EXISTENCE JORDANOVA KANONICKÉHO TVARU

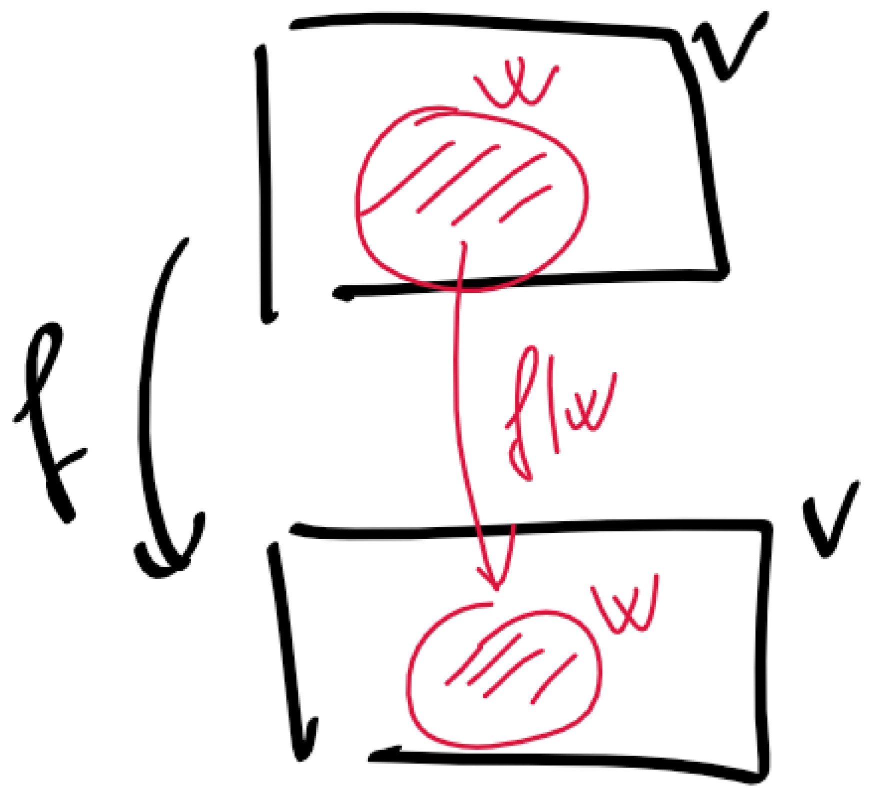
- PŘIPOMENUTÍ:
  - V9.97: BUĎ $f: V \to V$ LINEÁRNÍ OPERÁTOR NA VEKTOROVÉM PROSTORU DIMENZE n NAD T. PAK NTJE:
    (1) PRO f EXISTUJE JORDANŮV KANONICKÝ TVAR.
    (2) f MÁ n VLASTNÍCH ČÍSEL, POKUD JE POČÍTÁME VČETNĚ ALGEBRAICKÝCH NÁSOBNOSTÍ.

- DŮSL 9.98: BUĎ $f: V \to V$ LINEÁRNÍ OPERÁTOR NA KOMPLEXNÍM VEKTOROVÉM PROSTORU DIMENZE n. PAK PRO f EXISTUJE JORDANŮV KANONICKÝ TVAR.

- U V9.97 JSME DOKAZOVALI (1) $\Rightarrow$ (2), DNES JDE O (2) $\Rightarrow$ (1).

INVARIANTNÍ PODPROSTORY LINEÁRNÍHO OPERÁTORU:

- **DEF 9.108:** BUĎ $f: V \to V$ LINEÁRNÍ OPERÁTOR NA VEKTOROVÉM PROSTORU V NAD T. PAK ŘEKNEME, ŽE $W \subseteq V$ JE INVARIANTNÍM PODPROSTOREM OPERÁTORU f, POKUD



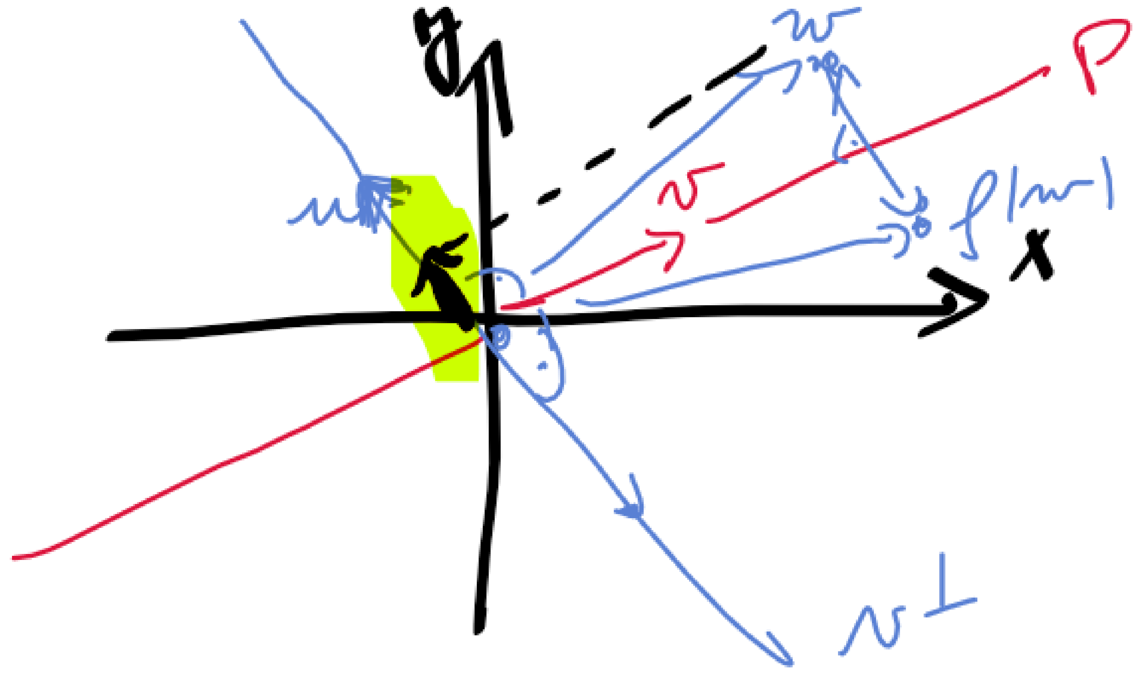
$$\forall v \in W : \quad f(v) \in W$$

(JINÝMI SLOVY: $f(W) \subseteq W$, ANEB f SE ZÚŽÍ NA LINEÁRNÍ OPERÁTOR $f|_W : W \to W$)

- **PŘ:** OPERÁTORY NA $V = \mathbb{R}^2$:

① $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ JE OSOVÁ SOUMĚRNOST PODLE PŘÍMKY $P = LO\{v\}$, $v \neq 0$:

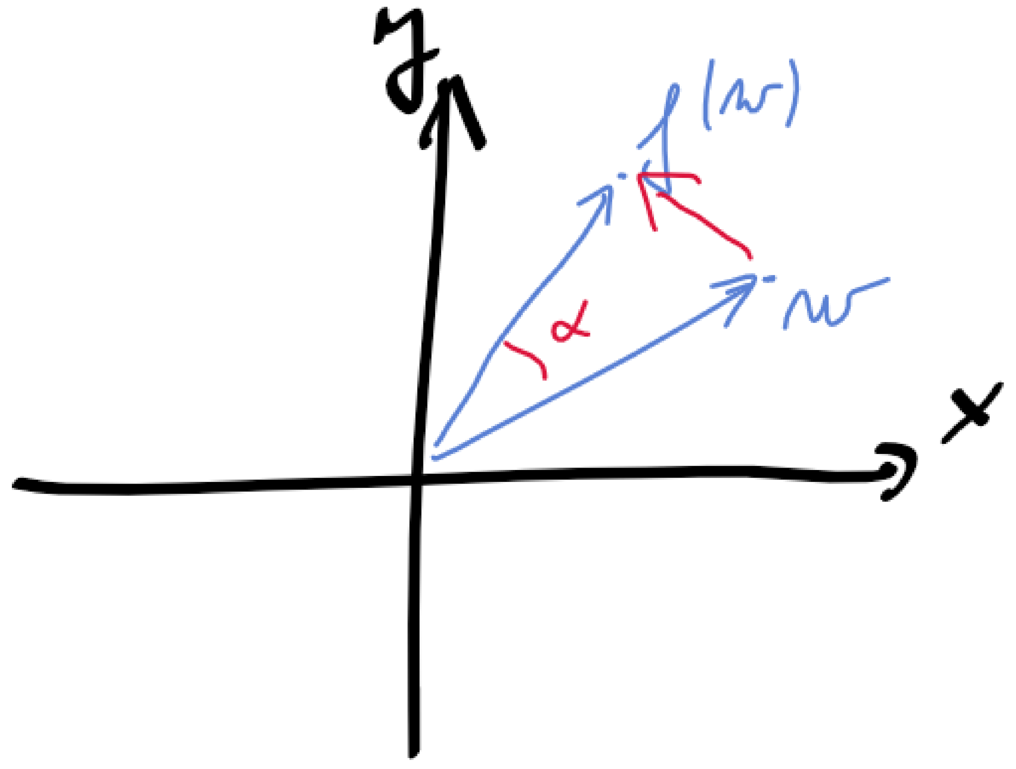
$$f: w \mapsto w - 2\frac{w \cdot n}{\|n\|^2} n$$



- INVARIANTNÍ PODPROSTORY f:
  - $\{o\}$ } TRIVIÁLNÍ
  - $\mathbb{R}^2$
  - $LO\{v\} = P$
  - $v^\perp$ (VZHLEDEM KE STD. SKAL. SOUČINU)

(2) $f_{A}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ OTOČENÍ O ÚHEL α, KTERÝ NENÍ NÁSOBEK $180°$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

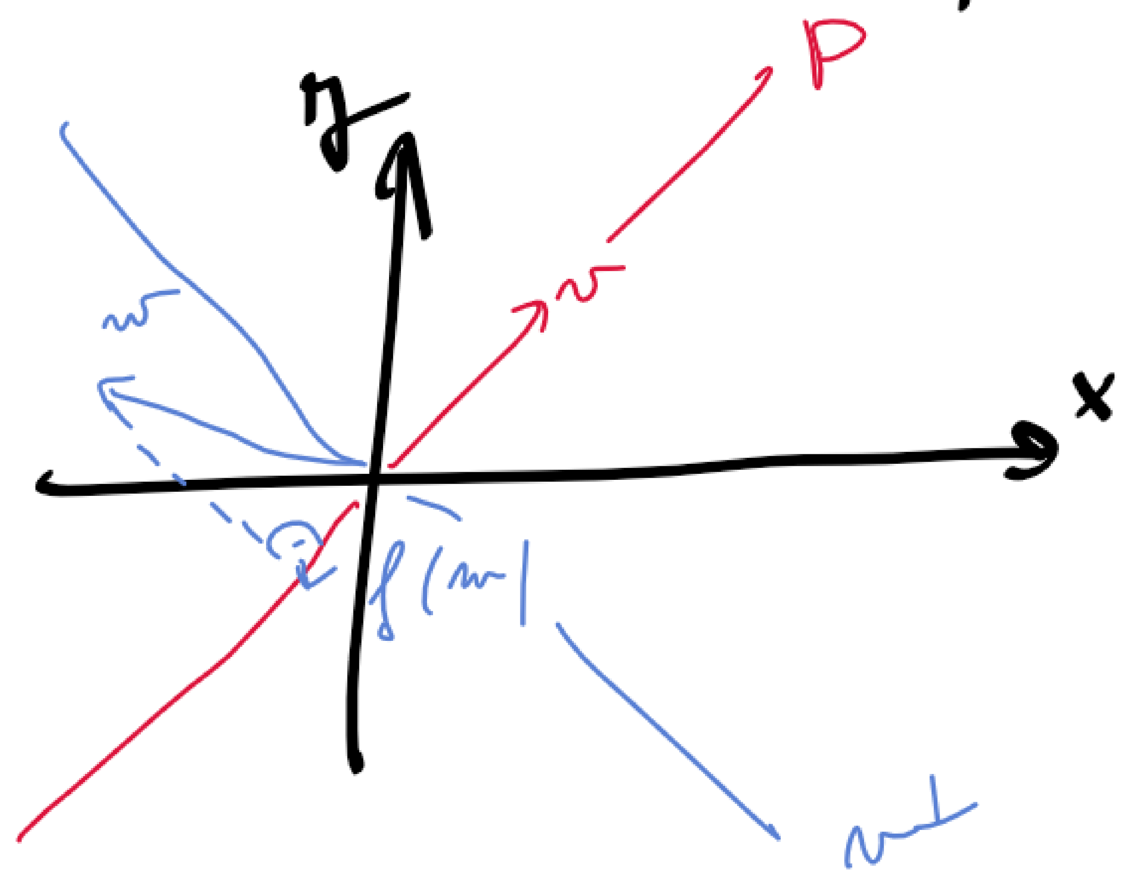


LO{v}, LO{$\overline{v}$}, KDE $v \in \mathbb{C}^2$ JE VL. VEKTOR $v = \binom{1}{i}$

- <u>INVARIANTNÍ PODPROSTORY</u>: POUZE TRIVIÁLNÍ, $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$
- <u>POZN</u>: $f_A: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ INVARIANTNÍ PODPOSTORY DIMENZE 1 MÁ!

---

(3) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ KOLMÁ PROJEKCE NA $P = LO\{v\}$:



- <u>INVARIANTNÍ PODPROSTORY f</u>:
  - $\{0\}$
  - $\mathbb{R}^2$
  - $P = LO\{v\}$
  - $v^\perp$

OBECNÉ SITUACE, KDY EXISTUJÍ INVARIANTNÍ PODPROSTORY:

- BUĎ $f: V \to V$ LINEÁRNÍ OPERÁTOR
- MÁME VŽDY TYTO INVARIANTNÍ PODPROSTORY:
  - $\{0\}$, V — TRIVIÁLNÍ
  - $\ker f$ $\quad \left(f|_{\ker f} : \ker f \to \ker f,\ v \mapsto 0 \right)$
  - $\operatorname{Im} f$
  - u JE VLASTNÍ VEKTOR f $\Rightarrow$ $W := LO\{u\}$ JE INVARIANTNÍM PODPROSTOREM f

$$f|_W : \underbrace{t}_{\in T} \cdot u \longmapsto \underbrace{\lambda}_{\text{VL. ČÍSLO}} \cdot t u$$

  - JE-LI $(u_1, \dots, u_k)$ JORDANŮV ŘETÍZEK, PAK $W := LO\{u_1, \dots, u_k\}$ JE INVARIANTNÍM PODPROSTOREM f:

$$f|_W : a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k \longmapsto \lambda a_1 u_1 + a_2(\lambda u_2 + u_1) + \dots + a_k(\lambda u_k + u_{k-1})$$

$$= (\lambda a_1 + a_2) \cdot u_1 + (\lambda a_2 + a_3) u_2 + \dots + \lambda a_k u_k \in W$$

T9.110

- POZOROVÁNÍ: JAKÉ INVARIANTNÍ PODPROSTORY MÁ $id_V : V \to V$?
VŠECHNY PODPROSTORY!

STEJNĚ TAK $\lambda \cdot id_V : V \to V$, $v \mapsto \lambda v$, $\lambda \in T$.

- TG. 111: BUĎ $f: V \to V$ LINEÁRNÍ OPERÁTOR A BUĎTE $U, W \leq V$ INVARIANTNÍ PODPROSTORY f. PAK $U+W$ A $U \cap W$ JSOU INVARIANTNÍ PODPROSTORY f.

- DK: PRO $U+W$: • KAŽDÝ VEKTOR Z $U+W$ JE TVARU $\underset{\in U}{u} + \underset{\in W}{w}$

• PAK $f(u+w) = \underbrace{f(u)}_{\in U} + \underbrace{f(w)}_{\in W} \in U+W$

PRO $U \cap W$: • BUĎ $v \in U \cap W$, TJ. $v \in U$ & $v \in W$
$\Rightarrow f(v) \in U$ & $f(v) \in W$, TJ. $f(v) \in U \cap W$

$\Rightarrow$ LO SPOJENÍ $\underbrace{\text{JORDANOVÝCH ŘETÍZKŮ}}_{\text{KONEČNĚ MNOHA}}$ f JE VŽDY INVARIANTNÍM PODPROSTOREM f

- **T9.112**: Buď $f: V \to V$ lineární operátor na konečně dimenzionálním vektorovém prostoru V nad T, buď $W \leq V$ invariantní podprostor a $g = f|_W : W \to W$. Pak $p_g(\lambda)$ dělí $p_f(\lambda)$.

- **Dk**:
  - zvolíme bázi $C = (v_1, \dots, v_k)$ prostoru W
  - C rozšíříme na bázi $B = (v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ prostoru V
  - uvažujme $G := [f]_B^B = \Big(\underbrace{[f(v_1)]_B \Big| \dots \Big| [f(v_k)]_B}_{\in [W]_B} \Big| [f(v_{k+1})]_B \Big| \dots \Big| [f(v_n)]_B \Big)$

$\Rightarrow$ G je tvaru $\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline O & F \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}k \\ \}n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{k} & \underbrace{\quad}_{n-k} \end{array} & \end{array}$, přičemž $A = [g]_C^C$

$(f(v_i) = g(v_i) \ \forall i = 1, \dots, k)$

$$\Rightarrow p_f(\lambda) = \det(\underbrace{G}_{[f]_B^B} - \lambda I_n) = \det \left(\begin{array}{c|c} A - \lambda I_k & E \\ \hline O & F - \lambda I_{n-k} \end{array}\right) \overset{T9.68}{=} \det(\underbrace{A}_{[g]_C^C} - \lambda I_k) \cdot \det(F - \lambda I_{n-k})$$

$$= p_g(\lambda) \cdot p_F(\lambda)$$

- <u>DŮSL 9.113</u>: BUĎ $f: V \to V$, V KON. GENEROVANÉ, $n = \dim V$

$W \leq V$ INVARIANTNÍ PODPROSTOR, $g = f|_W : W \to W$, $m = \dim W$ $(\leq n)$.

MÁ-LI f n VLASTNÍCH ČÍSEL VČETNĚ ALG. NÁSOBNOSTI,

PAK MÁ g m ——— II ———.

- „DK": EKVIVALENTNĚ DOKAZUJEME:

$p_f(\lambda)$ JE SOUČINEM LIN. POLYNOMŮ, TJ. $p_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$ $\Rightarrow$ $p_g(\lambda)$ JE SOUČINEM LIN. POLYNOMŮ

TATO FAKTA O POLYNOMECH BUDOU DOKÁZÁNA V PŘEDNÁŠCE Z ALGEBRY VE 2. ROČ.

- TV. 115: BUĎ V V.P. A $W \leq V$ PODPROSTOR. PAK:
  - JSOU-LI $f, g: V \to V$ TAKOVÉ, ŽE W JE INVARIANTNÍM PODPROSTOREM f I g, PAK W JE INVARIANTNÍM PODPROSTOREM $f+g$.
  - JE-LI W INVARIANTNÍM PODPROSTOREM f A $t \in T$, PAK W JE ——— II ——— $t \cdot f$.

- Dk: • BUĎ TEDY W INVAR. PODPROSTOREM f I g
  - PAK PRO KAŽDÉ $w \in W$ PLATÍ

$$(f+g)(w) = \underbrace{f(w)}_{\in W} + \underbrace{g(w)}_{\in W} \in W,$$

TJ. W JE INVAR. PODPROSTOREM $f+g$

  - DRUHÁ ČÁST JE PODOBNÁ.

- DŮSL: BUĎ $f: V \to V$ LINEÁRNÍ OPERÁTOR, $\lambda \in T$ A $g = f - \lambda\, id_V$ (TJ. $f = g + \lambda \cdot id_V$). PAK f A g MAJÍ STEJNOU MNOŽINU INVARIANTNÍCH PODPROSTORŮ.

- **V9.97**: BUĎ $f: V \to V$ LINEÁRNÍ OPERÁTOR NA VEKTOROVÉM PROSTORU DIMENZE n NAD T. PAK NTJE:
  - (1) PRO f EXISTUJE JORDANŮV KANONICKÝ TVAR.
  - (2) f MÁ n VLASTNÍCH ČÍSEL, POKUD JE POČÍTÁME VČETNĚ ALGEBRAICKÝCH NÁSOBNOSTÍ.

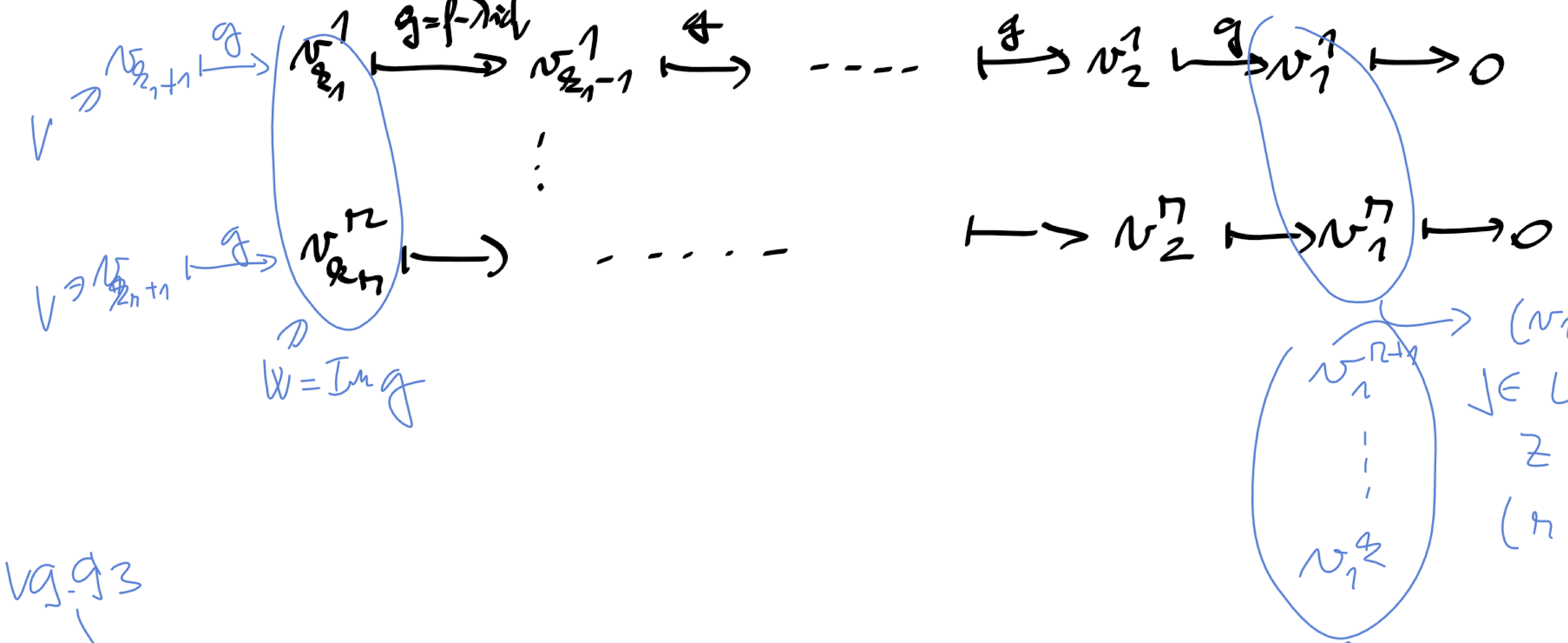
- **DK (2) ⇒ (1)**: PŘEDPOKLÁDEJME (2), POLOŽME $n = \dim V$
  - **INDUKCE PODLE n**:
    - $n=1$: JASNÉ
    - $n>1$: PŘEDPOKLÁDÁME, ŽE V9.97 PLATÍ PRO PROSTORY $\dim < n$.
      - VEZMEME $\lambda \in T$ VLASTNÍ ČÍSLO f (Z (2) MUSÍ EXISTOVAT!) A POLOŽME $g = f - \lambda\, id_V$
      - PAK MÁME INVARIANTNÍ PODPROSTORY g (TEDY I f):
        - $\ker g = M_\lambda$ .... $\dim \ker g = $ GEOM. NÁS. $\lambda = k > 0$
        - $\underbrace{\operatorname{Im} g}_{W}$ ------ $\dim \operatorname{Im} g = n - k =: m < n$

$\rightsquigarrow$ $h := f|_W$ SPLŇUJE PŘEDPOKLAD (2), PODLE IND. PŘEDP. MÁ BÁZI VZNIKLOU SPOJENÍM JORD. ŘETÍZKŮ:

– DK (2) ⇒ (1), POKRAČOVÁNÍ:

⇝ $h := f|_W$ SPLŇUJE PŘEDPOKLAD (2), PODLE IND. PŘEDP. MÁ BÁZI VZNIKLOU SPOJENÍM JORD. ŘETÍZKŮ:

⇝ MÁME ŘETÍZKY h PŘÍSLUŠNÉ λ, ŘEKNĚME, ŽE JICH JE n:



$(v_1^1, \dots, v_1^n)$ JE LN POSLOUPNOST Z $\ker g = M_\lambda$ ($n \le q = \dim M_\lambda$)

DOPLNÍME $(v_1^1, \dots, v_1^n)$ NA BÁZI $(v_1^1, \dots, v_1^q)$ PROSTORU M_λ

Vq. 9.3

⇝ LN POSLOUPNOST VE V VZNIKLÁ SPOJENÍM ROZŠÍŘENÝCH ŘETÍZKŮ, KTERÁ MÁ $m + q = n$ PRVKŮ, TEDY BÁZE V.