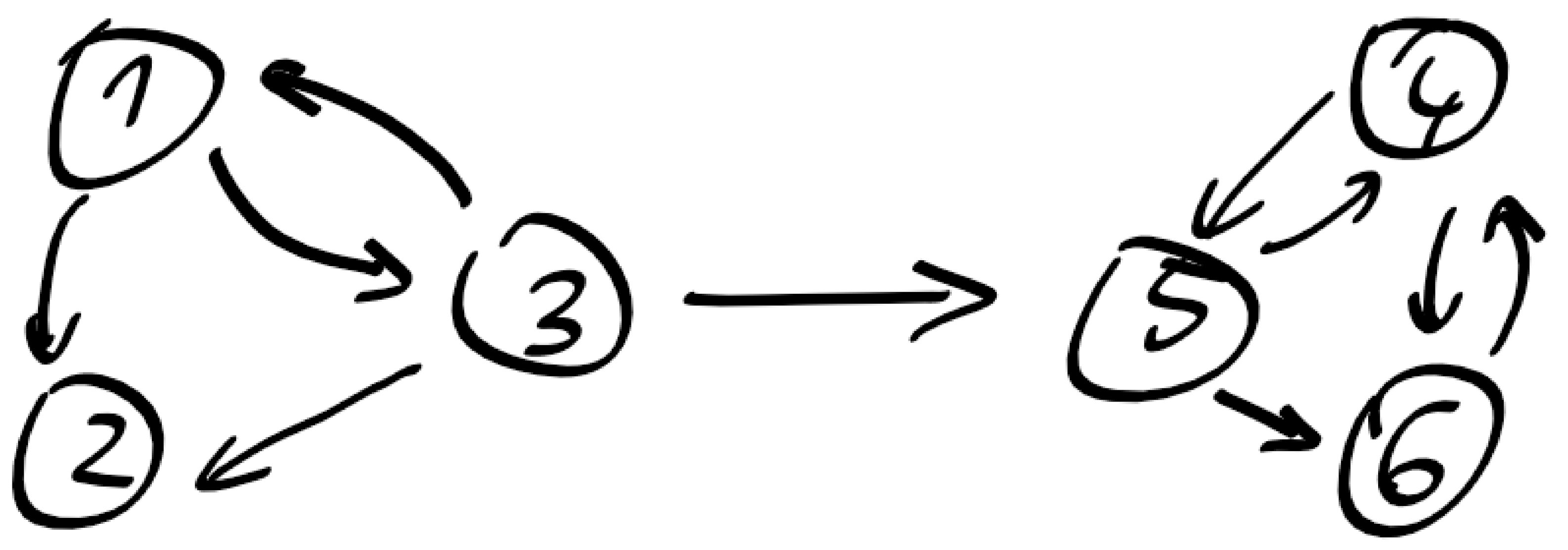
$\Rightarrow [\chi_f(f)]_B^B = \chi_f([f]_B^B) = \operatorname{diag}(\chi_f(J_{\lambda_1,k_1}), \dots, \chi_f(J_{\lambda_n,k_n})) = 0$ $\square$

JAK FUNGUJE GOOGLE (RESP.: JAK GOOGLE VYHODNOCUJE VÝZNAM WEBOVÝCH STRÁNEK)

- MYŠLENKA: „STRÁNKA JE TÍM VÝZNAMNĚJŠÍ, ČÍM VÍC JINÝCH STRÁNEK NA NI ODKAZUJE."

- PŘÍKLAD MINIWEBU:

PŘ: $n=6$!



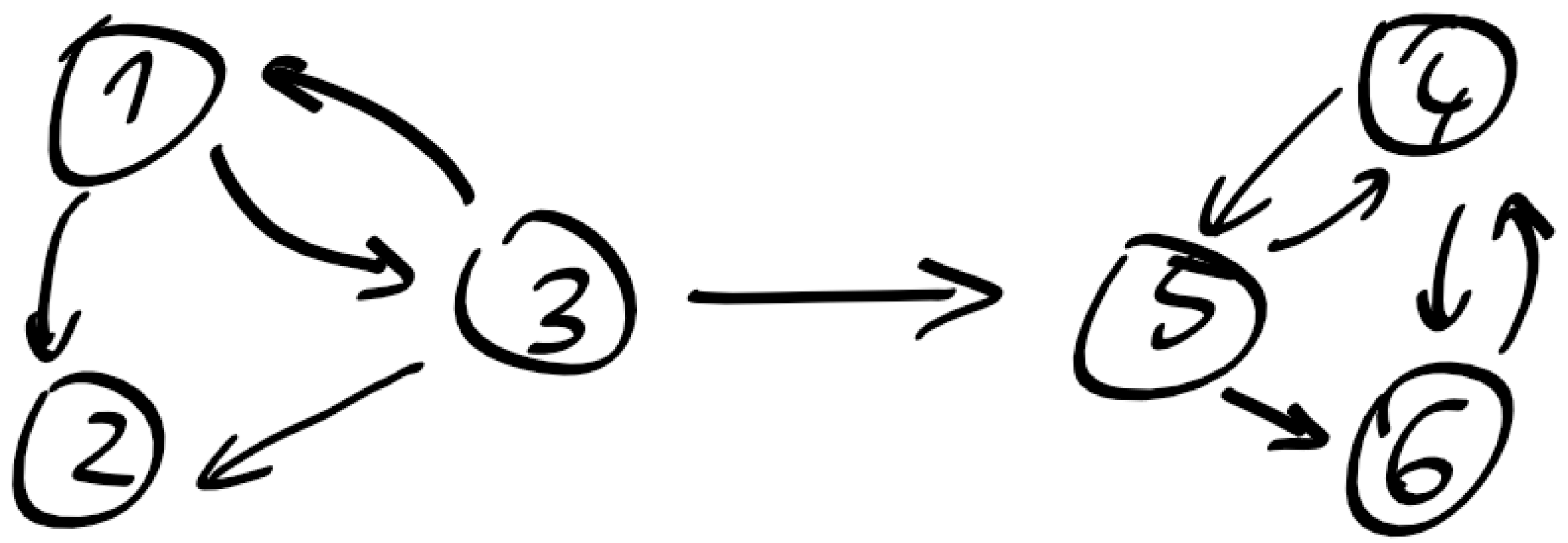
$n = \#$STRÁNEK
$= \#$UZLŮ

- VE SKUTEČNOSTI!: $n \sim 10^{10}$ AŽ 10^{11}

- TUTO SÍŤ BUDEME NÁHODNĚ PROCHÁZET:
  - ZAČNEME V NÁHODNÉ STRÁNCE S PSTÍ $\frac{1}{n}$ (0. KROK)
  - V KAŽDÉM KROKU $k = 1, 2, \ldots$ PŘEJDEME NÁHODNĚ NA STRÁNKU, NA NIŽ TA STRÁNKA, KDE PRÁVĚ JSME, ODKAZUJE (S PSTÍ $\frac{1}{\#\text{ODKAZŮ Z AKTUÁLNÍ STR.}}$)

- PŘÍKLAD MINIWEBU:

PR: $n=6$!



$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi_0 = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

- $\pi_k \in \mathbb{R}^n$, $\pi_k = \begin{pmatrix} \pi_1^k \\ \pi_2^k \\ \vdots \\ \pi_n^k \end{pmatrix}$, π_i^k = PST, ŽE V k-TÉM KROKU SKONČÍME NA STR. i

- SPECIÁLNĚ: $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1/n \\ 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix}$

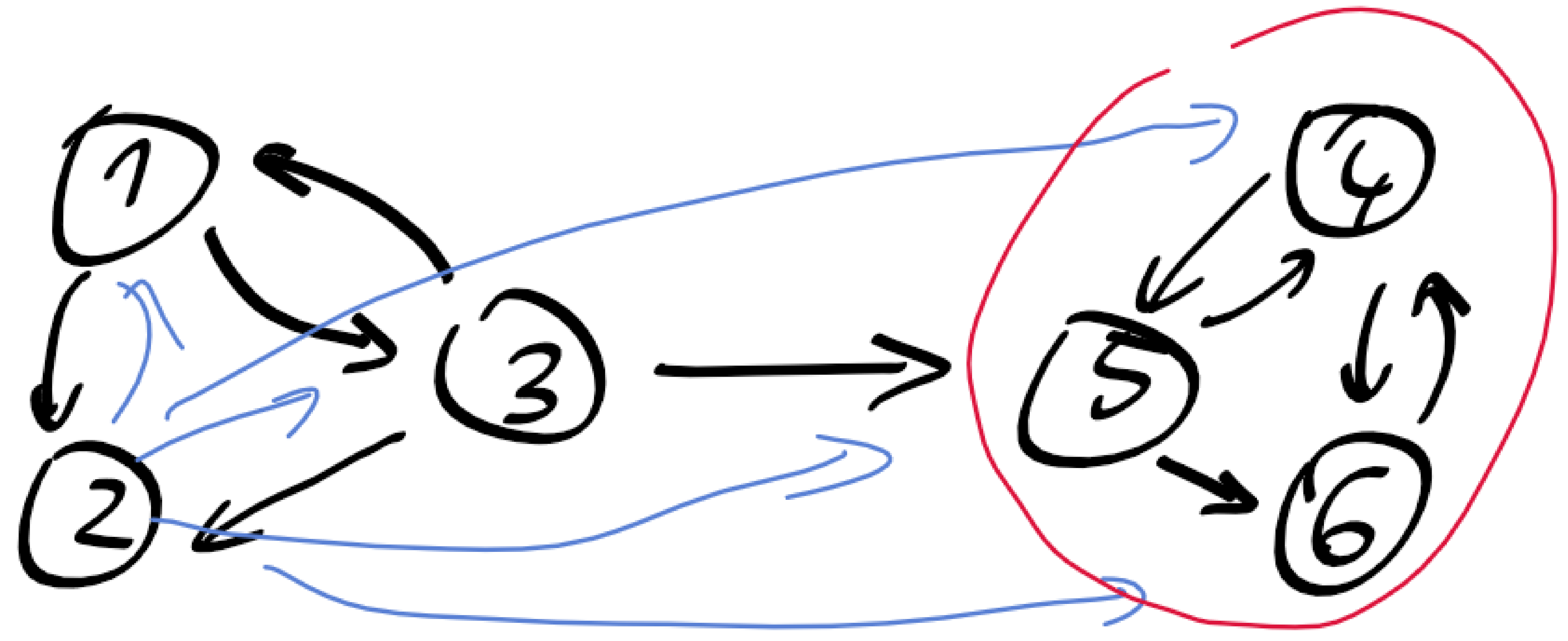
- p_{ij} = PST, ŽE ZE STRÁNKY j PŘEJDEME NA STRÁNKU i (ZA PODMÍNKY, ŽE JSME V DANÉ CHVÍLI NA STRÁNCE j)

$\rightsquigarrow$ $\pi_i^{k+1} = p_{i1} \cdot \pi_1^k + p_{i2} \pi_2^k + p_{i3} \pi_3^k + \dots + p_{in} \cdot \pi_n^k$

$\rightsquigarrow$ $\pi^{k+1} = H \cdot \pi^k$, $H = (p_{ij})$ $\rightsquigarrow$ DISKRÉTNÍ LIN. DYN. SYSTÉM

- PŘÍKLAD MINIWEBU:

PŘ: $n=6$!



$$H=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad r_0=\begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

- MODEL PROCHÁZENÍ WEBU UPRAVÍME, ABYCHOM VYŘEŠILI 2 PROBLÉMY:

(a) CHCEME UPRAVIT CHOVÁNÍ VE STRÁNKÁCH, ZE KTERÝCH NEVEDOU ODKAZY:

V TAKOVÝCH STRÁNKÁCH j PŘEJDEME NA LIBOVOLNOU STRÁNKU NÁHODNĚ, $\quad s_{ij}=\frac{1}{n} \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}$

$$S=\begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad r_{k+1}=S\cdot r_k$$

TAKOVÁ MATICE SE NAZÝVÁ MARKOVOVSKÁ (TÉŽ STOCHASTICKÁ)

POZOROVÁNÍ: • S MÁ NEZÁPORNÉ REÁLNÉ SLOŽKY, Σ SLOŽEK KAŽDÉHO SLOUPCE JE 1

• JELIKOŽ Σ SLOŽEK r_0 JE 1, TOTÉŽ PLATÍ PRO SOUČET SLOŽEK r_k $\forall k \geq 1$ SLOŽKY r_0, TEDY I r_k JSOU ≥ 0

(b) PODSÍTĚ, ZE KTERÝCH SE NELZE DOSTAT VEN:

ZVOLÍME $\alpha \approx 0{,}85$ AŽ $0{,}9$:

$\alpha < 1$

$$G=\alpha\cdot S+(1-\alpha)\frac{1}{n}E, \quad E=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

MARKOVOVSKÁ, KLADNÉ SLOŽKY

– V (PERRON, 1907): • G MÁ VLASTNÍ ČÍSLO 1 (DÚ (4.1))

A PŘÍSL. VLASTNÍ VEKTOR π S KLADNÝMI SLOŽKAMI

(BÚNO: Σ SLOŽEK π JE 1).

• DALŠÍ KOMPLEXNÍ VL. Č. λ SPLŇUJÍ $|\lambda| < 1$.

$$\leadsto \quad R^{-1} G R = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \boxed{} & & \\ & & \boxed{} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$R^{-1} G^{k} R \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

– PRO NÁŠ PROCES: $\quad \pi_k \longrightarrow \pi, \quad k \to \infty$