JAK URČIT JORDANŮV KANONICKÝ TVAR?

- **V9.93**: BUĎ T TĚLESO, $f: V \to V$ LINEÁRNÍ OPERÁTOR NA V.P. V NAD T, BUĎTE $B_1, \dots, B_s$ JORDANOVY ŘETÍZKY POPOŘADĚ DÉLEK $k_1, \dots, k_s$ PŘÍSLUŠNÉ VLASTNÍM ČÍSLŮM $\lambda_1, \dots, \lambda_s$.

(ZOBECŇUJE V9.62)

PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE $\forall \lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ JE POSLOUPNOST POČÁTKŮ TĚCH B_i, KTERÉ JSOU PŘÍSLUŠNÉ λ, LINEÁRNĚ NEZÁVISLÁ.

PAK UŽ JE SPOJENÍ $B_1 \dots B_s$ LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ.

- **PŘIPOMENUTÍ**: JORDANŮV ŘETÍZEK OPERÁTORU f DÉLKY k PŘÍSLUŠNÝ VL. Č. λ S POČÁTKEM v_1: $(v_1, v_2, \dots, v_k)$,

$$v_k \xmapsto{f-\lambda id_V} \dots \longmapsto v_2 \xmapsto{f-\lambda id_V} v_1 \xmapsto{f-\lambda id_V} 0$$

- POZN: $v_1 \neq 0 \overset{V9.93}{\Longrightarrow} (v_1, \dots, v_k)$ JE LN.

- **DK**: - OZNAČME $B_i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_{k_i}^i)$, $(f - \lambda_i id)(v_j^i) = v_{j-1}^i$ (KVŮLI ZNAČENÍ: $v_0^i := 0$),
  $B := B_1 \dots B_s$
  - INDUKCE PODLE DÉLKY B, TJ PODLE $k = k_1 + k_2 + \dots + k_s$
  - **PŘÍPAD $k=1$**: MÁME NUTNĚ $s=1$, $B = B_1 = (v_1^1)$, Z PŘEDPOKLADU $v_1^1 \neq 0 \Rightarrow B$ LN

- V9.93: BUĎ T TĚLESO, $f: V \to V$ LINEÁRNÍ OPERÁTOR NA V.P. V NAD T, BUĎTE $B_1, \dots, B_s$ JORDANOVY ŘETÍZKY POPOŘADĚ DÉLEK $k_1, \dots, k_s$ PŘÍSLUŠNÉ VLASTNÍM ČÍSLŮM $\lambda_1, \dots, \lambda_s$.

PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE $\forall \lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ JE POSLOUPNOST POČÁTKŮ TĚCH B_i, KTERÉ JSOU PŘÍSLUŠNÉ λ, LINEÁRNĚ NEZÁVISLÁ.

PAK UŽ JE SPOJENÍ $B = B_1 \dots B_s$ LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ.

- DK POKRAČOVÁNÍ:
  - PŘÍPAD $k > 1$: BÚNO $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$, $\forall i > n: \lambda_i \neq \lambda_1$
    - UVAŽUJME LINEÁRNÍ KOMBINACI

(PŘEDP. VĚTY MJ. ŘÍKÁ, ŽE $(v_1^1, v_1^2, \dots, v_1^n)$ JE LN)

$$
\begin{aligned}
0 = {} & a_1^1 v_1^1 + a_2^1 v_2^1 + \dots + a_{k_1}^1 v_{k_1}^1 + \\
& + a_1^2 v_1^2 + \dots + a_{k_2}^2 v_{k_2}^2 + \\
& \vdots \\
(*) \quad & + a_1^n v_1^n + \dots + a_{k_n}^n v_{k_n}^n + \\
& + a_1^{n+1} v_1^{n+1} + \dots + a_{k_{n+1}}^{n+1} v_{k_{n+1}}^{n+1} + \\
& \vdots \\
& + a_1^s v_1^s + \dots + a_{k_s}^s v_{k_s}^s
\end{aligned}
$$

- NA $(*)$ APLIKUJEME LINEÁRNÍ OPERÁTOR $f - \lambda_1 id_V : V \to V$

- DK (POKRAČOVÁNÍ):

g POSÍLÁ NA 0

- UVAŽUJME LINEÁRNÍ KOMBINACI

$$
\begin{aligned}
0 = {} & a^1_1 v^1_1 + \underbrace{a^1_2 v^1_2 + \dots + a^1_{q_1} v^1_{q_1}}_{=0} + \\
+ {} & a^2_1 v^2_1 + \dots + a^2_{q_2} v^2_{q_2} + \\
& \vdots \\
+ {} & a^n_1 v^n_1 + \dots + a^n_{q_n} v^n_{q_n} + \\
+ {} & a^{n+1}_1 v^{n+1}_1 + \dots + a^{n+1}_{q_{n+1}} v^{n+1}_{q_{n+1}} + \\
& \vdots \\
+ {} & a^s_1 v^s_1 + \dots + a^s_{q_s} v^s_{q_s}
\end{aligned}
\quad (*)
$$

$g(v^i_1) = 0$ $\quad i = 1, \dots, n$

$g(v^i_j) = v^i_{j-1}$ $\quad j > 1$

$i = n+1, \dots, s, \quad \lambda_i \neq \lambda_1$

$g(v^i_j) = (f - \lambda_1 \mathrm{id}_V)(v^i_j) = f(v^i_j) - \lambda_1 \cdot v^i_j = \lambda_i v^i_j + v^i_{j-1} - \lambda_1 v^i_j = (\lambda_i - \lambda_1) v^i_j + v^i_{j-1}$

- NA (*) APLIKUJEME LINEÁRNÍ OPERÁTOR $g = f - \lambda_1 \mathrm{id}_V : V \to V$

⇝ PODOBNÁ LINEÁRNÍ KOMBINACE, g APLIKUJEME NA KAŽDÉ v^i_j:

$$
\begin{aligned}
0 = {} & a^1_2 v^1_1 + \dots + a^1_{q_1} v^1_{q_1 - 1} + \\
+ {} & a^2_2 v^2_1 + \dots + a^2_{q_2} v^2_{q_2 - 1} + \\
& \vdots \\
+ {} & a^n_2 v^n_1 + a^n_3 v^n_2 + \dots + a^n_{q_n} v^n_{q_n - 1} + \\
+ {} & b^{n+1}_1 v^{n+1}_1 + b^{n+1}_2 v^{n+1}_2 + \dots + b^{n+1}_{q_{n+1}} v^{n+1}_{q_{n+1}} + \\
& \vdots \\
+ {} & b^s_1 v^s_1 + b^s_2 v^s_2 + \dots + b^s_{q_s} v^s_{q_s}
\end{aligned}
$$

POUŽIJEME IND. PŘEDPOKLAD PRO VLASTNÉ VG B3

$B'_1 = (v^1_1, \dots, v^1_{q_1 - 1})$

$\vdots$

$B'_n = (v^n_1, \dots, v^n_{q_n - 1})$

$B_{n+1}, \dots, B_s$

$\Rightarrow$ $a^i_j = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \ \forall j = 2, \dots, q_i$

$b^i_j = 0$

$\Rightarrow$ (*) JE NUTNĚ TVARU

$$0 = a_1^1 v_1^1 + a_1^2 v_1^2 + \dots + a_1^n v_1^n + a_1^{n+1} v_1^{n+1} + \dots + a_1^s v_1^s$$

(TJ. JDE O LIN. KOMBINACI POČÁTKŮ ŘETÍZKŮ $B_i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_{k_i}^i)$)

- ŘEKNĚME, ŽE BÚNO

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n_1} \\ &\lambda_{n_1+1} = \lambda_{n+2} = \dots = \lambda_{n_2} \\ &\lambda_{n_2+1} = \dots \\ &\lambda_{n_\ell+1} = \dots = \lambda_s \end{aligned}\right\}$$

ŘÁDKY PO 2 RŮZNÉ PRVKY T $\begin{pmatrix} n_1 = n \\ n_0 = 0 \end{pmatrix}$

$\leadsto$ POLOŽME $\forall k = 0, \dots, \ell$: $w_k = a_1^{n_k+1} v_1^{n_k+1} + \dots + a_1^{n_{k+1}} v_1^{n_{k+1}} = 0$

VLASTNÍ VEKTOR PŘÍSLUŠNÝ VL. Č. λ_{n_k+1}

$\leadsto$ $0 = w_0 + w_1 + \dots + w_\ell$, SOUČET VL. VEKTORŮ PŘÍSLUŠNÝ PO 2 RŮZNÝM VLASTNÍM ČÍSLŮM

$\overset{V9.62}{\Longrightarrow}$ $w_0 = w_1 = \dots = w_\ell = 0$

$\Rightarrow$ $\forall k \in \{0, \dots, \ell\}$: $a_1^{n_k+1} v_1^{n_k+1} + \dots + a_1^{n_{k+1}} v_1^{n_{k+1}} = 0$

$\Rightarrow$ $\forall k \in \{0, \dots, \ell\}$: $a_1^{n_k+1} = a_1^{n_k+2} = \dots = a_1^{n_{k+1}} = 0$ $\square$

- POČÍTÁNÍ JORDANOVA TVARU
  - BUĎ $f: V \to V$ OPERÁTOR, V KONEČNĚ GENEROVANÝ
  - PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE PRO f JORDANŮV KANONICKÝ TVAR EXISTUJE
  - TJ. MÁME NĚJAKÉ JORDANOVY ŘETÍZKY

$B_i = (v_1^i, \dots, v_{k_i}^i)$ PŘÍSLUŠNÉ VL. Č. λ_i $\quad (i = 1, \dots, s)$

TAKOVÉ, ŽE $B = B_1 \dots B_s$ JE BÁZE V, A TEDY

$$J := [f]_B^B = \operatorname{diag}(J_{\lambda_1, k_1}, \dots, J_{\lambda_s, k_s}) = \left.\begin{pmatrix} \boxed{J_{\lambda_1, k_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{\lambda_s, k_s}} \end{pmatrix}\right\} n = k_1 + \dots + k_s$$

- KTERÁ VLASTNÍ ČÍSLA SE V JORDANOVĚ TVARU VYSKYTUJÍ?

$$p_f(\lambda) = p_J(\lambda) = \det(J - \lambda I_n) = \det \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{J_{\lambda_1, k_1} - \lambda I_{k_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_{\lambda_s, k_s} - \lambda I_{k_s}} \end{pmatrix}}_{\text{HORNÍ TROJÚHELNÍKOVÁ}} =$$

$$(\lambda_1 - \lambda)^{k_1} (\lambda_2 - \lambda)^{k_2} \dots (\lambda_s - \lambda)^{k_s}$$

$\Rightarrow$ $p_f(\lambda)$ MÁ $n = \dim V$ KOŘENŮ VČETNĚ NÁSOBNOSTI

$\Rightarrow$ f MÁ $n = \dim V$ VLASTNÍCH ČÍSEL VČETNĚ ALGEBRAICKÉ NÁSOBNOSTI (T9.96(1))

- ALG. NÁSOBNOST VL. Č. λ = SOUČET DÉLEK VŠECH ŘETÍZKŮ B_i PŘÍSLUŠNÝCH λ

- **KRITÉRIUM EXISTENCE JORDANOVA KAN. TVARU**

  - **V9.97:** BUĎ $f: V \to V$ LINEÁRNÍ OPERÁTOR NA PROSTORU DIMENZE n NAD T.
    PAK NTJE:

    (1) PRO f $\exists$ JORDANŮV KANONICKÝ TVAR,

    (2) f MÁ $n = \dim V$ VLASTNÍCH ČÍSEL VČETNĚ ALGEBRAICKÉ NÁSOBNOSTI

  - **DŮSL 9.98:** $T = \mathbb{C}$: JORDANŮV KAN. TVAR VŽDY EXISTUJE
    (POUŽIJEME ZÁKLADNÍ VĚTU ALGEBRY)

- POKRAČOVÁNÍ:
- BUĎ $f: V \to V$ OPERÁTOR, V KONEČNĚ GENEROVANÝ
- PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE PRO f JORDANŮV KANONICKÝ TVAR EXISTUJE
- TJ. MÁME NĚJAKÉ JORDANOVY ŘETÍZKY

$B_i = (v_1^i, \dots, v_{k_i}^i)$ PŘÍSLUŠNÉ VL. Č. λ_i $(i = 1, \dots, s)$

TAKOVÉ, ŽE $B = B_1 \dots B_s$ JE BÁZE V, A TEDY

$$J := [f]_B^B = \operatorname{diag}(J_{\lambda_1, k_1}, \dots, J_{\lambda_s, k_s}) = \left.\begin{pmatrix} \boxed{J_{\lambda_1, k_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{\lambda_s, k_s}} \end{pmatrix}\right\} n = k_1 + \dots + k_s$$

- BUĎ λ VL. ČÍSLO f A $M_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda \cdot id)$

$$[M_\lambda]_B = \operatorname{Ker}(J - \lambda I_n) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} \boxed{J_{\lambda_1 - \lambda, k_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_{\lambda_s - \lambda, k_s}} \end{pmatrix} = LO\{\text{KANON. BÁZOVÝCH VEKTORŮ, JEDEN ZA KAŽDOU BUŇKU PŘÍSLUŠNOU } \lambda\}$$

$\Rightarrow$ GEOMETRICKÁ NÁS. λ = $\dim M_\lambda$ = # JORDANOVÝCH BUNĚK PŘÍSLUŠNÝCH λ

- NAVÍC $M_\lambda = LO\{v_1^{i_1}, \dots, v_1^{i_d}\}$, KDE $B_{i_1}, \dots, B_{i_d}$ JSOU VŠECHNY ŘETÍZKY PŘÍSLUŠNÉ λ.